Corrigé interrogation N°2

Exo1 D'après le théorème de la division, $\exists Q, R \in \mathbb{R}[X]$ (uniques) tels que : $(X+1)^n = Q\cdot(X-1)^2 + R$ et $\deg R < 2$.

Ainsi, $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q. $R(X) = \alpha X + \beta$. Alors :

$$\begin{cases} (X+1)^n = Q\,(X-1)^2 + \alpha X + \beta \\ n(X+1)^{n-1} = Q'\,(X-1)^2 + 2Q(X-1) + \alpha \end{cases}$$

et en dérivant : (seconde ligne)

En prenant $X=1$, on obtient : $\begin{cases} 2^n = \alpha + \beta \\ n2^{n-1} = \alpha \end{cases} \Rightarrow \beta = 2^n - \alpha = 2^n - n2^{n-1}$

Par conséquent, $\boxed{R(X) = n2^{n-1}X + 2^n - n2^{n-1}}$

Exo2 Or $\deg(X^2) = 2 < \deg(X^3+1) = 3$, le théorème de décomposition en éléments simples emplique que $\exists a, b, c \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\frac{X^2}{X^3+1} = \frac{X^2}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1},$$

car les racines de X^2-X+1 sont complexes.

En multipliant par $X+1$ et en prenant $X=-1$, on obtient : $\frac{1}{1+1+1} = a \Rightarrow \boxed{\frac{1}{3} = a}$

En multipliant par X et en faisant $X \to \infty$, on obtient : $1 = a + b \Rightarrow \boxed{b = 2/3}$

En prenant $X=0$, on obtient : $0 = a + c$ et donc $\boxed{c = -1/3}$

Par conséquent :

$$\boxed{\frac{X^2}{X^3+1} = \frac{1}{3(X+1)} + \frac{X-1}{3(X^2-X+1)}.}$$

<u>Une autre méthode pour obtenir les coeff</u> : identification

On a : $X^2 = a(X^2-X+1) + (bX+c)(X+1)$

X^2 : $1 = a+b \Rightarrow b = 1-a$
X : $0 = -a+b+c$
cte : $0 = a+c \Rightarrow c = -a$

$\Rightarrow 0 = -a + 1 - a - a \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1/3}$

et donc $\boxed{\begin{array}{l} b = 1-a = 2/3 \\ c = -1/3 \end{array}}$

Exo 3 | D'une part, on a que $f(x) = \frac{\sin(\alpha x)}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et $\frac{\sin(\alpha x)}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ car c'est la division de fonctions continues et $x \neq 0$ sur $]0,+\infty[$.

D'autre part, $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ sur $]-\infty,0[$ et le dénominateur ne s'annule pas sur $]-\infty,0[$ (en effet $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$).

Alors, $\frac{x^2+3}{x-1}$ est continue sur $]-\infty,0[$ car c'est la division de polynômes, qui sont des fonctions continues.

Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, quel que soit la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour étudier la continuité de f en 0, on calcule :

- $f(0) = \frac{0+3}{0-1} = -3$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \alpha \cdot \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} = \alpha \cdot 1 = \alpha$

  (Rmq : Ce calcul est vrai si $\alpha \neq 0$, car on a divisé par α.
  Par contre, si $\alpha = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0 = \alpha$! Ainsi, la formule est vraie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$)

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+3}{x-1} = \frac{0+3}{0-1} = -3$.

Or f est continue en 0 ssi $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$,
on a donc que f est continue en 0 ssi $\boxed{\alpha = -3}$

En conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}$ ssi $\alpha = -3$.

Exo 4

a) Il faut que $4x^2-9 \geq 0$. Ainsi $4x^2-9\geq 0 \iff x^2 \geq \frac{9}{4} \iff \sqrt{x^2} \geq \sqrt{\frac{9}{4}}$

$\iff |x| \geq \frac{3}{2} \iff x \geq \frac{3}{2} \vee x \leq -3/2$.

Alors $\boxed{D_f = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[}$

b) D_f est symétrique. On prend donc $x \in D_f$ et on calcule :

$f(-x) = \sqrt{4(-x)^2-9} = \sqrt{4x^2-9} = f(x)$ et donc <u>f est paire</u>.

c) Or la fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}^+$, la composée avec $4x^2-9$ donne une fonction continue sur D_f.

De plus $\lim_{x\to\frac{3}{2}^-} f(x) = 0 = f(\frac{3}{2})$ et par parité, $\lim_{x\to-\frac{3}{2}^+} f(x) = 0 = f(-\frac{3}{2})$

d) D'après c), il n'existe <u>pas d'asymptote verticale</u>.

On calcule : • $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et donc il n'y a <u>pas d'asymp. horizontale en $+\infty$</u>

• $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{4x^2-9}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4-\frac{9}{x^2}} = \sqrt{4} = 2$

• $\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2-9} - 2x$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2-9-4x^2}{\sqrt{4x^2+9}+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-9}{\sqrt{4x^2+9}+2x} = 0$

Par conséquent, f admet l'asymptote oblique : $\boxed{y=2x}$ en $+\infty$.

(Rmq: Or f est paire, en $-\infty$ on a : $\begin{cases}\text{pas d'asymp. horizontale} \\ y=2x \text{ est l'asymp. oblique.}\end{cases}$)

(e) Si $x \geq \frac{3}{2}$, $f(x)-2x = \frac{-9}{\sqrt{4x^2+9}+2x} < 0$

et f est donc en dessous de l'asymptote

(d)