Corrigé

Exo 1

a) Montrons que f est 1-Lipchitzienne, c-à-d :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \quad |f(x)-f(y)| \leq |x-y|.$$

Soit $x,y \in \mathbb{R}$. Sans perte de généralité, on suppose que $x \leq y$ (par symétrie).
On a 6 cas :

(1) $x \leq y \leq 0 \Rightarrow |f(x)-f(y)| = 0 \leq y-x = |y-x| = |x-y|$.

(2) $x \leq 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| = |0-y| = y \leq y-x = |x-y|$

(3) $x \leq 0$ et $1 \leq y \Rightarrow |f(x)-f(y)| = |0-1| = 1 \leq y \leq y-x = |x-y|$

(4) $0 \leq x \leq y \leq 1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| = |x-y|$

(5) $0 \leq x \leq 1 \leq y \Rightarrow |f(x)-f(y)| = |x-1| = 1-x \leq y-x = |y-x| = |x-y|$

(6) $1 \leq x \leq y \Rightarrow |f(x)-f(y)| = |1-1| = 0 \leq y-x = |y-x| = |x-y|$.

<u>Conclusion</u> : $\forall x,y \in \mathbb{R}, \ |f(x)-f(y)| \leq |x-y|$.

D'après un théorème de cours. (un corollaire de Cauchy-Lipschitz)
ceci implique l'existence et unicité d'une solution <u>globale</u>
de l'éq $y' = f(y)$ avec condition initiale $y(t_0) = y_0$, pour tout $(t_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$.

<u>Une autre méthode</u> :

C'est immédiat que f est de classe C^1 sur $U =]-\infty, 0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$
et donc f est <u>localement</u> lipchitzienne sur U. D'après le
thm de Cauchy-Lipschitz, ceci implique l'existence et unicité d'une
solution <u>locale</u> pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in U$.

Montrons que f est localement lip. en 0 :

si $x \in]-\frac{1}{2}, 0[$, alors $|f(x) - f(0)| = 0 \leq |x| = |x-0|$

si $x \in]0, \frac{1}{2}[$, alors $|f(x) - f(0)| = |x| = |x-0|$.

De même, on a que f est loc. lip. en 1. Par conséquent f est
localement lip sur $\mathbb{R}$ et donc on a l'existence et unicité
<u>locale</u> pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

De plus f est bornée : $|f(x)| \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$. D'après un théorème
de cours, ceci implique que la solution est <u>globale</u>.

On veut résoudre : $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$, $y_0 \in]0,1[$.

~~On~~ D'après ①, or la sol est de classe C^1,

$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ dans un voisinage de $t_0 = 0$

La solution de cette éq est $\boxed{y(t) = y_0 e^t}$.

Pour $t^* > 0$ tel que $y(t^*) = 1 \iff y_0 e^{t^*} = 1 \iff t^* = \ln\left(\frac{1}{y_0}\right)$.

on a que : $y' = 1$, $\forall t \geq t^*$ (car y est croissante : $y' \geq 0$)

Alors : $y(t) = t + c$, $\forall t \geq t^*$. Or $y(t^*) = 1 = t^* + c \Rightarrow c = 1 - t^*$

$\Rightarrow \boxed{y(t) = 1 - t^* + t \quad t \geq t^*}$

De même, ~~par~~ on calcule : $y(t_*) = 0 \iff y_0 e^{t_*} = 0$: cette éq n'admet pas de solution.

Conclusion : $y(t) = \begin{cases} 1 - t^* + t , & t \geq \ln(1/y_0) \\ y_0 e^t , & t < \ln(1/y_0) \end{cases}$ est la solution cherchée.

ou encore :

$$\boxed{y(t) = \begin{cases} y_0 e^t , & t < \ln\left(\frac{1}{y_0}\right) \\ t + 1 - \ln\left(\frac{1}{y_0}\right) , & t \geq \ln\left(\frac{1}{y_0}\right) \end{cases}}$$

(Remarque : $t^* = \ln\left(\frac{1}{y_0}\right) > 0$ car $y_0 \in]0,1[$)

