Corrigé examen 2017

Exo 1 / Soit J l'intervalle maximal donné par le théorème de Cauchy - Lipschitz de :
$$\begin{cases} y' = h(t) g(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Ainsi, $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tel que $J =]\alpha, \beta[$ et $\alpha < t_0$.

On peut appliquer C-L car $f(t,y) = h(t) g(y)$ est de classe C^1 p/r à y et continue p/r à t. ($f :]a, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Pour conclure que $[t_0, +\infty[\subset J$, il reste à montrer que $\beta = +\infty$.

Par l'absurde, on suppose que $\beta < +\infty$. D'après le thm d'explosion en temps fini : $\lim\limits_{t \to \beta^-} |y(t)| = +\infty$.

Or $y'(t) = h(t) g(y(t)) > 0$, on a donc que y est croissante et
$$\underset{\text{car } h(t) > 0 \text{ et } g(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}}{\downarrow}$$

on en déduit que $\lim\limits_{t \nearrow \beta^-} y(t) = +\infty$.

D'autre part : $y' = h(t) g(y(t)) \Rightarrow \dfrac{y'}{g(y(t))} = h(t) \quad / \displaystyle\int_{t_0}^{t}$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{g(y(s))}\, ds = \int_{t_0}^{t} h(s) \quad , \forall\, t \in]t_0, \beta[.$$

En faisant le changement de variables : $z = y(s) \Rightarrow dz = y'(s)\, ds$

$$\int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{dz}{g(z)} = \int_{t_0}^{t} h(s)\, ds$$

En particulier, en prenant $t \nearrow \beta$: $\displaystyle\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dz}{g(z)} = \int_{t_0}^{\beta} h(s)\, ds$

et donc : $+\infty = \displaystyle\int_{t_0}^{\beta} h(s)\, ds$, ce qui est absurde car h est continue et $\beta < +\infty$.

Par conséquent, $\boxed{\beta = +\infty.}$

Exo 2

a) $\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$ est une équation linéaire à coeff. continues

Du cours, on sait que le thm de Cauchy-Lipschitz s'applique et que l'unique solution est globale, c-à-d : $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Supposons que $y(0) = y(T)$, c-à-d : $y_0 = y(T)$. On pose $\tilde{y}(t) = y(t+T)$. Ainsi $\tilde{y}$ vérifie : $\tilde{y}'(t) = a(t+T)y(t+T) + b(t+T) = a(t)\tilde{y}(t) + b(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{y}'(t) = a(t)\tilde{y}(t) + b(t) \\ \tilde{y}(0) = y(T) = y_0. \end{cases}$$

D'autre la partie unicité de Cauchy-Lipschitz, on en déduit que $y(t) = y(t+T)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, c-à-d y est périodique.

b) $y' - a(t)y = b(t) \quad / \; e^{-\int a(t)}$

$$\Leftrightarrow \left[y e^{-\int_0^t a}\right]' = b e^{-\int a(t)} \quad / \int_0^t$$

$$\Leftrightarrow y(t)e^{-\int_0^t a} - y(0) = \int_0^t b(s) e^{-\int_0^s a} \, ds$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(t) = e^{\int_0^t a(s)ds}\left[y(0) + \int_0^t b(s)A^{-1}(s)\,ds\right]}$$

ou encore : $\boxed{y(t) = A(t)\left[y_0 + \int_0^t b(s)A^{-1}(s)\,ds\right]}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

c) D'après a), si $y(0) = y(T)$ alors y est périodique.

D'après b), $y(0) = y(T) \Leftrightarrow y(0)\left[1 - A(T)\right] = \int_0^T b(s)A^{-1}(s)\,ds$

$$\Leftrightarrow \boxed{y(0) = \frac{\int_0^T b(s)A^{-1}(s)ds}{1 - A(T)}} \quad \text{si } A(T) \neq 1$$

Conclusion : si $A(T) \neq 1$, alors la sol de (1) avec condition initiale

$$y_0 = \frac{\int_0^T b(s)A^{-1}(s)\,ds}{1 - A(T)}$$ est donc T-périodique

Finalement, on sait que la condition $A(T) \neq 1$ équivaut à $e^{\int_0^T a} \neq 1$

$$\Leftrightarrow \boxed{\int_0^T a(s)ds \neq 0}$$

Exo 3] a) $y'' - 3y' - 4y = -8e^{t}\cos(2t)$

Éq homogène : $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \iff \lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = -1.$

