# Corrigé DS 1

## Algèbre

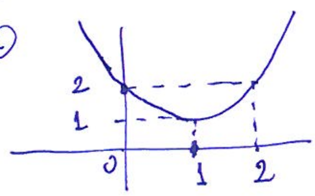
**Exo 1** : L'assertion $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$ est vraie

(1p) En effet, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, il suffit de prendre $y = x + 1 \in \mathbb{R}$ et donc : $y > x$.
La négation est : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y \leq x$

(1pt) L'assertion $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x > y \Rightarrow |x| > |y|$ est fausse.
En effet, si l'on prend : $x = 0$ et $y = -1$ on a : $x > y$,
mais $|x| = 0 < |1| = 1 = |y|$
La négation est : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x > y \wedge |x| \leq |y|$

**Exo 2** (1)

(0,5p) (a)




(b) • $f$ n'est pas injective car $f(0) = f(2) = 2$. (0,5p)

(0,5p) • $f$ n'est pas surjective car $0$ n'a pas d'antécédent. En effet :
$f(x) = (x-1)^2 + 1 \geq 1$ et donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$

(c) $f(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$ (0,25)
$f([1,2]) = [1, 2]$ (0,25)

$f^{-1}([1,2]) = [0, 2]$ (0,25)
$f^{-1}(]-\infty, 1[) = \emptyset$ (0,25)

(2) **g est injective** : En effet, soient $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$ tels que $g(x_1) = g(x_2)$. Alors $(x_1 - 1)^2 + 1 = (x_2 - 1)^2 + 1$

$$\Rightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \quad |\sqrt{\ }$$
$$\Rightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1|$$
$$\Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Longrightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

(0,5)

$x_1, x_2 \in [1, +\infty[$ implique que $x_1 - 1 \geq 0$ et $x_2 - 1 \geq 0$

**g est surjective** : Soit $y \in [1, +\infty[$. Il faut trouver $x \in [1, +\infty[$ tel que $g(x) = y$. On résout :

$$g(x) = y \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 = y$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = y - 1$$
$$\Rightarrow |x - 1| = \sqrt{y-1}$$
$$\Rightarrow x - 1 = \sqrt{y-1}$$
$$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{y-1}.$$

(0,5)

car on cherche $x \geq 1$ ; $\sqrt{y-1} \in \mathbb{R}$ car $y \geq 1$.

Ainsi $x \in [1, +\infty[$. Ceci montre que $g$ est surjective.

Exo4-2 Soit $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. On cherche $x, y$ tels que :
$$z^2 = -1 + 4i.$$
Ainsi : $x^2 + 2xyi - y^2 = -1 + 4i \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = 4 \Rightarrow xy = 2 \end{cases}$

De plus, $x^2 + y^2 = |z|^2 = |-1+4i| = \sqrt{17}$

Ainsi : $\left.\begin{array}{l} x^2 - y^2 = -1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{17} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x^2 = -1 + \sqrt{17} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}} \\ 2y^2 = \sqrt{17} + 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{17}+1}{2}} \end{array}$

Puisque $xy = 2 \geq 0$, on en déduit que les racines carrées de $z$ sont :

$$\boxed{z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}}}$$

1p

•) Les solutions de $z^2 + iz - i = 0$, sont $z = \dfrac{-i \pm \delta}{2}$,

où $\delta$ est une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac = -1 + 4i$.

Ainsi, ~~en~~ prenant $\delta = z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}}$, on obtient les solutions :

$$\boxed{z = \frac{-i \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}}\right)}{2}}$$

1p

45

Par conséquent, $g$ es bijective et : $g^{-1} : [1, +\infty[ \longrightarrow [1, +\infty[$ (0,5)
et donnée par : $g^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y-1}$.

Exo 3 : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ :
$$(x+y)^n = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} x^K y^{n-K}$$ (1p)

Remarque : $\binom{n}{K} = C_n^K$

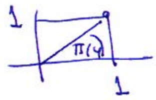
En prenant $x = 2$ et $y = 1$, on obtient : $\boxed{3^n = \sum_{K=0}^{n} \binom{n}{K} 2^K = \sum_{K=0}^{n} 2^K C_n^K}$ (1p)

Exo 4 1a) Soit $Z = \dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$.

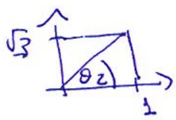
(1)

On a que $Z_1 = 1+i$ et $Z_2 = 1+i\sqrt{3}$

$\rho_1 = |Z_1| = \sqrt{2}$ et $\theta_1 = \arg(Z_1) = \pi/4$



$\rho_2 = |Z_2| = 2$ et $\theta_2 = \arg(Z_2) = \arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$



Alors $Z = \dfrac{Z_1}{Z_2} = \dfrac{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}}{2\, e^{i\pi/3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/12}$

et donc le module de $Z$ est $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et un argument est $-\dfrac{\pi}{12}$

Rmq : Soit $K \in \mathbb{N}$, $-\dfrac{\pi}{12} + 2K\pi$ est aussi un argument de $Z$.

