Décomposition en éléments simples

Exo 7

(5) $F = \dfrac{3x^2-9x-3}{(x^2-x-2)^2} = 3 \cdot \dfrac{(x^2-3x-1)}{[(x-2)(x+1)]^2} = 3 \cdot \dfrac{x^2-3x-1}{(x-2)^2(x+1)^2}$

Soit $\tilde{F} = \dfrac{x^2-3x-1}{(x-2)^2(x+1)^2} = \dfrac{A}{(x-2)^2} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{(x+1)^2} + \dfrac{D}{x+1}$, $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

Par identification

$$\frac{x^3-3x-1}{(x-2)^2(x-1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1)^2 + C(x-2)^2 + D(x+1)(x-2)^2}{(x-2)^2(x+1)^2}$$

$\Rightarrow x^2-3x-1 = A(x^2+2x+1) + B(x^3-3x-2) + C(x^2-4x+4) + D(x^3-3x^2+4)$

Identification :

x^3 | $0 = B+D$ (*1) $\Rightarrow B = -D$ (*5)

x^2 | $1 = A+C-3D$ (*2) $\Rightarrow \boxed{A = 1-C+3D}$ (*6)

x | $-3 = 2A-3B-4C$ (*3)

cte | $-1 = A-2B+4C+4D$ (*4)

(*5) (*6) et (*3) $\Rightarrow -3 = 2-2C+6D+3D-4C \Rightarrow \boxed{-5 = -6C+9D}$ (*7)

(*5) et (*6) dans (*4) $\Rightarrow -1 = 1-C+3D+2D+4C+4D \Rightarrow \boxed{-2 = 3C+9D}$ (*8)

En faisant : (*8) $\cdot 2$ + (*7) $\Rightarrow -4-5 = 18D+9D$

$\Rightarrow -9 = 27D \Rightarrow \boxed{D = -\frac{1}{3}}$

En remplaçant dans (*8) : $-2 = 3C-3 \Rightarrow \boxed{C = 1/3}$

Finalement, en utilisant (*6) et (*5) : $A = 1-C+3D = 1-\frac{1}{3}-1 = \boxed{-\frac{1}{3}}$

$\boxed{B = 1/3}$

Ainsi :
$$\tilde{F} = -\frac{1}{3(x-2)^2} + \frac{1}{3(x-2)^2} + \frac{1}{3(x+1)^2} - \frac{1}{3(x-1)^2}$$

et $\boxed{F = \dfrac{-1}{(x-2)^2} + \dfrac{1}{(x-2)^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{(x-1)^2}}$

2ème méthode

On a : $\dfrac{x^2-3x-1}{(x-2)^2(x+1)^2} = \dfrac{A}{(x-2)^2} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{(x+1)^2} + \dfrac{D}{x+1}$

En multipliant par $(x-2)^2$ et en prenant $x=2$:

$$\frac{4-6-1}{9} = A \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{3} = A}$$

En mult. par $(x+1)^2$ et en prenant $x=-1$:

$$\frac{\cancel{1}+3-\cancel{1}}{(-3)^2} = C \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{3}}$$

En multipliant par x et en prenant $x \longrightarrow +\infty$:

$$0 = 0 + B + 0 + D \Rightarrow \boxed{B + D = 0} \Rightarrow \boxed{B = -D}$$

En prenant $x=0$:

$$\frac{-1}{4 \cdot 1} = \frac{A}{4} + \frac{B}{-2} + C + D \quad / \cdot 4 \; ..$$

$$-1 = A - 2B + 4C + 4D$$

$$\Rightarrow \quad -1 = -\frac{1}{3} + 2D + \frac{4}{3} + 4D$$

$B = -D$

$$\Rightarrow \quad -1 = 1 + 6D$$

$$-2 = 6D$$

$$\Rightarrow \boxed{D = -\frac{1}{3}} \text{ et donc } \boxed{B = \frac{1}{3}}.$$

(6). $\dfrac{x+1}{x(x-1)^4} = \dfrac{E}{x} + \dfrac{A}{(x-1)^4} + \dfrac{B}{(x-1)^3} + \dfrac{C}{(x-1)^2} + \dfrac{D}{x-1}$

On obtient : $\boxed{E=1,\ A=2,\ B=-1,\ C=1,\ D=-1}$

Exo 8

(2) $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \dfrac{A}{x^2+1} + \dfrac{B}{x^2+2} \Rightarrow \boxed{A=1,\ B=-1}$

(3) $\dfrac{4x}{(x+1)(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \dfrac{Dx+E}{x^2+1} \Rightarrow \boxed{A=-1,\ B=2,\ C=2,\ D=1,\ E=-1}$

(4) $\dfrac{x^2+2}{x^2(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x^2} + \dfrac{B}{x} + \dfrac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \dfrac{Ex+F}{x^2+1}$

$\Rightarrow \boxed{A=2,\ B=0,\ C=0,\ D=-1,\ E=0,\ F=-2}$

(5) $\dfrac{4}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{(x+1)^2} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \dfrac{Ex+F}{x^2+1}$

$\Rightarrow \boxed{A=1,\ B=2,\ C=-2,\ D=0,\ E=-2,\ F=1}$

(6) $\dfrac{4}{(x^2+1)(x-1)^4} = \dfrac{Ax+B}{x^2+1} + \dfrac{C}{(x-1)^4} + \dfrac{D}{(x-1)^3} + \dfrac{E}{(x-1)^2} + \dfrac{F}{x-1}$

$\Rightarrow \boxed{A=-1,\ B=0,\ C=2,\ D=-2,\ E=1,\ F=0}$