Ainsi $\boxed{y_H = a e^{4t} + b e^{-t}, \ a,b \in \mathbb{R} \text{ (sol. homogène)}.}$

Pour la sol homogène, on utilise la formule de coeff. indéterminé :

$$y_p = A e^{t}\cos(2t) + B e^{t}\sin(2t)$$

Alors : $y_p' = (A+2B)e^{t}\cos(2t) + (-2A+B)e^{t}\sin(2t)$

et $y_p'' = (-3A+4B)e^{t}\cos(2t) + (-4A-3B)e^{t}\sin(2t)$

Ainsi ; par identification, on obtient le système :

$$\left.\begin{array}{ll} \boxed{e^{t}\cos(2t)} : & -3A+4B-3(A+2B)-4A = -8 \\ \boxed{e^{t}\sin(2t)} : & -4A-3B-3(-2A+B)-4B = 0 \end{array}\right\}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} -10A - 2B = -8 \\ 2A - 10B = 0 \end{array}\right. \Rightarrow A = 5B \Big\} \Rightarrow 50B + 2B = 8 \Rightarrow B = \frac{8}{56} = \frac{2}{13}$$

En conclusion : $A = \frac{10}{13}$, $B = \frac{2}{13}$ et $\boxed{y_p = \frac{10}{13}e^{t}\cos(2t) + \frac{2}{13}\sin(2t)}$

et la sol. générale est : $\boxed{y = a e^{4t} + b e^{-t} + \frac{10}{13}e^{t}\cos(2t) + \frac{2}{13}\sin(2t)}$, $a,b \in \mathbb{R}$.

b) D'après la formule de variation de la constante, une sol particulière de :

$$y'' - 3y' - 4y = f(t)$$

est $\tilde{y}_p = -y_1 \int \frac{y_2 f}{W} + y_2 \int \frac{y_1 f}{W}$, où $y_1 = e^{4t}$, $y_2 = e^{-t}$,

et $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{4t} & e^{-t} \\ 4e^{4t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = -e^{3t} - 4e^{3t} = -5e^{3t}.$

Ainsi $\tilde{y}_p = -e^{4t}\int \frac{e^{-t} f(t)\,dt}{-5e^{3t}} + e^{-t}\int \frac{e^{4t} f(t)\,dt}{-5e^{3t}}$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{y}_p = \frac{e^{4t}}{5}\int e^{-4t} f(t)\,dt - \frac{e^{-t}}{5}\int e^{t} f(t)\,dt}$$

La solution générale de l'éq : $y'' - 3y' - 4y = -8e^{t}\cos(2t) + f(t)$ et donc (par linéarité) :

$$\boxed{y = a e^{4t} + b e^{-t} + \frac{10}{13}e^{t}\cos(2t) + \frac{2}{13}\sin(2t) + \frac{e^{4t}}{5}\int e^{-4t} f(t)\,dt - \frac{e^{-t}}{5}\int e^{t} f(t)\,dt}$$

$a,b \in \mathbb{R}$.

Exo 4) a) On pose $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $z_1 = y$, $z_2 = y'$. Ainsi

$$Z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ -p z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p & 0 \end{pmatrix} Z. \text{ et}$$

donc $\boxed{A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix}}$

b) i) On pose $H(t) = G(t+T)\, G^{-1}(T)$.

