Corrigé N°3

Exo 1 a) $\boxed{\begin{array}{l} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 6t \end{array}}$, $t \in \mathbb{R}$.

Eqs paramétriques

b) $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-3}{6}$, ou encore

$\boxed{\begin{cases} 5x - 4y = -3 \\ 6y - 5z = -3 \end{cases}}$ Eqs cartésiennes

c) $dist(B, D) = \dfrac{\|\vec{AB} \wedge \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$

On calcule : $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{AB} \wedge \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow dist(B, D) = \dfrac{\sqrt{1+16+16}}{\sqrt{16+25+36}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{33}}{\sqrt{77}}}$

Exo 2 a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

c) Aire $\Delta ABC = \dfrac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \dfrac{1}{2} \sqrt{1+4+64} = \boxed{\dfrac{\sqrt{69}}{2}}$

Exo 3 a) $g(x) = (2+x^4)^{\sin x} = e^{\ln\left((2+x^4)^{\sin x}\right)} = e^{\sin x \cdot \ln(2+x^4)}$

$\Rightarrow g'(x) = e^{\sin x \cdot \ln(2+x^4)} \cdot \left[\sin x \cdot \ln(2+x^4)\right]'$

$$\boxed{g'(x) = e^{\sin x \ln(2+x^4)} \cdot \left[\cos x \cdot \ln(2+x^4) + \sin x \cdot \frac{1}{2+x^4} \cdot 4x^3\right]}$$

b) On calcule : $g'(0) = e^0 \cdot [\cos 0 \cdot \ln 2 + 0] = \ln 2$

$\Rightarrow$ la droite tangente est : $y = g(0) + g'(0) \cdot (x - 0) = \underbrace{g(0)}_{= e^0} + g'(0) \cdot x$

$= e^0 + \ln 2 \cdot x$

$\Rightarrow \boxed{y = 1 + x \ln 2}$

Exo4/a) Sur $\mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}$ et donc f est la division des fonctions dérivables et le denominateur ne s'annulle pas sur $\mathbb{R}^*$.
Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus :

$$\boxed{f'(x) = \frac{x\cos(3x)\cdot 3 - \sin(3x)}{x^2} = \frac{3x\cos(3x) - \sin(3x)}{x^2}} \quad , \forall x \neq 0.$$

b) Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $\frac{3x\cos(3x) - \sin(3x)}{x^2}$ est continue car il s'agit des sommes, multiplications et division des fonctions continue (et le denominateur ne s'annulle pas sur $\mathbb{R}^*$).
Ainsi, f' est continue sur $\mathbb{R}^*$ et donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

c) D'après a), f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (car dérivable emplique continue).
Il nous reste à vérifier que f est cont en 0, c-à-d :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = \alpha.$$

On calcule : $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x} \underset{\text{L'Hôp } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\cos(3x)}{1} = 3$

En prenant $\boxed{\alpha = 3}$, on obtient donc que f est continue en 0.

d) Il faut calculer : $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(3x)}{x} - 3}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x) - 3x}{x^2}$$

$$\underset{\text{L'Hôp } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)\cdot 3 - 3}{2x}$$

$$\underset{\text{L'Hôp } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(3x)\cdot 9}{2} = 0.$$

Ainsi f est dérivable en 0 et $\boxed{f'(0) = 0}$

e) D'après b), il nous reste à montrer que f' est continue en 0, c-à-d, il faut montrer que

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = f'(0) \underset{\text{d'après c)}}{=} 0$$

En effet :

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{3x\cos(3x) - \sin(3x)}{x^2}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{L'Hôp } \frac{0}{0}}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{3\cancel{\cos(3x)} - 9x\sin(3x) - 3\cancel{\cos(3x)}}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} -\frac{9}{2} \cdot \sin(3x) = \boxed{0}.$$

Par conséquent, f' est continue en 0. Or f' est continue sur $\mathbb{R}^*$, on a donc que f' est continue sur $\mathbb{R}$, c-à-d, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.