Corrigé DS1

a) On pose $y_p = t$. Alors : $y_p' = 1$ et $t^2 + \frac{y_p}{t} - y_p^2 = t^2 + 1 - t^2 = 1$.
et donc y_p est une sol. particulier.
Il s'agit d'équation de Riccati, on pose donc : $y = t + \frac{1}{z}$

$$\Rightarrow y' = 1 - \frac{z'}{z^2} \Rightarrow 1 - \frac{z'}{z^2} = t^2 + \left(t + \frac{1}{z}\right)\frac{1}{t} - \left(t + \frac{1}{z}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cancel{1} - \frac{z'}{z^2} = \cancel{1} + \frac{1}{tz} - \frac{2t}{z} - \frac{1}{z^2} \quad \Big/ \cdot z^2$$

$$\Rightarrow -z' = \frac{z}{t} - 2tz - 1$$

$$\Leftrightarrow z' + z\left(-2t + \frac{1}{t}\right) = +1 \quad \Big/ \cdot e^{-t^2 + \ln|t|}$$

$$\Leftrightarrow \left(z\, e^{-t^2 + \ln|t|}\right)' = e^{-t^2 + \ln|t|}$$

Pour $t > 0$:
$$\Rightarrow \left(z\, e^{-t^2} \cdot t\right)' = t\, e^{-t^2} \quad \Big/ \int_1^t$$

$$\Rightarrow z\, e^{-t^2} t - z(1)\, e^{-1} = \int_1^t t\, e^{-t^2} = -\frac{e^{-t^2}}{2}\Big|_1^t = \frac{1}{2}\left[e^{-1} - e^{-t^2}\right]$$

2

Or $\underbrace{\tilde{y}(1)}_{=2} = 1 + \frac{1}{z(1)} \Rightarrow z(1) = 1$, et donc :

$$z(t) = \frac{e^{t^2}}{t}\left[e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{e^{-t^2}}{2}\right] = \frac{3e^{-1}e^{t^2}}{2t} - \frac{1}{2t} = \frac{3e^{t^2-1}-1}{2t}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = t + \frac{2t}{3e^{t^2-1}-1}}$$

Le dénominateur s'annule ssi $e^{t^2-1} = \frac{1}{3}$ ssi $t^2 - 1 = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

ssi $t^2 = 1 + \ln(1/3) = 1 - \ln 3 < 0$

car $\ln 3 \simeq 1,1$. Ainsi la solution obtenue est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, on peut vérifier qu'il est une solution globale.

d) $\underbrace{ty^4}_{M} + \underbrace{(2t^2y^3 + 3y^5 - 20y^3)}_{N}\, y' = 0, \qquad y(0) = 1$

Ainsi $\frac{\partial N}{\partial t} = 4ty^3$ et $\frac{\partial M}{\partial y} = 4ty^3$, et donc l'éq. est exacte,

c-à-d, $\exists F(t,y)$ tq $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ et $\frac{\partial F}{\partial t} = M$ et $F(t,y) = K$ (cte)

Alors: $\frac{\partial F}{\partial t} = M \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} = ty^4 \Rightarrow F = \frac{t^2y^4}{2} + h(y)$,

$\frac{\partial F}{\partial y} = N \Rightarrow \cancel{2t^2y^3} + h'(y) = \cancel{2t^2y^3} + 3y^5 - 20y^3$

$\Rightarrow h(y) = 3\frac{y^6}{6} - 20\frac{y^4}{4} + c = \frac{y^6}{2} - 5y^5 + c$

En conclusion:

$$F(t,y) = K = \frac{t^2y^4}{2} + \frac{y^6}{2} - 5y^5$$

$$\Rightarrow \boxed{y^6 + t^2y^4 - 10y^5 = \tilde{c}}$$ formule implicite pour y.

Or $y(0) = 1$, on a donc: $1 - 10 = \tilde{c} \Rightarrow \tilde{c} = -9$

$$\Rightarrow \boxed{y^6 + t^2y^4 - 10y^5 = -9}$$

c) (∗1) $y' = \frac{y}{t} + \frac{\sqrt{t^2+y^2}}{t} \underset{\text{pour } t>0}{=} \frac{y}{t} + \sqrt{1+\frac{y^2}{t^2}} \longrightarrow$ éq homogène.

On pose $z = \frac{y}{t}$ et donc: $y = tz \Rightarrow y' = z + tz'$

$\Rightarrow z + tz' = z + \sqrt{1+z^2} \Rightarrow tz' = \sqrt{1+z^2} \Rightarrow \frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{t}$ (éq à variables séparables)

On a que: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ et donc $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$.