Exo 2 | a) i) L'éq $\mu(y)N(x,y)\cdot y' + \mu(y)M(x,y) = 0$

est exacte ssi $\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(y)N(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y)M(x,y)\right)$

$$\Leftrightarrow \mu(y)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = \mu(y)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) + \mu'(y)M(x,y)$$

$$\Leftrightarrow \mu'(y) = \mu(y)\underbrace{\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right]}_{M}$$

$$\Leftrightarrow \mu'(y) = \mu(y)(-F(y))$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mu'(y) + F(y)\mu(y) = 0}$$

ii) $\mu'(t) + F(t)\mu(t) = 0 \;\Big|\; e^{-\int_0^t F(\tilde{t})d\tilde{t}} = e$

$$\Leftrightarrow \left(\mu e^{-\int_0^t F}\right)' = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mu(t) = C\, e^{-\int_0^t F(s)ds}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Si $\mu(0) = 1$, alors $C = 1$ et $\boxed{\mu(t) = e^{-\int_0^t F(s)ds}}$

b) i) $(2x^3y + x^3y^4)y' + 3x^2y^2 = 0$

Ici $N = 2x^3y + x^3y^4$ et $M = 3x^2y^2$ et

$$F = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \frac{\cancel{6x^2y} - \cancel{6x^2y} - 3x^2y^4}{3x^2y^2} = -y^2$$

Ainsi $F(y) = -y^2$ ne dépend de x et F est continue (les hypothèses sont vérifiées)

ii) D'après a)-ii), on a que $\mu(t) = C\, e^{+\int_0^t s^2 ds} = C\, e^{t^3/3}$

Or $\mu(0) = 1$, on a donc : $+1 = C e^0 \Rightarrow C = +1$

$$\Rightarrow \boxed{\mu(t) = +e^{+t^3/3}}$$

iii) D'après a)-i) l'équation : $\mu \cdot N y' + \mu M = 0$ est exacte, c-à-d :

$$\underbrace{e^{+y^3/3}(2x^3y + x^3y^4)}_{\tilde{N}}\, y' + \underbrace{e^{+y^3/3}3x^2y^2}_{\tilde{M}} = 0$$

Or l'équation est exacte, on a donc l'existence de $\tilde{F}$ (intégrale première) tel que :

$$\tilde{N} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} \quad \text{et} \quad \underbrace{\tilde{M} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}}$$

$$\Rightarrow \qquad 3e^{y^3/3} x^2 y^2 = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\tilde{F} = e^{y^3/3} x^3 y^2 + h(y)}$$

$$\Rightarrow e^{y^3/3}(2x^3y + x^3y^4) = e^{y^3/3} \cdot y^2 x^3 y^2 + e^{y^3/3} x^3 \cdot 2y + h'(y)$$

$$\Rightarrow \qquad 0 = h'(y)$$

$$\Rightarrow \boxed{h(y) = c}, \; c \in \mathbb{R}$$

Par conséquent : $\boxed{e^{y^3/3} x^3 y^2 = k \;, k \in \mathbb{R}}$

Exo 3 / On a : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Valeurs propres : $|A - \lambda I| = 0 \iff \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \boxed{\lambda = -2 \vee \lambda = 1}$

Vect. propres :

Si $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff a - 2b = 0$.

on peut prendre $b = 1$ et $a = 2$,

c-à-d $\boxed{\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Si $\lambda = -2$: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On peut prendre $\boxed{\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

Par conséquent, la sol. générale est :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Remarques : ① S'il y a une condition initiale $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, alors on peut déterminer α et β :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{3}(x_0 + y_0) \\ \beta = \frac{x_0 - 2y_0}{3} \end{cases}$$

② On peut aussi calculer la matrice exponentielle :

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{t} & \\ & e^{-2t} \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{t} + e^{-2t} & 2e^{t} - 2e^{-2t} \\ e^{t} - e^{-2t} & e^{t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

