Corrigé DS1 Maths 11 (S1 - 2015-2016)

Partie I : Algèbre

Exo 1 : 1) L'assertion : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y > x$
veut dire que les nombres réels sont minorés par x.
Or l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas minoré, on a donc que l'assertion est FAUSSE.

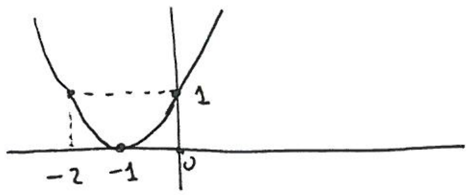
Sa négation est : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \leq x.}$

2) L'assertion $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x > y \Rightarrow x^2 > y^2$ est FAUSSE.
En effet, il suffit de prendre $x = -1$ et $y = -2$. Ainsi $x > y$ (car $-1 > -2$) mais $x^2 < y^2$ (car $x^2 = 1$ et $y^2 = 4$).

Sa négation est $\boxed{\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x > y \wedge x^2 \leq y^2.}$

car la négation de $p \Rightarrow q$ est : $p \wedge \sim q$.

Exo 2 : 1) (a) Graph de f



(b) f n'est pas injective. En effet, si on prend $x_1 = -2$ et $x_2 = 0$, on a que $f(x_1) = f(-2) = 1$ et $f(x_2) = f(0) = 1$ et donc $\boxed{f(x_1) = f(x_2)}$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective : En effet $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2 \geq 0$.
En particulier -1 n'admet pas d'antécédent.

(c) $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$; $f([-2,0]) = [0,1]$; $f^{-1}([0,1]) = [-2,0]$.

$f^{-1}(]1, \infty[) =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$.

2) Soit $g : [0, \infty[\to [1, \infty[$, $g(x) = (x+1)^2$.
Montrons que g est injective : soit $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$ tels que $g(x_1) = g(x_2)$.
Alors : $(x_1 + 1)^2 = (x_2 + 1)^2 \quad / \sqrt{\ }$

$\Rightarrow |x_1 + 1| = |x_2 + 1|$

$\Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1$ car $x_1, x_2 \geq 0$.

$\Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$, c-à-d, f est injective.

Montrons que g est surjective : Soit $y \in [1, +\infty[$. Il faut trouver $x \in [0, +\infty[$ tel que

$$g(x) = y \iff (x+1)^2 = y \iff |x+1| = \sqrt{y} \quad (\text{car } y \geq 0)$$

Or on cherche $x \geq 0$, la solution positive de cette égalité est $x = \sqrt{y} - 1$.
Finalement, on voit que $\sqrt{y} - 1 \geq 0$ si $y \geq 1$ et donc $x = \sqrt{y} - 1 \in [0, \infty[$.
Ainsi, $\boxed{x = \sqrt{y} - 1}$ est l'antécédent de y.
L'application réciproque est : $g^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$
définie par $\boxed{g^{-1}(y) = \sqrt{y} - 1}$

Exo 3 Formule du binôme de Newton :

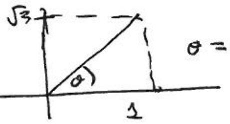
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

On note aussi $C_n^k = \binom{k}{n}$.
En particulier, en prenant $a = 1$ et $b = -1$: $0^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k$

$$\iff \boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0}$$

ou encore : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0.}$

Exo 4 a) On a que : $1 + i\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + 3}\, e^{i\pi/3} = 2e^{i\pi/3}$



$\theta = \arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$

et $1 + i = \sqrt{1+1}\, e^{i\pi/4} = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

Alors : $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1+i} = \dfrac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}} = \sqrt{2}\, e^{i\pi(\frac{1}{3} - \frac{1}{4})} = \boxed{\sqrt{2}\, e^{i\pi/12}}$

$\boxed{\text{Le module est } \sqrt{2} \text{ et un argument est } \pi/12}$.

