Corrigé Examen 2015

(1) $y' = (1+x)y^2 - (2x+1)y + x$

Sol particulière évidente $y_p = 1$. On pose $y = 1 + \frac{1}{z}$, alors :

$$y' = -\frac{z'}{z^2} \Rightarrow -\frac{z'}{z^2} = (1+x)\left(1+\frac{1}{z}\right)^2 - (2x+1)\left(1+\frac{1}{z}\right) + x$$

$$= (1+x)\left(1+\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}\right) - (2x+1)\left(1+\frac{1}{z}\right) + x$$

$$= \cancel{1} + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} + \cancel{\frac{2x}{z}} + \frac{x}{z^2} + \cancel{x} - \cancel{2x} - \cancel{\frac{2x}{z}} - \cancel{1} - \frac{1}{z} + \cancel{x}$$

$$\Rightarrow -z' = 2z + 1 + x - z$$

$$\Rightarrow \boxed{z' + z = -1 - x} \quad | \cdot e^x$$

$$\Rightarrow (z e^x)' = -(1+x)e^x$$

Or $\int \underset{u}{x}\, \underset{dv}{e^x} \underset{i.p.p}{=} xe^x - \int e^x = xe^x - e^x + C$, on a donc : $\int (1+x)e^x = xe^x + \tilde{C}$ et alors :

$u \quad dv \Rightarrow du = dx$, $v = e^x$

$$ze^x = -xe^x + \hat{C} \quad | e^{-x}$$

$$\Rightarrow z = -x + \hat{C}e^{-x}$$

$$\Rightarrow y = 1 + \frac{1}{-x+\hat{C}e^{-x}} \quad \text{ou encore : } \boxed{y = 1 - \frac{1}{x + ce^{-x}}}$$

$c \in \mathbb{R}$.

(2) En posant $f(y) = (\cos y)^{2015}$, on a que $f \in C^1$ et donc le théorème de Cauchy-Lipschitz implique l'existence et unicité de la sol. maximale. On voit que : $y'(0) = (\cos(0))^{2015} = 1 > 0$

et donc y est strict. croissante dans un voisinage de 0 (car y est C^1)

De plus $|f(y)| \leq 1$ (bornée) et donc on peut appliquer un théorème du cours pour conclure que y est globale.

Supposons qu'il existe $t^* \in \mathbb{R}$ t.q. $y'(t^*) = 0$. Alors :

$$(\cos(y(t^*)))^{2015} = 0 \Rightarrow \exists K \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } y(t^*) = (2K+1)\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi y est sol de $\begin{cases} y' = f(y(t)) \\ y(t^*) = (2K+1)\pi \end{cases}$. Or $y = (2K+1)\frac{\pi}{2}$ (la sol Cte) est une solution, d'après le thm de Cauchy-Lipschitz on a que $(2K+1)\pi$ est la solution.

En particulier $y(0) = (2K+1)\frac{\pi}{2}$, ce qui est une contradiction. Par conséquent, $y'(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ et donc y est strict. croissante sur $\mathbb{R}$.

b) L'argument de la partie a) montre aussi que :

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad y(t) < \frac{\pi}{2} .$$

En effet, si $\exists t^* \in \mathbb{R}$ t.q. $y(t^*) = \frac{\pi}{2}$, alors (d'après Cauchy-Lip),

on a que $y(t) \equiv \frac{\pi}{2}$ car $\frac{\pi}{2}$ est une sol de $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t^*) = \pi/2 \end{cases}$,

ce qui contredit que $y(0) = 0$.

Par conséquent, $y(t)$ est majorée par $\frac{\pi}{2}$ et strict croissante, et donc : $\exists\, \ell = \lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$ et $0 \leq \ell \leq \frac{\pi}{2}$.