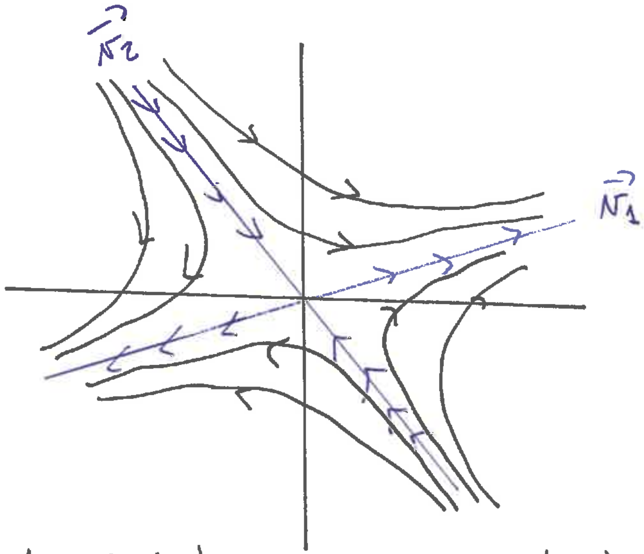
et la sol. générale est donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

③ Par unicité de sol on a que : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et donc :

$$e^{tA} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}(x_0 + y_0) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + \left(\frac{x_0 - 2y_0}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t},$$

d'où on peut retrouver la matrice e^{tA}.

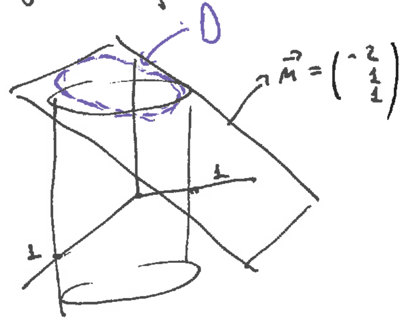
b)



Or $\lambda_1 = 1 < 0 < \lambda_2 = -2$, il s'agit d'un point col ou selle (toujours instable)

Exo4 | a) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 2$ et $x^2 + y^2 = 1\}$

L'intersection correspond à une ellipse.
En particulier D est un ensemble est fermé et borné, donc compact.
Or f est continue, on a donc que f atteint ses bornes sur D.



b) D'après (a), f atteint ses bornes sur D.
Soit $\bar{x} \in D$ un maximum local sur D. D'après le thm de multiplicateurs de Lagrange, on a :

$$\nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{x})$$

si $\nabla g_1(\bar{x})$ et $\nabla g_2(\bar{x})$ sont libres. On a les mêmes éqs pour $\underline{x}$.

~~Vérifions que ∇g_1~~ (Ici $g_1(x) = 2x - y - z - 2$, $g_2(x) = x^2 + y^2 - 1$)

Calculons :

$$\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi : $\nabla g_1 = \alpha \nabla g_2 \iff \begin{array}{l} 2 = 2\alpha x \\ -1 = 2\alpha y \\ -1 = 0 \end{array}$ absurde ! Conclusion $\nabla g_1(x)$ et $\nabla g_2(x)$ sont libres $\forall x \in \mathbb{R}^3$.

Par conséquent, on a l'existence de $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que les bornes vérifient :

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y,z)$$

$$\iff \begin{array}{rcl} 0 &=& 2\lambda_1 + 2\lambda_2 x \\ 4 &=& -\lambda_1 + 2\lambda_2 y \\ -2 &=& -\lambda_1 + 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_2 x = -4 \\ 2\lambda_2 y = 4 + 2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_2 \neq 0 \text{ et } x = -2/\lambda_2 \text{ et } y = \frac{3}{\lambda_2}$$

Or $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{4}{\lambda_2^2} + \frac{9}{\lambda_2^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = \pm\sqrt{13}}$

Or $2x - y - z = 2 \Rightarrow z = 2x - y - 2$.

Cas $\lambda_2 = +\sqrt{13}$ $\Rightarrow$ $x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, $y = \frac{3}{\sqrt{13}}$ $\Rightarrow$ $z = 2x - y - 2$

$$= \frac{-4}{\sqrt{13}} - \frac{3}{\sqrt{13}} - 2$$

$$\Rightarrow z = \frac{-7}{\sqrt{13}} - 2$$

Cas $\lambda_2 = -\sqrt{13}$ $\Rightarrow$ $x = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $y = -\frac{3}{\sqrt{13}}$ $\Rightarrow$ $z = 2x - y - 2$

$$= \frac{4}{\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{13}} - 2 = \frac{7}{\sqrt{13}} - 2.$$

Ainsi, on obtient deux point :

$$\boxed{A = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -2 - \frac{7}{\sqrt{13}}\right) \text{ et } B = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, -2 + \frac{7}{\sqrt{13}}\right)}$$

Or f n'est pas constante, l'un est le max et l'autre le min.

