Université de Lille 1 - U.F.R. de Mathématiques

L1 SESI - PEIP - Semestre 1
Devoir surveillé de Maths11 - Mardi 28 octobre 2014
Durée : 3 heures
SANS DOCUMENT NI CALCULATRICE

Les étudiants ayant validé l'algèbre ou l'analyse ne composent que la partie non validée. Dans ce cas, la durée de l'épreuve est 1 heure 30.

Prière de noter le numéro de votre groupe sur votre copie

Partie : Algèbre

Exercice 1. Dire, en justifiant votre réponse, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, puis, écrire leur négation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ y > x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x > y) \Rightarrow (|x| > |y|).$$

Exercice 2.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = (x-1)^2 + 1$.
   (a) Dessiner le graphe de f.
   (b) f est-elle injective ? surjective ? (justifier votre réponse)
   (c) Déterminer les ensembles :
   $$f(\mathbb{R})\,;\ f([1,2])\,;\ f^{-1}([1,2])\,;\ f^{-1}(]-\infty, 1[).$$
2. Soit $g : [1, +\infty[\to [1, +\infty[$ la fonction définie par : $g(x) = (x-1)^2 + 1$.
   Montrer que g est une application bijective et donner une expression de l'application réciproque g^{-1}.

Exercice 3. Ecrire la formule du binôme et en déduire la valeur de :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k.$$

Exercice 4.

1. (a) Déterminer le module et un argument de $\dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
   $$z^6 = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}.$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :
   $$z^2 = -1 + 4i \text{ et } z^2 + iz - i = 0.$$

Tourner la page

Partie : Analyse

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x) = |x-1| - |x+1|$.

1. Donner une expression de f n'utilisant pas la valeur absolue.
2. Tracer le graphe de f.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 2. Calculer les limites des suites définies par leur terme général suivant :

$$u_n = \sqrt{n^2+1} - n \;; \quad v_n = \frac{3^n + 4^n}{3^{n+1} + 4^{n+1}} \;;$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{3} + + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} \;; \quad y_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n.$$

Indication : Pour calculer la limite de la suite (y_n), on admettra que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Exercice 3. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de chiffres, c'est-à-dire : pour $n \geq 0$, a_n est un entier tel que : $0 \leq a_n \leq 9$.
On considère les deux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \;; \; v_n = u_n + \frac{1}{10^n}.$$

1. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et admettent la même limite.
2. On suppose que pour tout $n \geq 0, a_n = 1$. Calculer la somme représentant u_n et en déduire sa limite.

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $u_{2n} - u_n$, puis, montrer que :

   $$u_{2n} - u_n \geq \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

   Indication : Pour $1 \leq k \leq n$, $\frac{1}{\sqrt{n+k}} \geq \frac{1}{\sqrt{2n}}$.
2. Quelle est la limite de la suite $(u_{2n} - u_n)$?
3. La suite (u_n) est-elle convergente ? (justifier votre réponse)
4. Montrer que la suite (u_n) est croissante. Quelle est sa limite ?

—oooOooo—