L'éq : $y' = f(y)$ implique donc que $\exists\, \tilde{\ell} := \lim\limits_{t \to \infty} y'(t)$ et on en déduit que $\tilde{\ell} = 0$. Ceci implique que : $0 = f(\ell)$, ou encore : $0 = (\cos(\ell))^{2015}$. Or $0 \leq \ell \leq \frac{\pi}{2}$, on a donc que $\ell = \frac{\pi}{2}$,

c-à-d : $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = \frac{\pi}{2}}$

Ex03 a) $w(t) = \tanh(t) \Rightarrow w'(t) = \mathrm{sech}^2(t)$, $\quad w''(t) = \left[\frac{1}{\cosh^2(t)}\right]' = -2\frac{\sinh(t)}{\cosh^3(t)} = -2\tanh(t)\cdot\mathrm{sech}^2(t)$.

$(\tanh(t))' = \left[\frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}\right]' = \frac{\cosh^2(t)-\sinh^2(t)}{\cosh^2(t)}$

Ainsi : $w''+2w-2w^3 = -2\tanh(t)\,\mathrm{sech}^2(t) + 2\cdot\tanh(t) - 2(\tanh(t))^3$

$= -2\tanh(t)\,[\cancel{1}-\cancel{\tanh^2(t)}] + \cancel{2\tanh(t)} - \cancel{2\tanh^3(t)} = 0.$

$\cosh^2(t)-\sinh^2(t)=1 \;/\;\frac{1}{\cosh^2(t)}$

$1-\tanh^2(t)=\mathrm{sech}^2(t)$

b) On a que : $w''+2w-2w^3=0 \quad /\,(\ )'$

$\Rightarrow w'''+2w'-6w^2w'=0$

Or $z_1=w'$, on a donc : $\boxed{z_1''+2z_1-6w^2z_1=0}$, où $w^2=\tanh^2(t)$.

c) D'après la formule de réduction d'ordre d'Abel :

$$z_2 = z_1\int\frac{1}{z_1^2}\,e^{-\int p} = z_1\int\frac{1}{z_1^2} = w'\int\frac{1}{(w')^2} = \mathrm{sech}^2(t)\int\frac{1}{\mathrm{sech}^4(t)}.$$

pour l'équation : $y''+py'+qy=0$,
et donc $p\equiv 0$

ou encore : $z_2=\mathrm{sech}^2(t)\int\cosh^4(t)\,dt$.

On calcule : $\int\cosh^4(t) = \int\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}\int(e^{2t}+e^{-2t}+2)^2$

$=\frac{1}{16}\int e^{4t}+e^{-4t}+4+2+4e^{2t}+4e^{-2t}$

$=\frac{1}{16}\left[\frac{e^{4t}}{4}-\frac{e^{-4t}}{4}+6t+2e^{2t}-2e^{-2t}\right]+C$

$=\frac{1}{16}\left[\frac{\sinh(4t)}{2}+6t+4\sinh(2t)\right]+C$

$\Rightarrow \boxed{\int\cosh^4(t)\,dt = \frac{\sinh(4t)}{32}+\frac{\sinh(2t)}{4}+\frac{3t}{8}+C}$

On sait que z_2 ainsi obtenue est une sol. l.i : $\boxed{z_2=\mathrm{sech}^2(t)\left[\frac{\sinh(4t)}{32}+\frac{\sinh(2t)}{4}+\frac{3t}{8}\right]}$

d) D'après la formule de variation de la constante

$$z_p = -z_1\int\frac{z_2 g}{W}+z_2\int\frac{z_1 g}{W}, \quad \text{où } W=\begin{vmatrix} z_1 & z_2\\ z_1' & z_2'\end{vmatrix}.$$

On calcule : $W = z_1z_2'-z_2z_1' = z_1\left[z_1\int\frac{1}{z_1^2}\right]' - z_1\int\frac{1}{z_1^2}\cdot z_1'$

$= \cancel{z_1z_1'\int\frac{1}{z_1^2}} + z_1^2\cdot\frac{1}{z_1^2} - \cancel{z_1\int\frac{1}{z_1^2}\cdot z_1'}$

$=\boxed{1}$

Ainsi, la sol générale est :

$\boxed{z=\alpha z_1+\beta z_2+z_p,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}}$, où $\boxed{z_p=-z_1\int z_2 g+z_2\int z_1 g}$

$\boxed{\text{Exo4}}$ On a : $X' = A \cdot X$, on pose $f(t) = \|x(t)\|^2$.