Finalement :

$$f(A) = 4\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) + 2\left(2 + \frac{7}{\sqrt{13}}\right) = \frac{26}{\sqrt{13}} + 4$$

$$f(B) = 4\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right) - 2\left(-2 + \frac{7}{\sqrt{13}}\right) = -\frac{26}{\sqrt{13}} + 4$$

et donc $\begin{cases} A \text{ est le maximum global de } f \text{ sur } D \\ B \text{ est le minimum global de } f \text{ sur } D \end{cases}$.

Exo 5 | a) (Une autre méthode)

Par hypothèse, $f(0)=0$ (0 est un point fixe)

Si 0 n'est pas un point fixe isolé, alors $\exists x_m \in \mathbb{R}^n$, $x_m \to 0$ tel que $f(x_m) - x_m = 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x_m) - x_m}{\|x_m\|} = 0. \quad (*)$$

Or f est différentiable en 0 : $f(h) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f(0)} + df(0)(h) + o(\|h\|)$.

Alors $(*) \Rightarrow$: $\frac{df(0)(x_m)}{\|x_m\|} + \frac{o(\|x_m\|)}{\|x_m\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|} = 0 \quad (**)$

On pose $v_m = \frac{x_m}{\|x_m\|}$. Alors $\|v_m\| = 1$, c-à-d c'est une suite borné de $\mathbb{R}^n$, alors $\exists v_{m_k} \longrightarrow v$, $v \in \mathbb{R}^m$ et $\|v\| = 1$.

Alors, on passe à la limite $m_k \to +\infty$ dans $(**)$:

$$df(0)v + 0 - v = 0$$

$$\Rightarrow df(0)\, v = v$$

Or $v \neq 0$, ceci implique de $\lambda = 1$ est une valeur propre, ce qui est une contradiction.

b) $F_\lambda(x) = f(x) + \lambda g(x)$, x est un point fixe ssi $F_\lambda(x) = x$

On pose $\tilde{F}(\lambda, x) = f(x) + \lambda g(x) - x$. Ainsi $F_\lambda(x) = x \Leftrightarrow \tilde{F}(\lambda, x) = 0$.

C'est immédiat que $\tilde{F}$ est de classe C^1, $\tilde{F}(0,0) = 0$

$$d_2\tilde{F}(\lambda, x)(h) = df(x)(h) + \lambda g(x)(h) - h$$

$$\Rightarrow d_2\tilde{F}(0,0)(h) = df(0)(h) - h$$
$$= (df(0) - Id)\, h$$

Ainsi, $d_2\tilde{F}(0,0) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ssi $\det(J_f(0) - Id) \neq 0$

ssi $\lambda = 1$ n'est pas valeur propre de $J_f(0)$ (hypothèse)

Par conséquent, $d_2\tilde{F}(0,0) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et le thm des fonctions implicites implique donc l'existence de $\varepsilon > 0$, V voisinage ouvert de 0 et $\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow V$ tels que

$\tilde{F}(\lambda, \varphi(\lambda)) = 0$, $\forall \lambda \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ et que $\varphi(\lambda)$ est l'unique solution dans V. Or $\tilde{F}(\lambda, x) = 0 \Leftrightarrow F_\lambda(x) = x$, $\varphi(\lambda)$ est le point fixe cherché (et l'unique dans V).

Exo5 | a) On pose $F(x) = f(x) - x$, ainsi $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe C^1.

De plus $dF(x) = df(x) - Id$ et $dF(0) = df(0) - Id$.

Or 1 n'est pas valeur propre de $df(0)$, on a donc que $dF(0)$ est injective et donc $dF(0) \in Isom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (car $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie). On a aussi : $F(0) = f(0) - 0 = 0$. point fixe.

D'après le théorème d'inversion local, $\exists\, U, V \subset \mathbb{R}^n$, voisinage de 0 tels que : $F : U \to V$ est une C^1-difféomorphisme.