b) Les solutions de $z^5 = \rho e^{i\theta}$ sont : $z_k = \rho^{1/5} e^{i(\frac{\theta}{5} + \frac{2k\pi}{5})}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
Ainsi les solutions de $z^5 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/12}$ sont

$$\boxed{z_k = 2^{1/10} e^{i(\frac{\pi}{60} + \frac{2k\pi}{5})}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}}$$

Exo 4-2 ⓐ Pour résoudre $z^2 = 3+4i$ on pose $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Ainsi : $z^2 = 3+4i \iff (x+iy)^2 = 3+4i$ (*)

$\iff x^2 + 2xy\,i - y^2 = 3+4i$

$\iff \boxed{x^2 - y^2 = 3}$ (*1)

$\boxed{2xy = 4}$ (*2)

De plus, (*) implique que : $|x+iy|^2 = |3+4i|$

$\iff \boxed{x^2+y^2 = \sqrt{9+16} = 5}$ (*3)

En faisant : (*1) + (*3) : $2x^2 = 8 \Rightarrow \boxed{x = \pm 2}$

(*3) − (*1) : $2y^2 = 2 \Rightarrow \boxed{y = \pm 1}$

D'après (*2), on obtient que les solutions sont : $\boxed{z_1 = 2+i \quad \text{et} \quad z_2 = -2-i}$.

ⓑ Pour résoudre : $z^2 - iz - (1+i) = 0$,

on pose $a = 1$, $b = -i$, $c = -(1+i)$. Le discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-i)^2 + 4 \cdot 1 \cdot (1+i)$$
$$= -1 + 4 + 4i$$
$$= 3+4i.$$

D'après ⓐ, on sait que les racines carrés de Δ sont $\delta = 2+i$ et $-\delta = -2-i$.

D'après la formule du cours, on obtient que les solutions sont :

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a} = \frac{i \pm (2+i)}{2},$$

c-à-d : $\boxed{z_+ = i+1 \quad \text{et} \quad z_- = -1}$

Partie II : Analyse

Exo 1 ① On sait que $2x+2=0 \iff x=-1$ et $x-1=0 \iff x=1$.

On peut donc faire le tableau des signes :

	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … $+\infty$
$2x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$

Ainsi : Si $x \in]-\infty, -1]$, on a que $f(x) = -(2x+2)+(x-1) = -x-3$

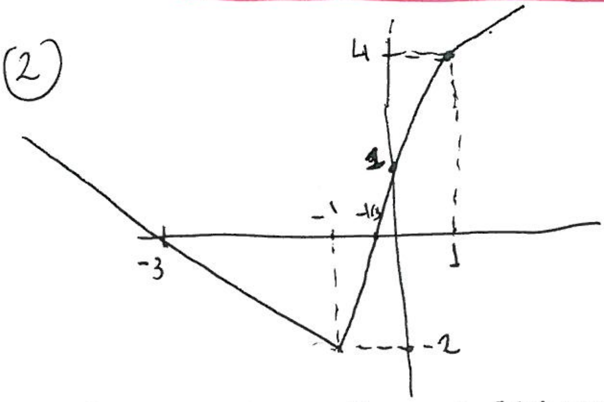
Si $x \in [-1,1]$, on a que $f(x) = 2x+2+x-1 = 3x+1$

Si $x \in [1,\infty[$, on a que $f(x) = 2x+2-(x-1) = x+3$

Par conséquent :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x \in]-\infty, -1] \\ 3x+1 & \text{si } x \in [-1,1] \\ x+3 & \text{si } x \in [1,\infty[\end{cases}}$$

②



③ Lorsque $x \in]-\infty,-1[$ on a : $f(x)=0 \iff -x-3=0 \iff \boxed{x=-3}$

Lorsque $x \in [-1,1]$, on a $f(x)=0 \iff 3x+1=0 \iff \boxed{x=-1/3}$ (et $-\frac{1}{3} \in [-1,1]$)

Lorsque $x \in [1,+\infty[$, on a : $f(x)=0 \iff x+3=0 \iff x=-3$, mais $-3 \notin [1,\infty[$.