D'après Cauchy-Lipschitz, X est une fonction dérivable et donc $A \cdot X$ est une fonction cont, Ainsi $x' = AX$ est continue et donc $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est C^1. On sait la norme au carré est C^∞.
Par composée des fonctions de classe C^1, f est donc C^1.

De plus $f'(t) = 2 \langle x(t), x'(t) \rangle$ car si $N(x) = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$, alors $dN(x)(h) = 2 \langle x, h \rangle$ (résultat du cours) et

$$f = N \circ F, \text{ où } F : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ t \to x(t) \end{array} ; \quad N : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \to \|x\|^2. \end{array}$$

et donc $f'(t) = dN(F(t)) \cdot F'(t) = 2 \langle x(t), x'(t) \rangle$.

Or $x'(t) = AX$, on a donc : $\boxed{f'(t) = 2 \langle x(t), A(t) x(t) \rangle.}$

b) En utilisant que $A(t)$ est symétrique, on obtient l'existence de $P(t) \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que : $A(t) = P(t) D(t) P(t)^T$, où $D(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n(t) \end{bmatrix}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \langle x(t), A(t) x(t) \rangle &= \langle x, P D P^T \cdot x \rangle \\ &= \langle P^T x, D P^T x \rangle \\ &= \langle y, D y \rangle \quad \text{où } y = P^T x \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \\ &\leq -\eta \sum_{i=1}^{n} \|y_i^2\| = -\eta \|y\|^2 \\ &\leq -\eta \underbrace{\langle y, y \rangle} \end{aligned}$$

$$\langle y, y \rangle = \langle P^T x, P^T x \rangle = \langle x, \underbrace{P P^T}_{= I} x \rangle = \|x\|^2.$$

Par conséquent : $f'(t) \leq -2\eta \|x\|^2$

$$\Rightarrow \boxed{f'(t) \leq -2\eta f(t)}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

c) D'après le lemme de Gronwall, on obtient que :

$$f(t) \leq f(0)\, e^{\int_0^t (-2\eta) dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) \leq f(0)\, e^{-2\eta t}}, \forall t \geq 0.$$

Or $f(t) \geq 0$, on en déduit que $\boxed{\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0}$

d) i) $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

Valeurs propres: $\begin{vmatrix} -5-\lambda & 1 \\ 1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda+5)^2 = 1$

$\Rightarrow \lambda+5 = 1$ ou $\lambda+5 = -1$

$\boxed{\lambda = -4 \text{ ou } \lambda = -6}$

Ainsi, le résultat s'applique avec $\eta = +4$, i.e., $\|X(t)\| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

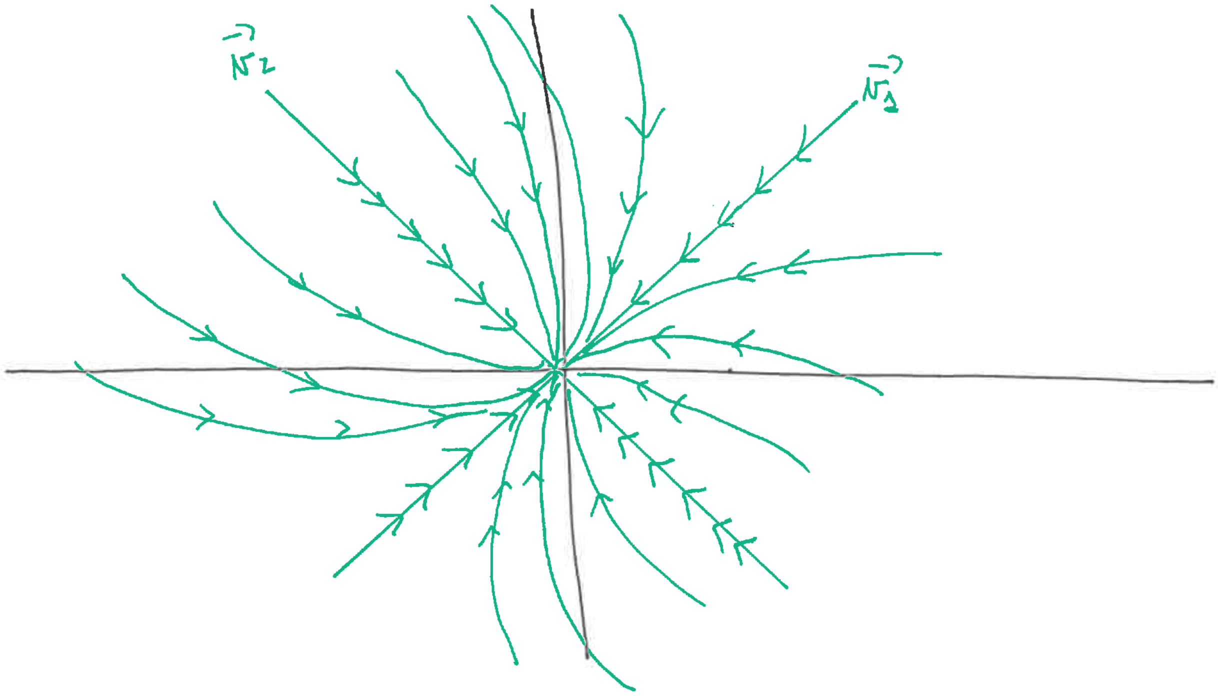
b) Vect propres:

$\lambda_1 = -4$: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on prend $a = 1, b = 1$ et donc $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -6$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on prend $a = 1, b = -1$ et donc $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ainsi la solution générale est : $\boxed{X(t) = \alpha e^{-4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-6t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$, $t \in \mathbb{R}$

c) Il s'agit d'un noeud impropre stable et les trajectoires sont tangentes à la direction $\vec{v_1}$ (car $|\lambda_1| < |\lambda_2|$) :



Exo 5/

a) c'est immédiat que $(0,-1,1,0)$ est sol du système.

On pose : $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, t\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} x^3+y^3+z^3+t^3 \\ x^2+y^2+z^2+t^2-2 \\ x+y+z+t \end{pmatrix}$$

c'est clair que f est de classe C^1 (et C^∞) car f est polynômiale.

Si on pose $u=(x,y,z)$, le problème est résoudre $f(u,t)=0$ $(0 \in \mathbb{R}^3)$.

On sait que $f(u^*,0)=0$, avec $u^*=(0,-1,1)$.

Pour appliquer le Théorème des fonctions implicites, il suffit donc de montrer que $d_u f(u^*,0) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$.

Or $d_u f(u,t)h = \mathrm{Jac}(\tilde{f})\cdot h$, $h \in \mathbb{R}^3$, $\tilde{f} = f$ avec t fixé,

on calcule donc :

$$\mathrm{Jac}\,\tilde{f} = \begin{pmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Jac}\,\tilde{f}(u^*,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\mathrm{Jac}\,\tilde{f}(u^*,0)) = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

$\Rightarrow \mathrm{Jac}\,\tilde{f}(u^*,0)$ est inversible

$\Rightarrow d_u f(u^*,0) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$.

D'après le théorème des fonctions implicites, $\exists\, \mathcal{O} \subset \mathbb{R}, \exists\, V \subset \mathbb{R}^3$, $\mathcal{O}$ et V ouverts, avec $0 \in \mathcal{O}$, $u^* \in V$ et $g \in C^1(\mathcal{O},V)$ tel que $g(t)$ est l'unique sol dans V du système $f(g(t),t)=0$.

Or $\mathcal{O}$ est un ouvert, il existe $\varepsilon>0$ tel que $]-\varepsilon,\varepsilon[\subset \mathcal{O}$ et donc $\tilde{g} = g|_{]-\varepsilon,\varepsilon[}$ est la solution cherchée.

b) D'après le T.F.I, on sait que $dg(t) = -d_u f(g(t),t)^{-1} \circ d_t f(g(t),t)$

Or $g :]-\varepsilon,\varepsilon[\to \mathbb{R}^3$, on a donc :

$$g'(0) = -\left[\mathrm{Jac}(\tilde{f})\Big|_{(u^*,0)}\right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0}$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 1 \\ 1/6 & -1/4 & 0 \\ 1/6 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

il suffit de calculer cette colonne.