En particulier F est bijective de U dans V. et donc F s'annule seulement en 0. Autrement dit :

$$\forall x \in U \setminus \{0\},\ F(x) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in U \setminus \{0\},\ f(x) \neq x.$$

Alors 0 est le seul point fixe dans un voisinage de l'origine et il est donc isolé.

Exo 6

$$f(x,y) = x\ln(1+y) + \sin(x+y). \qquad \Rightarrow f\in C^\infty \text{ sur son domaine}$$

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \ln(1+y) + \cos(x+y)$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{1+y} + \cos(x+y)$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(x+y)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{1}{1+y} - \sin(x+y)$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\dfrac{x}{(1+y)^2} - \sin(x+y)$

~~Attention~~

D'après le thm de Taylor :

$$f(x,y) = \overbrace{f(0,0) + \nabla f(0,0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^T H_f(0,0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}^{P_2} + R(x,y)$$

$$= 0 + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}} + R$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2(x,y) = x + y + xy}$$

b) D'après le thm de Taylor-Lagrange, $\exists\, z_0 \in \mathbb{R}^2$, $\|z_0\| \leq \|(x,y)\|$, tel que :

$$R(x,y) = \frac{1}{3!}\, d^3 f(z_0)\left((x,y)^3\right)$$

$$= \frac{1}{3!}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} h_i h_j h_k \frac{\partial^3 f(z_0)}{\partial x_i\partial x_j\partial_k}, \quad h=(x,y)$$

$$= \frac{1}{3!}\Big[x^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3x^2y\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} + 3xy^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} + y^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\Big]$$

(1,1,1) — (1,1,2 ; 1,2,1 ; 2,1,1) — (1 2 2 ; 2 1 2 ; 2 1 1) — (1,1,1)

$i = 1\ 2$
$j = 1\ 2$
$k = 1\ 2$
i, j, k : (1,2) (1,2) (1,2)

$$\Rightarrow R(x,y) = \frac{1}{6}\Big(x^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(z_0) + 3x^2y\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} + 3xy^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} + y^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(z_0)\Big]$$

On calcule : $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -\cos(x+y) \Rightarrow \left|\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(z_0)\right| \leq 1$

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} = -\cos(x+y)$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} = -\dfrac{1}{(1+y)^2} - \cos(x+y)$

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3} = +\dfrac{2x}{(1+y)^3} - \cos(x+y)$

Or $x^2+y^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow |x| \leq \frac{1}{2}$ et $|y| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\dfrac{\partial^3 f(z_0)}{\partial x^2\partial y}\right| \leq 1$, $\left|\dfrac{\partial^3 f(z_0)}{\partial x\partial y^2}\right| \leq \dfrac{1}{(\frac{1}{2})^2} + 1 = 5$

$$\left|\frac{\partial^3 f(z_0)}{\partial y^3}\right| \leq \frac{2\cdot 1/2}{(1/2)^3} + 1 = 9$$

$$\Rightarrow |R(x,y)| \leq \frac{1}{6}\Big[|x|^3 + 3x^2|y|\cdot 1 + 3|x|y^2\cdot 5 + |y|^3\cdot 9\Big] \leq \frac{9}{6}\big[|x|+|y|\big]^3$$

$$= \frac{3}{2}\big[|x|+|y|\big]^3$$

Pb 1

a) On a le système $\begin{cases} Z' = A(t) Z \\ Z(0) = Z_0 \end{cases}$, où $Z(t) = (x(t), y(t), z(t))$
$Z_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

et $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & c(t) & 0 \\ -c(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix}$. Or la matrice A est continue, d'après un théorème du cours, on a l'existence et unicité d'une sol. globale.

b) On pose $\eta(t) = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)$.

Alors : $\eta'(t) = 2xx' + 2yy' + 2zz'$
$= 2x \cdot \cancel{(cy)} + 2y(-\cancel{cx} + \cancel{\tau z}) + 2z(-\cancel{\tau y})$
$= 0 \quad , \forall t \in \mathbb{R}$.