Ainsi: $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \underset{u=\sinh x}{=} \int \frac{\cosh x}{\cosh x}\, dx = x + c = \operatorname{argsinh}(u) + c$

Enfin, on obtient: $\operatorname{argsinh}(z) = \ln|t| + \tilde{c}$

$\Rightarrow z = \sinh(\ln|t| + \tilde{c})$

De l'équation (∗1), on voit que si $0 \in J$ (J = intervalle maximal), alors $\lim_{t \nearrow 0^+} y'(t)$ est singulier. Pour cette raison on résoudre d'abord pour $t > 0$ (car $1 \in J$). En conclusion:

$y = tz = t\sinh(\ln(t) + \tilde{c})$.

Or $y(1) = 0$, on a donc: $0 = \sinh(\tilde{c}) \Rightarrow \tilde{c} = 0$

Ainsi: $\boxed{y(t) = t\sinh(\ln(t))}$

Par définition de sinh: $\sinh(\ln(t)) = \frac{e^{\ln t} - e^{-\ln t}}{2} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2t}(t^2-1)$.

et donc: $\boxed{y(t) = \frac{t^2-1}{2}}$.

Cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$. et sa dérivée est:

$y'(t) = \frac{2t}{2} = t$.

On obtient donc: $ty' - y - \sqrt{t^2+y^2} = t^2 - \left(\frac{t^2-1}{2}\right) - \sqrt{t^2 + \left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2}$

$= \frac{t^2+1}{2} - \sqrt{\frac{t^4}{4} + t^2 - \frac{2t^2}{4} + \frac{1}{4}}$

$= \frac{t^2+1}{2} - \frac{\sqrt{t^4+2t^2+1}}{2}$

$= \frac{t^2+1}{2} - \frac{|t^2+1|}{2} = 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\boxed{J = \mathbb{R}}$ et $y(t) = \frac{t^2-1}{2}$ est une sol. globale.

Exo2 a) La fonction $f(t,y) = (1+\sin^2(ty))\,y^2+1$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et donc on peut utiliser le thm de Cauchy-Lipschitz qui nous dit qu'il existe une unique sol. maximale de l'éq : $y' = f(t,y)$ avec C. I. $y(0)=0$. De plus l'intervalle maximal est de la forme $J =]-\alpha, \beta[$ car c'est un ouvert et $0 \in J$, avec $\alpha, \beta > 0$.

b) Soit $\tilde{y}(t) = -y(-t) \Rightarrow \tilde{y}'(t) = y'(-t) = 1+\sin^2(-t\,y(-t))\,y(-t)^2+1$
$= 1+\sin^2(t\,\tilde{y}(t))\,\tilde{y}^2+1.$

Ce calcul est vrai $\forall t \in]-c, c[$, où $c = \min\{\alpha, \beta\} > 0$.

Ainsi, $\begin{cases} \tilde{y}' = f(t,\tilde{y}) \\ \tilde{y}(0) = -y(0) = 0 \end{cases}$, $t \in]-c,c[$ et d'après l'unicité donné par le thm de Cauchy-Lipschitz, on a que $y(t) = \tilde{y}(t)$, $\forall t \in]-c,c[$, c-à-d y est impaire sur $]-c,c[$.

Supposons par l'absurde que $\alpha \neq \beta$. S.p.d.g. on suppose que $\beta > \alpha > 0$. Ainsi, on a que $+\infty > \alpha > 0$ et d'après le thm d'explosion en temps fini $\lim\limits_{t \searrow -\alpha} |y(t)| = +\infty$.

En utilisant que y est impaire sur $]-\alpha, \alpha[$ ($c = \min\{\alpha,\beta\} = \alpha$) on a : $\lim\limits_{t \searrow -\alpha} |y(t)| = \lim\limits_{t \nearrow \alpha} |y(t)| = |y(\alpha)|$, ce qui est une contradiction.
car $[0,\alpha] \subset [0,\beta[\subset J$...

On en déduit que $\boxed{\alpha = \beta}$

c) $z' = z^2+1 \iff \dfrac{z'}{z^2+1} = 1 \;\Big|\; \int_0^t \iff \arctan(z) - \cancel{\arctan(0)} = t$
$\iff \boxed{z = \tan(t)}$ et $J =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

d) Pour montrer que $\beta \le \frac{\pi}{2}$, on suppose par l'absurde que $\beta > \frac{\pi}{2}$. Ainsi y est bien définie sur $[0, \pi/2]$.

