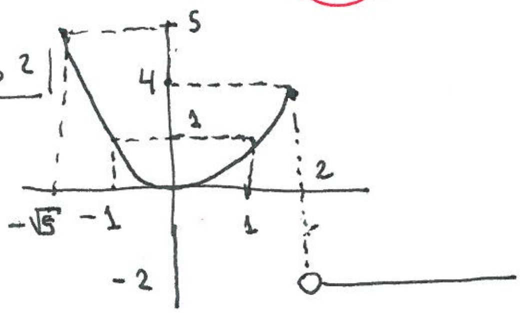
Corrigé Interrogation N°1

Exo 1 a) La négation est : $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x| < \delta \wedge |\sin(x)| \geq \varepsilon$. 1pt

b) Voir cours 1pt

Exo 2



a) Non, car $f(1) = f(-1) = 1$. 1pt

b) Non, car $y = -3$ n'a pas d'antécédent. En effet $f(x) = x^2 \geq 0, \forall x \in]-\infty, 2]$.
et $f(x) = -2$, si $x \in]2, +\infty[$. En particulier, $f(x) \neq -3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 1pt

c) $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[\cup \{-2\}$ 0,5pts

$f^{-1}([1,5]) = [-\sqrt{5}, -1] \cup [1, 2]$ 0,5pts

$f^{-1}(]-\infty, 1[) =]2, +\infty[\cup]-1, 1[$ 0,5pts

Exo 3

$$a_n = \sqrt{(n+2)(n+3)} - n \cdot \frac{\sqrt{(n+2)(n+3)} + n}{\sqrt{(n+2)(n+3)} + n}$$

$$= \frac{(n+2)(n+3) - n^2}{\sqrt{(n+2)(n+3)} + n} = \frac{5n+6}{\sqrt{n^2+5n+6} + n} \quad \frac{1/n}{1/n}$$

$$= \frac{5 + 6/n}{\sqrt{1 + \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}} + 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{5+0}{\sqrt{1+0}+1} = \boxed{\frac{5}{2}}$$ 1,5pts

---

$b_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$. On voit que $b_{2n} = \sin\left(\frac{\pi \cdot 2n}{2}\right) = \sin(n\pi) = 0$
et $b_{2n+1} = \sin\left(\pi \frac{(2n+1)}{2}\right) = (-1)^n$

La sous-suite $(-1)^n$ diverge (en effet la sous-suite paire vaut 1 et la sous-suite impaire vaut -1). D'après le théorème des sous-suites, on en déduit que (b_n) diverge (car l'une de ses sous-suites diverge) 1,5pts

---

$c_n = \frac{\mathbb{E}(\pi n)}{n}$. On sait que $\mathbb{E}(\pi n) \leq \pi n \leq \mathbb{E}(\pi n) + 1$ et en divisant par n : $c_n \leq \pi \leq c_n + \frac{1}{n}$. On a donc : $\pi - \frac{1}{n} \leq c_n \leq \pi$

Puisque $\frac{1}{n} \to 0$, le théorème des gendarmes implique que :

$$\boxed{c_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \pi}$$ 1,5pts