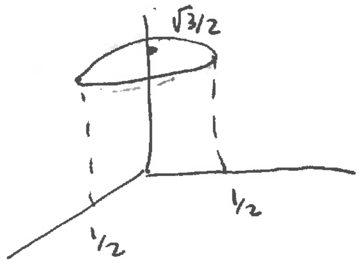
et donc η est constante : $\eta(t) = \eta(0)$, $\forall t \in \mathbb{R}$
$\eta(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \boxed{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 1 \;, \forall t \in \mathbb{R}}$

c) $c(t) = 8t^3$ et $\tau(t) = 0$

On a que $z' = -\tau(t) y = 0 \Rightarrow z$ est cte : $\boxed{z(t) = z_0, \forall t \in \mathbb{R}}$

D'après (b), on a que la sol vérifie : $x^2(t) + y^2(t) + z_0^2 = 1$
car $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ $\Rightarrow$ $x^2(t) + y^2(t) = 1 - z_0^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ la solution est contenue dans $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \; ; z = \frac{\sqrt{3}}{2}\}$
c-à-d, une cercle de centre $(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et rayon $\frac{1}{2}$.



d) Soit $\eta = \frac{y}{1+x}$

i) $\eta^2 = \frac{y^2}{(1+x)^2} \Rightarrow \eta^2+1 = \frac{y^2+(1+x)^2}{(1+x)^2} = \frac{y^2+1+2x+x^2}{(1+x)^2}$

$= \frac{2+2x}{(1+x)^2} = \boxed{\frac{2}{1+x}}$

d'après ⓑ
$x^2+y^2=1$
car $\tau(t)=0$

Alors : $(1+x)(\eta^2+1) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(\eta^2+1) = 2-\eta^2-1 = 1-\eta^2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}}$

Ainsi : $\eta = \frac{y}{1+x} \Rightarrow y = (1+x)\eta = \left(1+\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}\right)\eta = \boxed{\frac{2\eta}{1+\eta^2}}$

<u>Équation</u> : $\eta' = \left(\frac{y}{1+x}\right)' = \frac{y'}{(1+x)} - \frac{y}{(1+x)^2}x' = \frac{-cx}{1+x} - \frac{y\cdot cy}{(1+x)^2} = \frac{-cx^2-cx-cy^2}{(1+x)^2}$

Serret-Frenet

$= -\frac{c(1+x)}{(1+x)^2}$

$x^2+y^2=1$

$= \frac{-c}{1+x}$

$= -c\,\frac{\eta^2+1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\eta' = -\frac{c}{2}(\eta^2+1)}$

Or $c = 8t^3 \Rightarrow \boxed{\eta' = -4t^3(\eta^2+1)}$

ii) $\frac{\eta'}{\eta^2+1} = -4t^3 \Big/ \int_0^t \Rightarrow \arctan(\eta(t)) - \arctan(\eta(0)) = -t^4$

$\Rightarrow \eta(t) = \tan\left(\arctan(\eta(0)) - t^4\right)$

Si $\eta(0)=0 \Rightarrow \boxed{\eta(t) = -\tan(t^4)}$

Si $\eta(0)=1 \Rightarrow \boxed{\eta(t) = \tan\left(\frac{\pi}{4}-t^4\right)} \boxed{= -\tan\left(t^4-\frac{\pi}{4}\right)}$

<u>Intervalle de définition</u> :

• de $\eta(t) = -\tan(t^4)$: il faut que $t^4 \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, c-à-d $|t| < \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/4}$

$\Leftrightarrow \boxed{t \in \left]-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/4}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/4}\right[}$

• de $\eta(t) = -\tan\left(t^4-\frac{\pi}{4}\right)$: il faut que $-\frac{\pi}{2} < t^4-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < t^4 < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow t^4 < \frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow |t| < \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{1/4}$.

Ainsi, l'intervalle est : $\boxed{\left]-\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{1/4}, \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{1/4}\right[}$

iii) • Si $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, on a $\eta_0 = 0$ et donc $\eta(t) = -\tan(t^4)$ et $z(t) = 0$.

c-à-d : $x = \dfrac{1-\eta^2}{1+\eta^2} = \dfrac{1-\tan^2(t^4)}{1+\tan^2(t^4)} = \cos(2t^4)$

$y = \dfrac{2\eta}{1+\eta^2} = -\dfrac{2\tan(t^4)}{1+\tan^2(t^4)} = -\sin(2t^4)$.