ou encore : $dg(0)(s) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exo 6

$$f(x,y,z) = y\ln z + \frac{y^2}{2z} + x^2 + z$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ \ln z + \frac{2y}{2z} \\ \frac{y}{z} - \frac{y^2}{2z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (1) \\ \ln z = -y/z & (2) \\ \frac{y}{z}\left(1 - \frac{y}{2z}\right) = 0 & (3) \end{cases}$$

$(3) \Rightarrow y = 0$ ou $1 = \frac{y}{2z}$

⊙ Si $y = 0$, $(2) \Rightarrow \ln z = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow$ le point critique est $\boxed{(0,0,1)}$

⊙ Si $y \neq 0$, alors : $y = 2z$ et (2) implique : $\ln z = -2 \Rightarrow z = e^{-2}$

$\Rightarrow$ le point critique est $\boxed{(0, 2e^{-2}, e^{-2})}$

Matrice hessienne : $H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/z & \frac{1}{z} - \frac{y}{z^2} \\ 0 & \frac{1}{z} - \frac{y}{z^2} & -\frac{y}{z^2} + \frac{y^2}{z^3} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow H_f(0,0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & & \\ & 1-\lambda & 1 \\ & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2$, $\lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Or $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ et $\lambda_3 < 0$, $\boxed{(0,0,1) \text{ est un point selle.}}$

$$H_f(0, 2e^{-2}, e^{-2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & -e^2 \\ 0 & -e^2 & 2e^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & & \\ & e^2 - \lambda & -e^2 \\ & -e^2 & 2e^2 - \lambda \end{vmatrix}$$

$\frac{y}{z^2} = 2e^{-2} \cdot e^4 = 2e^2$

$\frac{y^2}{z^3} = 4e^{-4} \cdot e^6 = 4e^2$

$$= (2-\lambda)\left[(\lambda - e^2)(\lambda - 2e^2) - e^4\right]$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 3e^2\lambda + \underbrace{2e^4 - e^4}_{+e^4}]$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = \frac{3e^2 \pm \sqrt{9e^4 - 4e^4}}{2} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)e^2$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot e^2, \quad \lambda_3 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)e^2$$

Ainsi : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ et donc $\boxed{(0, 2e^{-2}, e^{-2}) \text{ est un minimum local}}$

ce n'est pas un min global car $\lim_{z \to 0^+} f(0,1,z) = -\infty$

Exo 7) On a le problème : $\begin{cases} \max A(x,y,z) \\ \text{sous la contrainte } x+y+z = p \end{cases}$, p : périmètre donné. $x, y, z \geq 0$. $(p>0)$

On considère : $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ et } g(x,y,z) = p\}$.

D est borné car $g(x,y,z) = p$ implique que $x \leq p$, $y \leq p$ et $z \leq p$.
Or D est fermé (car g est continue), D est un compact et donc $A(x,y,z)$ atteint son max sur D. De même, $A^2(x,y,z)$ atteint son max sur D, qu'on note (x_0, y_0, z_0). C'est immédiat que $x_0 > 0$, $y_0 > 0$, $z_0 > 0$ (sinon l'aire est nulle) et que :

$$\left(\max_D A(x,y,z)\right)^2 = \max_D A^2(x,y,z) = A^2(x_0,y_0,z_0).$$

Par conséquent, on considère $f : (\mathbb{R}_*^+)^3 \to \mathbb{R}$; $\tilde{g} : (\mathbb{R}_*^+)^3 \to \mathbb{R}$ et donc :

$$A^2(x_0,y_0,z_0) = \max\{f(x,y,z) : (x,y,z) \in W\},$$

où $W = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_*^+)^3 : \tilde{g}(x,y,z) = 0\}$

et $f(x,y,z) = s(s-x)(s-y)(s-y) \underset{2s = p}{=} \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-x\right)\left(\frac{p}{2}-y\right)\left(\frac{p}{2}-z\right)$
$\tilde{g} = g - p$

Or $\nabla\tilde{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, on peut donc appliquer le thm des multiplicateurs de Lagrange pour en déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tq.