Ainsi $\boxed{f(x)=0 \iff x \in \{-3; -1/3\}}$

Exo 2 (E) : $\ln(x^2+1) - \ln(x-1) = \ln 5$.

On sait que le domaine de $\ln(\cdot)$ est $]0,+\infty[$.

Or $x^2+1>0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $x-1>0$ ssi $x>1$,

on a donc que le domaine de validité de (E) est : $\boxed{]1,+\infty[}$

On résout l'équation (E) $\iff \ln\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right) = \ln 5$ si $x \in]1,+\infty[$

$$\overset{\exp(\cdot)}{\iff} \frac{x^2+1}{x-1} = 5$$

$$\iff x^2+1 = 5x-5$$

$$\iff x^2-5x+6 = 0$$

$$\iff (x-2)(x-3) = 0$$

$$\iff x=2 \lor x=3$$

Or $2 \in]1,+\infty[$ et $3 \in]1,\infty[$, $\boxed{\text{les solutions sont } 2 \text{ et } 3}$

Exo3 (a) $\arcsin\left(\sin\left(\frac{19\pi}{2}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{20\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= \arcsin\left(\sin\left(10\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right)$ (car sin est 2π-périodique)

$= \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$= \boxed{-\frac{\pi}{2}}$ (car $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin x) = x$.)

(b) $\arccos\left(\cos \frac{33\pi}{9}\right) = \arccos\left(\cos \frac{11\pi}{3}\right) =$

$= \arccos\left(\cos\left(\frac{12\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (car cos est 2π-périodique)

$= \arccos\left(\cos(\pi/3)\right)$ (car cos est paire)

$= \boxed{\frac{\pi}{3}}$ (car $\forall x \in [0, \pi]$, $\arccos(\cos x) = x$).

Exo4 (1) $u_n = \frac{n^3+1}{n^3+n} \overset{\cdot 1/n^3}{=} \frac{1 + 1/n^3}{1 + 1/n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1+0}{1+0} = \boxed{1}$

(2) $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $\Big|\cdot \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \boxed{0}$

(3) $w_n = \frac{5^n - 2^n}{5^n + 2^n}$ $\frac{\cdot 1/5^n}{1/5^n} = \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1-0}{1+0} = \boxed{1}$ (car $q^n \to 0$ si $|q| < 1$.)

(4) $x_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1-0}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \boxed{\frac{5}{4}}$

(5) $y_n = \frac{e^{-n}\cos n}{n^2+1}$. On a que : $0 \le |y_n| \le \frac{1}{n^2+1}$ car $|e^{-n}\cos n| \le 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Or $\frac{1}{n^2+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, le théorème des gendarmes implique que $|y_n| \longrightarrow 0$ et donc $\boxed{y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$

Exo 5 $\quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$; $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

① $u_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k^3} = 1 + \frac{1}{2^3} = 1 + \frac{1}{8} = \boxed{\frac{9}{8}}$

$v_2 = u_2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{8} + \frac{1}{2} = \frac{9+4}{8} = \boxed{\frac{13}{8}}$

② On a que ; pour $n \geq 1$:

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3} \geq 0 \implies \boxed{(u_n) \text{ est croissante :}}$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{\cancel{n} - \cancel{n} - 1}{(n+1)n}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+1)n}$$

$$= \frac{n - (n+1)^2}{(n+1)^3 n} = \frac{n - (n^2 + 2n + 1)}{(n+1)^3 n}$$

$$= \frac{-n^2 - n - 1}{(n+1)^3 n} \leq 0$$

$\implies \boxed{(v_n) \text{ est décroissante.}}$

De plus : $\boxed{\lim_{n\to\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.}$

Ainsi, on a monté que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
D'après le théoreme des suites adjacentes, on en déduit qu'elles convergent vers une même limite, c-à-d : $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \ell .$$

De plus : $\forall n \geq 1$: $u_n \leq \ell \leq v_n$.

En particulier, en prenant $n = 2$:

$$u_2 \leq \ell \leq v_2 ,$$

c-à-d : $\boxed{\frac{9}{8} \leq \ell \leq \frac{13}{8}}$