La sol est donc $(\cos(2t^4), -\sin(2t^4), 0)$

• Si $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $z_0 = 0$, on a $\eta_0 = 1$ et donc $\eta(t) = -\tan\left(t^4 - \frac{\pi}{4}\right)$ et $z(t) = 0$

$\Rightarrow$ $x = \dfrac{1-\tan^2(t^4-\pi/4)}{1+\tan^2(t^4-\pi/4)} = \cos\left(2t^4 - \frac{\pi}{2}\right) = +\sin(2t^4)$

$y = \dfrac{-2\tan(t^4-\pi/4)}{1+\tan^2(t^4-\pi/4)} = -\sin(2t^4 - \pi/2) = +\cos(2t^4)$

• Si $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ et $z_0 = 1$, on a que $z(t) = 1$, $\forall t$.

Ainsi $\boxed{G(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t^4) & \sin(2t^4) & 0 \\ -\sin(2t^4) & \cos(2t^4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Rmq : On peut vérifier que $G(t)$ vérifie $G'(t) = A(t)\,G(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Pb 2

a) On a que $f(x) = l_a(x) \cdot e^{-N(x)}$, où $l_a : H \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle a, x\rangle$

et $N(x) = \|x\|^2$, $N : H \longrightarrow \mathbb{R}$. Ainsi l_a est linéaire cont (et donc C^∞) et N est C^∞ par résultat de cours. Alors f est de classe C^∞ (produit et composée de C^∞).

b) De plus : $df(x)(h) = \underbrace{dl_a(x)(h)} \cdot e^{-N(x)} + l_a(x) \cdot \underbrace{d\left[e^{N(x)}\right](h)}_{\text{composée}}$

$$= \langle h, a\rangle e^{-\|x\|^2} + \langle x, a\rangle \left(-e^{N(x)} \cdot \underbrace{(dN(x)(h))}_{2\langle x,h\rangle}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{df(x)(h) = \langle h, a\rangle e^{-\|x\|^2} - 2\langle x, a\rangle\langle x, h\rangle e^{-\|x\|^2}}$$

$$\cancel{= \left[\langle h, a\rangle - 2\langle x\langle x,h\rangle, a\rangle\right] e^{-\|x\|^2}}$$

$$\cancel{= \langle h - 2x\langle x,h\rangle, a\rangle e^{\|x\|^2}}$$

ou encore : $df(x)(h) = (\langle a, h\rangle - 2\langle x\langle x,a\rangle, h\rangle) e^{-\|x\|^2}$

$$= \langle a - 2\langle x\langle x,a\rangle\rangle, h\rangle e^{-\|x\|^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{df(x)(h) = \langle (a - 2\langle x,a\rangle x) e^{-\|x\|^2}, h\rangle}$$

Ainsi, $\boxed{\Phi_x = (a - 2\langle x,a\rangle x) e^{-\|x\|^2}}$

c) Or f est C^∞, il suffit de calculer, pour $h, k \in H$:

$$\frac{d}{ds}\left(df(x+sk)(h)\right)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\left\langle \left(a - 2\underbrace{\langle x+sk, a\rangle}_{\langle x,a\rangle + s\langle k,a\rangle}(x+sk)\right) e^{-\|x+sk\|^2}, h\right\rangle\Big|_{s=0}$$

$$= \left\langle \frac{d}{ds}\left(-2\langle x+sk, a\rangle (x+sk)\right)\Big|_{s=0} \cdot e^{-\|x\|^2} + (a - 2\langle x,a\rangle x)\frac{d}{ds} e^{-\|x+sk\|^2}\Big|_{s=0}, h\right\rangle$$

$$= \left\langle \left(-2\langle k,a\rangle x - 2\langle x,a\rangle k\right) e^{-\|x\|^2} + (a - 2\langle x,a\rangle x) e^{-\|x\|^2} \cdot (-2\langle x, k\rangle), h\right\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{d^2f(x)(k,h) = \left\langle -2e^{-\|x\|^2}\left(a\langle x,k\rangle - 2\langle x,a\rangle\langle x,k\rangle x + \langle k,a\rangle x + \langle x,a\rangle k\right), h\right\rangle}$$