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0,z_0).$$

On calcule : $\nabla f = \lambda \nabla g \iff \begin{cases} -\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-y\right)\left(\frac{p}{2}-z\right) = \lambda & (1) \\ -\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-x\right)\left(\frac{p}{2}-z\right) = \lambda & (2) \\ -\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-x\right)\left(\frac{p}{2}-y\right) = \lambda & (3) \end{cases}$

Si $z = p/2$, alors (1) $\Rightarrow \lambda = 0$ et donc (3) $\Rightarrow \frac{x}{2} = p/2$ ou $\frac{y}{2} = p/2$. Ceci implique que $x + z = p$ ou $z + y = p$, et donc le troisième côté vaut zéro (contradiction)

Par conséquent, $z \neq p/2$ et de même $y \neq p/2$ et $x \neq p/2$.

Ainsi (1) = (2) $\Rightarrow \frac{p}{2} - y = \frac{p}{2} - x \Rightarrow x = y$
(2) = (3) $\Rightarrow \frac{p}{2} - z = \frac{p}{2} - y \Rightarrow z = x$
$\Rightarrow \boxed{x = y = z}$

$\Rightarrow$ le triangle est équilatéral.

multiplication vecteur-scalaire $\in\mathbb{R}^n$ $\in\mathbb{R}$

Exo 8/ a) $f :]a,b[\to \mathbb{R}^n$ est de classe C^2, alors f est différentiable et $df(x)(h) = f'(x)\, h, \forall h \in \mathbb{R}$.

On a que : $\forall h \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]a,b[$

$$d\left(\frac{f(x)}{x-a}\right)(h) = \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x-a}\right)\cdot h = \left[\frac{f'(x)}{x-a} - \frac{f(x)}{(x-a)^2}\right]\cdot h$$

multiplication vecteur-scalaire

Rappel : $f'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)-f(x)}{t} \in \mathbb{R}^n$.

On applique Taylor-Lagrange avec $a<y<x<b$:

$$f(y) = f(x) + f'(x)\cdot(y-x) + \int_0^1 (1-t)\, d^2 f(x+t(y-x))(y-x)(y-x)\,dt$$

$$\Rightarrow \|f(y) - f(x) - f'(x)(y-x)\| \leq \frac{1}{2} \sup_{z\in[y,x]} \|d^2 f(z)\| \cdot |y-x|^2$$

$$\leq \frac{1}{2} K |y-x|^2.$$

En prenant la limite : $y \to a^-$ et en utilisant que f est cont et $f(a)=0$:

$$\|0 - f(x) - f'(x)(a-x)\| \leq \frac{1}{2} K (x-a)^2$$

En divisant par $(x-y)^2$: $\left\| -\frac{f(x)}{(x-a)^2} + \frac{f'(x)}{x-a} \right\| \leq \frac{K}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\left\| d\left(\frac{f(x)}{x-a}\right) \right\| \leq \frac{K}{2}.}$$

b) D'après (a) et le thm des accroissements finis (car g est C^1 sur $]a,b[$) :

$$\forall x,y \in]a,b[: \|g(x) - g(y)\| \leq \sup_{z\in]x,y[} \|dg(z)\|\, \|x-y\| \leq \frac{K}{2} \|x-y\|, \quad (*)$$

Soit (u_n) une suite telle que $u_n \to a$. Alors $(*)$ implique :

$$\|g(u_n) - g(u_m)\| \leq \frac{K}{2} \|u_n - u_m\|$$

et donc $(g(u_n))$ est de Cauchy. Alors $\exists\, \ell = \lim_{n\to\infty} g(u_n)$.

On définit $g(a) = \ell$. Pour montrer que la limite ne dépend pas de la suite (u_n) et que g est cont en a, on prend une autre suite $v_n \to a$. Alors $(*)$ implique que :

$$\|g(u_n) - g(v_n)\| \leq \frac{K}{2} \|u_n - v_n\|$$

et donc $\lim_{n\to\infty} g(v_n) = \ell = g(a)$.

Ainsi ce prolongement est un prolongement continu de g en a, d'après la caractérisation séquentielle de la limite.