$h' = y' - z' = (1 + \underbrace{\sin^2(ty)}_{\geq 0})\,y^2 + 1 - z^2 - 1$, $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}[$
$\geq y^2 - z^2 = \underbrace{(y-z)}_{= h}(y+z)$
$\geq h\,p$, où $p(t) = y(t) + z(t)$.

En conclusion: $h' \geq h\rho \quad , \quad \forall t \in [0, \pi/2[\quad , \rho = y + z.$

$$\Rightarrow h' - h\rho \geq 0 \quad / \, e^{-\int_0^t \rho}$$

$$\Leftrightarrow \left(h e^{-\int_0^t \rho}\right)' \geq 0 \quad / \int_0^t$$

$$\Rightarrow h e^{-\int_0^t \rho} - \underbrace{h(0)}_{0} \cdot e^0 \geq 0 \quad , \forall t \in [0, \pi/2[$$

$$\Rightarrow h(t) \geq 0 \quad , \forall t \in [0, \pi/2[$$

$$\Rightarrow y(t) \geq Z(t) = \tan(t) \quad / \lim_{t \nearrow \pi/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{t \nearrow \pi/2} y(t) = +\infty}$$

Ce qui contredit que y est une fonction bien définie sur $[0, \pi/2]$.

Remarque: Dans la question b), on peut aussi donner la justification suivante: on vérifie d'abord que $\tilde{y}(t) = -y(-t)$ est sol sur $]-\beta, +\alpha[$. Si $\alpha < \beta$, la fonction $\hat{y}$ définie par

$$\hat{y}:]-\beta, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longrightarrow \begin{cases} y(t), & t \in [0, \beta[\\ \tilde{y}(t), & t \in]-\beta, 0[\end{cases}$$

est aussi un sol de l'équation avec la condition initiale $\hat{y}(0) = 0$. D'après l'unicité de Cauchy-Lipschitz, on a que $]-\beta, \beta[$ est inclus dans l'intervalle maximal, i.e.:

$$]-\beta, \beta[\subset]-\alpha, \beta[$$

ce qui implique que: $-\alpha \leq -\beta$ et donc: $\alpha \geq \beta$; ce qui est une contradiction. Le même argument marche si on suppose $\alpha > \beta$. Conclusion: $\boxed{\alpha = \beta}$

Exo 3 $\Phi(u) = u''$.

- C'est immédiat de Φ est linéaire : $\Phi(u_1 + \lambda u_2) = (u_1 + \lambda u_2)''$
$= u_1'' + \lambda u_2''$
$= \Phi(u_1) + \lambda \Phi(u_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $u_1 u_2 \in E$.

- Φ est continue :
$\|\Phi(u)\|_F = \|u''\|_\infty \leq \|u\|_{C^2}$.

- Calcul de Φ^{-1} : $\Phi(u) = g \Leftrightarrow \begin{cases} u'' = g \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow u'(t) - u'(0) = \int_0^t g$

$\Rightarrow u'(t) = u'(0) + \int_0^t g \quad / \int_0^t$

$\Rightarrow u(t) - \cancel{u(0)} = t u'(0) + \int_0^t \left(\int_0^s g(\sigma) d\sigma\right) ds$

On impose que $u(1) = 0$: $0 = u'(0) + \int_0^1 \int_0^s g(s) d\sigma ds$.

Ainsi, $\boxed{u(t) = -t \int_0^1 \int_0^s g(s) + \int_0^t \int_0^s g(\sigma) d\sigma ds}$

Or on a obtenu la seule solution de $\begin{cases} u'' = g \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$, on a montré que Φ est bijective et que $\boxed{\Phi^{-1}(g)(t) = -t \int_0^1 \int_0^s g(s) + \int_0^t \int_0^s g(\sigma) d\sigma ds}$

On remarque que Φ^{-1} est bien définie de F dans E car :
$\begin{cases} \Phi^{-1}(g) \in C^2 \text{ si } g \in C[0,1] \quad \left(\text{et } (\Phi^{-1}(g)(t))'' = g\right) \\ \Phi^{-1}(g)(0) = 0, \quad \Phi^{-1}(g)(1) = 0 \quad \left(\text{et } (\Phi^{-1}(g))' = -\int_0^1 \int_0^s g + \int_0^s g\right) \end{cases}$

Finalement, Φ^{-1} est continue car :

$$\|\Phi^{-1}(g)\|_{C^2} \leq \|\Phi^{-1}(g)\|_\infty + \|\underbrace{\Phi^{-1}(g)'}\|_\infty + \|\Phi^{-1}(g)''\|_\infty$$
$$\leq 2\|g\|_\infty \cdot \int_0^1 \underbrace{\int_0^s 1}_{s}{}_{1/2} + \|g\|_\infty \underbrace{\int_0^1 \int_0^s 1}_{1/2} + \|g\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$$\boxed{\|\Phi^{-1}(g)\|_{C^2} \leq 4\|g\|_\infty}$$

Conclusion : $\Phi \in \text{Isom}(E, F)$.

b) Soit $f : \mathbb{R}\times E \to F$
$(\lambda, u) \to f(\lambda, u) = u'' + \lambda p e^u$.

