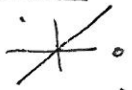
Corrigé interrogation n°1

Exo 1

ⓐ L'assertion (A) est vraie ssi f est strictement croissante.

On peut donc prendre par exemple $f(x) = x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Montrons que cette fonction vérifie l'assertion (A) : soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$.

Alors $x_2 > x_1$ et donc $f(x_2) > f(x_1)$ (car $f(x_2) = x_2$ et $f(x_1) = x_1$).

ⓑ La négation est :

$$\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \ \sim (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1))$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \ x_1 < x_2 \ \wedge \ f(x_2) \leq f(x_1)}$$

car $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$.

Exo 2

a) Voir cours

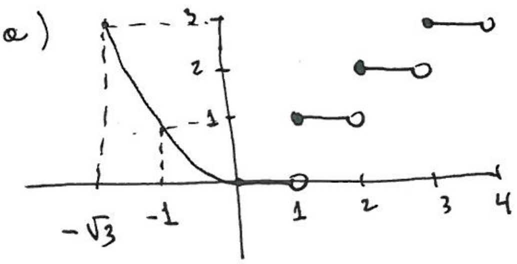
b) Voir cours

c) $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 3 \cdot 5 = \boxed{15}$

d) Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ |x+y| \leq |x| + |y|$

Exo 3

a)



$$\boxed{f^{-1}([1,3]) = [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, 4[}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1}(]-\infty, 1[) &=]-1, 0] \cup [0, 1[\\ &=]-1, 1[\end{aligned}}$$

$$\boxed{f([2,4[) = \{2, 3\}}$$

b) f n'est pas injective car $f(0) = f(1/2) = 0$.

Ceci implique que f n'est pas bijective

Montrons que f est surjective. En effet, soit $y \in \mathbb{R}^+$, alors il suffit de prendre $x = -\sqrt{y}$ et on obtient que $x \in \mathbb{R}^-$ et donc

$$f(x) = x^2 = (-\sqrt{y})^2 = y.$$

Ceci montre que f est surjective.

Exo 4 <u>Domaine de validité</u> : Il faut que $5 - x > 0$ et $x - 1 > 0$ car le domaine de ln est $]0, +\infty[$. Ainsi, on obtient :

$$5 > x \quad \wedge \quad x > 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \,]1, 5[.$$

On résout l'inéquation sur $]1,5[$. On a que :

$$\ln(5-x) + \ln(x-1) > \ln(3)$$

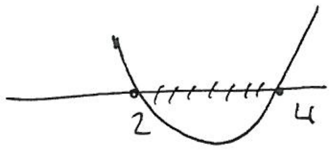
$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{(5-x)(x-1)}{3}\right) > 0 \quad / \exp.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(5-x)(x-1)}{3} > 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 5x - 5 - x^2 + x > 3$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 > x^2 - 6x + 8$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 > (x-4)(x-2)$$



$$\Leftrightarrow \quad x \in \,]2, 4[.$$

Or $]2,4[\subset]1,5[$, on a donc que l'ensemble des solutions est l'intervalle : $\boxed{]2,4[}$