1b) (1) $Z^6 = \dfrac{1}{2^{1/2}} e^{-i\pi/12}$. Alors $Z_K = \dfrac{1}{2^{1/12}} e^{-\frac{i\pi}{12 \cdot 6} + \frac{2\pi K i}{6}}$

$$\boxed{Z_K = \frac{1}{2^{1/12}} e^{i\left(\frac{-\pi}{72} + \frac{2\pi K}{6}\right)}, \quad K \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}}$$

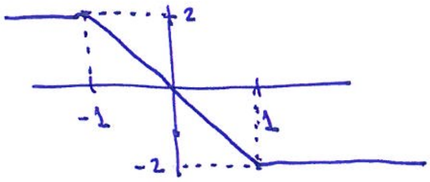
## Analyse

**Exo 1** 1) D'abord, on note que $|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{si } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

et $|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$

Ainsi $f(x) = \begin{cases} (x-1)-(x+1), & \text{si } x \geq 1 \\ -(x-1)-(x+1), & 1 \geq x \geq -1 \\ -(x-1)+(x+1), & x \leq -1 \end{cases} = \begin{cases} -2, & \text{si } x \geq 1 \\ -2x & \text{si } 1 \geq x \geq -1 \\ 2 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$ 1p

2)




0,5p

3) Si $x \in ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ on a que $|f(x)| = 2$. Ainsi la (les) solution(s) de $f(x)=0$ se trouvent sur $]-1, 1[$ et donc $f(x)=0 \iff -2x=0 \iff \boxed{x=0}$ est la seule solution.

0,5

**Exo 2** $u_n = \sqrt{n^2+1} - n \dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \dfrac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \xrightarrow{n\to+\infty} \boxed{0}$ 1p

$v_n = \dfrac{3^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}} \cdot \dfrac{1/4^n}{1/4^n} = \dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}{3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4} \xrightarrow{n\to+\infty} \dfrac{0+1}{3\cdot 0+4} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$ 1p

car $q^n \to 0$ si $|q|<1$

$x_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{3^k} = \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} \xrightarrow{n\to+\infty} \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\frac{2}{3}} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$ 1p

$y_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)} = e^{\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}\cdot 2} \xrightarrow{n\to\infty} e^{1\cdot 2} = \boxed{e^2}$ 1p

on utilise l'indication avec $y_n = \frac{2}{n} \to 0$, qui implique que $\dfrac{\ln(1+y_n)}{y_n} \to 1$.

## Exo 3

(1) On voit que : $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{10^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \geq 0$ ;

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{10^{n+1}} - \frac{1}{10^n} =$$

$$= \frac{a_{n+1}+1}{10^{n+1}} - \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^n}\left(\frac{a_{n+1}+1}{10} - 1\right)$$

$$\underset{\text{car } 0 \leq a_n \leq 9}{\leq} \frac{1}{10^n}\left(\underbrace{\frac{9+1}{10}}_{=1} - 1\right) \leq 0.$$

et $\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{10^n} = 0$.

Ainsi, $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$, c-à-d, ces deux suites sont monotones et d'après le théorème des suites monotones on en déduit que les deux suites convergent et admettent la même limite. (1,5p)

(2) Si $a_k = 1, \forall k \geq 0$, alors $u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{10}} \to \frac{1}{\frac{9}{10}} = \boxed{\frac{10}{9}}$ (1p)

car $q^n \to 0$ si $|q| < 1$

## Exo 4

1) $u_{2n} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{\text{car } k \leq 2n}{\geq} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{2n-(n+1)+1}{\sqrt{2n}}$

$$= \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}.$$ (1,5)

2) Or $\sqrt{\frac{n}{2}} \to +\infty$, on a donc : $\boxed{u_{2n} - u_n \longrightarrow +\infty}$ (0,5p)

3) Si $(u_n)$ converge, alors $\exists\, l \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \to l$ et donc $u_{2n} \to l$. Ceci implique que $u_{2n} - u_n \longrightarrow l - l = 0$, ce qui contredit (2). Par conséquent, $(u_n)$ ne converge pas. (0,5)

4) On calcule : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 0$. Alors $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante. (0,5)

Si $(u_n)$ est majorée, le théorème de suites monotones impliquerai que $(u_n)$ converge. Or $(u_n)$ ne converge pas, on en déduit que $(u_n)$ est non-majorée. Étant croissante, le théorème des suites monotones implique que : $\boxed{u_n \to +\infty}$ lorsque $n \to +\infty$. (0,5p)