- La différentielle partielle p/r à λ est : $d_1 f(\lambda, u)(\eta) = \eta p e^u$, car l'application $\lambda \mapsto \lambda p e^u$ est linéaire (et donc C^1).
- L'application $\ell : \begin{matrix} E \to F \\ u \to u'' \end{matrix}$ est linéaire (et donc C^1), avec $d\ell(u) v = v''$.
- On étudie l'application $g : \begin{matrix} E \to E \\ u \to \lambda p e^u \end{matrix}$.

La dérivée de Gâteaux est : $d_G g(u)(v) = \frac{d}{dt}\left(\lambda p e^{u+tv}\right)\Big|_{t=0}$
$= \lambda p v e^u$.

Vérifions que $d_G g : \begin{matrix} E \longrightarrow \mathcal{LC}(E,F) \\ u \longrightarrow d_G g(u) \end{matrix}$ est continue :

Soit $u_n \to u$ dans E, i.e. $\|u_n - u\|_{C^2} \to 0$. Alors :

$\forall v \in E$, $\|v\|_E \leq 1$, on a : $\|d_G g(u_n) v - d_G g(u) v\|_\infty \leq |\lambda| \|p\|_\infty \|v\|_\infty \|e^{u_n} - e^u\|_\infty$

$\leq |\lambda| \|p\|_\infty \cdot 1 \cdot \|e^{u_n} - e^u\|_\infty$

Or $\|u_n - u\|_\infty \to 0$, on peut supposer que : $\|u_n\|_\infty \leq 1 + \|u\|_\infty \equiv M$

Ainsi, d'après le thm des accroissements finis :

$$|e^{u_n(x)} - e^{u(x)}| = |e^{c_n(x)}| \cdot |u_n(x) - u(x)|, \text{ et } |c_n(x)| \leq M$$
$$\Rightarrow \|e^{u_n} - e^u\|_\infty \leq e^M \|u_n - u\|_\infty \to 0$$

et donc $\|d_G g(u_n) - d_G g(u)\|_{\mathcal{LC}(E,F)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

En conclusion, la différentielle partielle $d_2 f$ existe et est C^1 :
$$d_2 f(\lambda, u)(v) = v'' + \lambda p v e^u$$

Or $d_1 f$ et $d_2 f$ sont C^1, on conclut que f est différentiable et de classe C^1 et

$$df(\lambda, u)(\eta, v) = \eta p e^u + v'' + \lambda p v e^u.$$

En particulier, $d_2 f(0,0)(v) = v''$, i.e. $d_2 f(0,0) = \Phi$

et d'après (a), $d_2 f(0,0) \in \mathrm{Isom}(E,F)$. On a donc les hypothèses du thm des fonctions implicites qui implique donc

avec $u^* = 0$, $\lambda^* = 0$, $f(\lambda^*, u^*) = 0$.

l'existence d'un voisinage ouvert $U_* \subset E$ de 0 et $I_* \subset \mathbb{R}$ un voisinage ouvert de 0 et

$\exists\, g : I_* \to U_*$, $\lambda \to g(\lambda)$, g de classe C^1 t.q. $f(\lambda, g(\lambda)) = 0$, $\forall \lambda \in I_*$.

i.e, $u_\lambda = g(\lambda)$ vérifie $u_\lambda'' + \lambda p e^{u_\lambda} = 0$ et $u(0) = u(1) = 0$ car $u \in E$.

Or I_* est un voisinage de 0, il existe $\bar{\lambda} > 0$ tq $]0, \bar{\lambda}[\subset I_*$

Il nous reste à montrer que u_λ n'est pas constante si $\lambda \in]0, \bar{\lambda}[$.