Or $\begin{cases} G'(t) = A(t)G(t) \\ G(0) = I \end{cases}$, on a que : $H'(t) = G'(t+T)\, G^{-1}(T)$

$$= \underbrace{A(t+T)}_{=A(t)} \underbrace{G(t+T)\, G^{-1}(T)}_{=H(t)}$$

$\Rightarrow \begin{cases} H'(t) = A(t)H(t) \\ H(0) = G(T)G^{-1}(T) = I \end{cases} \xRightarrow[\text{D'après Cauchy-Lipschitz}]{} \boxed{H(t) = G(t),\ \forall t \in \mathbb{R}}$

Ce qui équivaut à : $\boxed{G(t+T) = G(t)\, G(T)}$

ii) D'après la formule de Liouville :

$$W(t) := \det(G(t)) = W(0)\, e^{\int_0^t \operatorname{tr}(A(s))ds} \underset{\operatorname{tr}(A)=0}{=} W(0)e^0 = W(0) = \det(G(0)) = 1$$

$\Rightarrow \det(G(t)) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$

En particulier $\boxed{\det(G(T)) = 1}$

c) Si $Z(t)$ est une solution, alors (d'après le cours) :

$$Z(t) = G(t)\, Z_0, \text{ où } Z_0 = Z(0),\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, si $t = t_0 + mT$, alors : $Z(t) = Z(t_0 + mT)$

$$= G(t_0 + mT) Z_0$$
$$= G(t_0)\, G(mT)\, Z_0.$$

D'après (i) : $G(2T) = G(T+T) = G^2(T)$.

Par récurrence, on en déduit : $G(mT) = G^m(T)$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

Par conséquent : $\boxed{Z(t) = G(t_0)\, C^m Z_0, \text{ où } C = G(T)}$

d) i) $p(\lambda) := \det(C - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} c_{11}-\lambda & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - c_{11})(\lambda - c_{22}) - c_{12}c_{21}$

$$= \lambda^2 - (c_{11}+c_{22})\lambda \underbrace{- c_{12}c_{21} + c_{11}c_{22}}_{\det C = 1}$$

$\Rightarrow \boxed{p(\lambda) = \lambda^2 - (c_{11}+c_{22})\lambda + 1}$

ou encore $p(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(C)\lambda + 1$

ii) D'après ①, λ_1, λ_2 sont données par : $\dfrac{\mathrm{tr}(C) \pm \sqrt{\mathrm{tr}^2(C) - 4}}{2}$. (✱)

Si $\mathrm{tr}(C)^2 \neq 4$, alors $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et C est donc diagonalisable.

iii) Si $\mathrm{tr}(C)^2 > 4$, la formule (✱) implique que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Or $\lambda_1 \lambda_2 = \det C = 1$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a donc : $|\lambda_1| > 1$ ou $|\lambda_2| > 1$

Ainsi $C^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \\ & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$. Sans perte de généralité, on suppose $|\lambda_1| > 1$.

D'après ©: $\underset{t = t_0 + nT}{}$ $Z(t) = G(t_0)\, P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \\ & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$, où $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = Z(0)$.

Si on prend une C. I. $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ tel que $P^{-1}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left(\Leftrightarrow \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

on a donc $Z(t) = G(t_0) P \begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1^n \vec{v}$, où $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ est la première colonne de $G(t_0)P$.

Ainsi $\| Z(t_0 + nT) \| = |\lambda_1|^n \|\vec{v}\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ car $|\lambda_1| > 1$.

iv) Si $\mathrm{tr}(C)^2 < 4$, alors la formule (✱) implique que λ_1 et λ_2 sont complexes conjugées :

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \text{où}$$

$\alpha = \dfrac{\mathrm{tr}(C)}{2}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{4 - \mathrm{tr}^2(C)}}{2} \in \mathbb{R}$.

Ainsi $|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \dfrac{\mathrm{tr}(C)^2 + 4 - \mathrm{tr}^2(C)}{4} = 1$.

Par conséquent, la matrice : $\begin{pmatrix} \lambda_1^n & \\ & \lambda_2^n \end{pmatrix}$ est borné $\forall n \in \mathbb{Z}$

et donc $Z(t) = Z(t_0 + nT) = G(t_0)\, P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \\ & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$

est borné, $\forall n \in \mathbb{Z}$ (c-à-d, $\forall t \in \mathbb{R}$) et $\forall \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Exo 5/ Fait en TD : il y a 3 points critiques a, b et $\frac{a+b}{2}$;
a et b sont deux minima globaux et $\frac{a+b}{2}$ est un point selle.

Exo 6/ Voir corrigé du DS 1

Exo 7/ Voir TD.

Exo 8/ Voir corrigé du DS2 - 2014/2015