où encore :

$$\boxed{d^2f(x)(k,h) = -2e^{-\|x\|^2}\left(\langle x,k\rangle\langle a,h\rangle - 2\langle x,a\rangle\langle x,k\rangle\langle x,h\rangle + \langle a,k\rangle\langle x,h\rangle + \langle a,x\rangle\langle k,h\rangle\right)}$$

d) Si $x = \alpha a$, $\|a\|^2 = N$, alors $\|x\|^2 = \alpha^2 N$ et donc :

$$d^2 f(\alpha a)(h,h) = -2 e^{-\alpha^2 N} \left(\alpha <a,h>^2 - 2\alpha^3 N <a,h>^2 + \alpha <a,h>^2 + \alpha N \|h\|^2 \right)$$

$$\boxed{d^2 f(\alpha a)(h,h) = -2\alpha e^{-\alpha^2 N} \left(2(1-2\alpha^2 N) <a,h>^2 + N\|h\|^2 \right)}$$

Désormais : $H = \mathbb{R}^N$ et $a \in \mathbb{R}^N$, avec $N = 2016$.

e) $\Phi_x = \nabla f(x)$ (résultat de cours)

) $\nabla f(x) = 0 \iff \Phi_x = 0 \iff a = 2<x,a>x$

$$\iff \begin{cases} 1 = 2\beta x_1 \\ 1 = 2\beta x_2 \\ 1 = \\ 1 = 2\beta x_N \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} (*) \\ N \text{ fois, où } \beta = <x,a> \\ (\text{ceci implique } \beta \neq 0.) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_N = \frac{1}{2\beta}$$

En remplaçant :

$$\beta = <x,a> = \sum_{i=1}^N x_i = N \cdot \frac{1}{2\beta} \Rightarrow \beta^2 = \frac{N}{2} \Rightarrow \boxed{\beta = \pm\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2}}}$$

Ainsi $x_1 = \dots x_N = \pm \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{N}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2N}}$.

Les possible points critiques sont : $\boxed{\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2N}}(1,1 \dots 1) \text{ et } \underline{x} = -\frac{1}{\sqrt{2N}}(1, \dots 1)}$

Or $<\bar{x},a> = \frac{N}{\sqrt{2N}} = \sqrt{\frac{N}{2}}$, on a donc : $2<\bar{x},a>\bar{x}_i = 2\sqrt{\frac{N}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2N}} = 1$,

c-à-d, $\bar{x}$ est une sol du système (*).

De même, $\underline{x}$ est un sol de (*). Ainsi $\bar{x}$ et $\underline{x}$ sont les deux points critiques.

g) On voit que $\bar{x} = \bar{\alpha} a$ et $\underline{x} = \underline{\alpha} a$, avec $\bar{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2N}}$ et $\underline{\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{2N}}$.

D'après (d) :

$$d^2 f(\bar{x})(h,h) = -\frac{2}{\sqrt{2N}} e^{-\bar{\alpha}^2 N} \left(2(1-\bar{\alpha}^2 N)\left(\sum_{i=1}^N h_i\right)^2 + N\|h\|^2 \right)$$

$$\bar{\alpha}^2 N = \frac{1}{2N} \cdot N = \frac{1}{2} \qquad = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} e^{-\frac{1}{2}} \left(\left(\sum_{i=1}^N h_i\right)^2 + N\|h\|^2 \right)$$

$$\Rightarrow d^2 f(\bar{x})(h,h) \leq -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} e^{-1/2} \cdot N\|h\|^2$$

$\Rightarrow$ la hessienne est définie négative et $\bar{x}$ est donc un maximum local strict.

De même, $d^2 f(\underline{x})(h,h) = +\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} e^{-\frac{1}{2}} \left(\left(\sum_{i=1}^{N} h_i\right)^2 + N \|h\|^2 \right) \geqslant \sqrt{2N}\, e^{-1/2} \|h\|^2$

$\Rightarrow$ la hessienne est déf. positive et $\underline{x}$ est donc un minimum local strict.

Or $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = \lim_{\|x\| \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) e^{-\|x\|^2} = 0$, on en déduit

que $\bar{x}$ et $\underline{x}$ sont respectivement un maximum et minimum global