En effet, u_λ est constante alors $u_\lambda \equiv 0$, sur $[0,1]$ car u est continue et $u_\lambda(0) = 0$. L'équation implique donc : $0 + \lambda p \cdot e^0 = 0$

$\Rightarrow \lambda p = 0$, $\forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow \lambda = 0$, ce qui contredit que $\lambda > 0$.

p non nulle

Exo 4

a) $g(A) = \|A^T A - I_n\|^2$

On peut regarder $g = N \circ F \circ G_1 \circ G_2$; $N : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$, $A \to \|A\|^2$, $G_1 : \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$, $(A,B) \to A^T \cdot B$

$F : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$, $A \to A - I$, $G_2 : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n$, $A \to (A;A)$

On a vu que N est C^1 et $dN(A)(H) = 2\langle A, H\rangle$

F est ~~linéaire~~ affine, donc C^1 et $dF(A)(H) = H$

G_1 est bilinéaire et donc C^1 et $dG_1(A,B)(H,K) = H^T B + A^T K$

G_2 est linéaire en chaque composante donc C^1 et $dG_2(A)(H) = (H,H)$.

D'après la prop. de la diff. composée, g est C^1 et :

$$dg(A)(H) = dN(F(G_1(G_2(A)))) \circ dF(G_1(G_2(A))) \circ dG_1(G_2(A)) \circ dG_2(A)(H)$$

$$dg(A)(H) = 2\langle A^T A - I_n, H^T A + A^T H\rangle$$

b) i) $f(A) = A^3 = A \cdot A \cdot A$

f est une application composée : $f = F \circ G$, où

$G : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n$, $A \to (A, A, A)$, $F : \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$, $(A, B, C) \to A \cdot B \cdot C$

G est linéaire et F trilinéaire, donc G et F sont C^1 et :

$dG(A)(H) = (H,H,H)$, $dF(A,B,C)(H_1,H_2,H_3) = ABH_3 + AH_2C + H_1BH_3$

Ainsi f est C^1 et :

$$df(A)(H) = A^2H + AHA + HA^2$$

ii) Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors :

$$\|df(A)H - 3H\| = \|A^2H + AHA + HA^2 - 3H\|$$

Posons $B = A - I$, alors $A = I + B$ et donc :

$$\|A^2H + AHA + HA^2 - 3H\|$$

$$= \|(B^2+2B+I)H + (I+B)\overbrace{H(I+B)}^{H+HB} + H(B^2+2B+I) - 3H\|$$

$$= \|B^2H + 2BH + \cancel{H} + \cancel{H} + HB + BH + BHB + HB^2 + 2HB + \cancel{H} - \cancel{3H}\|$$

$$\leq 3\|B\|^2\|H\| + 6\|B\|\|H\| = (3\|A-I\|^2 + 6\|A-I\|)\|H\|,$$

$\|A\cdot B\| \leq \|A\|\cdot\|B\|$ c-à-d, on a obtenu l'inégalité.

iii) Si $A \in \mathcal{B}$, alors $\|A - I\| < 1/3$ et donc :

$$\|df(A) - 3I\|_{\mathcal{L}C} < \frac{6}{3} + 3\cdot\frac{1}{9} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{1}{3}df(A) - I\right\|_{\mathcal{L}C} < \frac{7}{9}$$

Un résultat de cours nous dit que si $C \in GL_n$ et $\|T - C\| < \frac{1}{\|C^{-1}\|}$ alors $T - C$ est inversible.

En prenant $T = \frac{1}{3}df(A)$, $C = C^{-1} = I$, on obtient que $\frac{1}{3}df(A)$ est inversible, i.e, $\frac{1}{3}df(A) \in \mathrm{Isom}(M_n, M_n)$

iv) h est C^1 et d'après le thm des accroissements :

$$\|h(A) - h(B)\| \leq \sup_{C\in\mathcal{B}} \|dh(C)\|\,\|A - B\|,$$

où $dh(C)(H) = df(C)(H) - 3H = (df(C) - 3I)(H)$

$\Rightarrow \|dh(C)\|_{\mathcal{L}C} < \frac{7}{3}$ (d'après iii), ce qui donne l'inégalité.

<u>f injective sur $\bar{\mathcal{B}}$</u> : Soit $A, B \in \bar{\mathcal{B}}$ tels que : $f(A) = f(B)$

Alors $h(A) - h(B) = 3(A - B)$ et donc : (d'après l'inégalité)

$$3\|A - B\| \leq \frac{7}{3}\|A - B\| \Rightarrow \frac{2}{3}\|A - B\| \leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{A = B}$$

$\Rightarrow f$ est injective.

v) $f : \mathcal{B} \to M_n(\mathbb{R}^n)$ est de classe C^1, $df(A) \in \mathrm{Isom}(M_n, M_n)$ $\forall A \in \mathcal{B}$ et f est injective sur $\mathcal{B}$. D'après le thm d'inversion globale, f est un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{B}$ sur $f(\mathcal{B})$.