Esquisse de corrigé DS1

Exo 1

a) Voir thms du cours

b) $u(t) = \| \Phi(x_1)(t) - \Phi(x_2)(t) - (x_1 - x_2) \|$.

$\Rightarrow \Phi(x_1) = x_1 + \int_0^t f(\Phi(x_1))\,ds \;,\; \Phi(x_2) = x_2 + \int_0^t f(\Phi(x_2))\,ds$

$\Rightarrow \Phi(x_1) - \Phi(x_2) = x_1 - x_2 + \int_0^t f(\Phi(x_1)) - f(\Phi(x_2))$

$\Rightarrow \quad u(t) \leq \int_0^t \| f(\Phi(x_1)) - f\Phi(x_2) \|\,ds \quad + \|x_1 - x_2\|$

$$u(t) \underset{\text{T.A.F}}{\leq} \int_0^t \sup_{z \in \mathbb{R}^m} \| df(z) \| \underbrace{\| \Phi(x_1) - \Phi(x_2) \|}_{u(s)} + \|x_1 - x_2\|$$

$\Rightarrow \boxed{u(t) \leq \|x_1 - x_2\| + K \int_0^t u(s)\,ds}$, où $K = \sup_{z \in \mathbb{R}^m} \|df(z)\|_{\mathcal{L}(E)}$.

c) Soit $v(s) = \int_0^s u \Rightarrow \quad v' = u \leq \|x_1 - x_2\| + Kv$

$\Rightarrow v' - Kv \leq \|x_1 - x_2\| \quad / \; e^{-Kt}$

$[v e^{-Kt}]' \leq \|x_1 - x_2\| e^{-Kt} \quad / \int_0^t$

$v e^{-Kt} - \cancel{v(0)}^{0} e^0 \leq \|x_1 - x_2\| \left. \frac{e^{-Kt}}{-K} \right|_0^t$

$\Rightarrow \quad v(t) \leq e^{Kt} \|x_1 - x_2\| \left[\frac{e^{-Kt} - 1}{-K} \right]$

$\leq \|x_1 - x_2\| \left[\frac{1 - e^{Kt}}{-K} \right]$

$\Rightarrow v(t) \leq \|x_1 - x_2\| \frac{e^{Kt} - 1}{K}$

$\Rightarrow u(t) \leq \|x_1 - x_2\| + K v \leq \|x_1 - x_2\| + \|x_1 - x_2\| [e^{Kt} - 1] \leq \|x_1 - x_2\| e^{Kt}$.

d) On a : $\| \Phi(x_1)(t) - \Phi(x_2)(t) \| \leq \|x_1 - x_2\| e^{TK} \;,\; \forall t \in [0, T]$

$\Rightarrow \| \Phi(x_1) - \Phi(x_2) \|_\infty \leq \|x_1 - x_2\| e^{TK} \quad \Rightarrow \Phi$ est lipschitz continue.

e) $\Phi(x)(t) = x + \int_0^t f(\Phi(x)(s))\,ds$

$\Rightarrow d\Phi(x)(h)(t) = \frac{d}{d\varepsilon} \left. \Phi(x + \varepsilon h)(t) \right|_{\varepsilon = 0} = \frac{d}{d\varepsilon} \left[x + \varepsilon h + \int_0^t f(\Phi(x + \varepsilon h)(s))\,ds \right] \Big|_{\varepsilon = 0}$

$= h + \int_0^t df(\Phi(x)(s)) [d\Phi(x)(h)(s)]\,ds$

$\Rightarrow w = d\Phi(x)(h)$ est l'unique sol de $\boxed{\begin{cases} w'(t) = df(\Phi(x)(t)) \cdot w(t) \\ w(0) = h \end{cases}}$

f) On a que $\psi = \ell \circ \Phi$ $\Rightarrow \psi(x) = \ell(\Phi(x)) = \Phi(x)(T)$

$\Rightarrow$ Or ℓ est linéaire continue $\left(\|\ell(g)\|_{\mathbb{R}^n} = \|g(T)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|g\|_\infty \right)$

on a donc ℓ de classe C^1 et $\ell'(g)(v) = v(T)$, $\forall v \in E$.

Par composée, ψ est de classe C^1 et
$$d\psi(x)(h) = d\ell(\Phi(x))(d\Phi(x)(h)) = (d\Phi(x)(h))(T)$$

g) Ici $f(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \sin(y_1)\cdot\cos y_2 \\ \sin^2 y_1 + 2\sin y_2 \end{pmatrix}$ D'après C-Lip. $\Phi(0,0) \equiv 0$.
$\Rightarrow J_f = \begin{pmatrix} \cos y_1 \cos y_2 & -\sin y_1 \sin y_2 \\ 2\sin y_1 \cos y_1 & 2\cos y_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \det J_f(0,0) = 2 \neq 0$

Ainsi $d\Phi(0,0)(h)$ est la sol de $\begin{cases} w' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} w \\ w(0) = h \end{cases}$ $\Rightarrow$ $w_1' = w_1$, $w_2' = 2w_2$

$\Rightarrow w_1 = h_1 e^t$, $w_2 = h_2 e^{2t}$ $\Rightarrow$ $\boxed{d\Phi(0,0)(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} h_1 e^t \\ h_2 e^{2t} \end{pmatrix}}$

Alors: $d\psi(0,0)(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} h_1 e^T \\ h_2 e^{2T} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^T & 0 \\ 0 & e^{2T} \end{bmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

Or $\det A \neq 0$, alors $d\psi(0,0) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

D'après le théorème d'inversion local, $\exists\, U_0, V_0$ voisinages ouverts de 0 $(U_0, V_0 \subset \mathbb{R}^2)$ tels que $\psi : U_0 \to V_0$ est un C^1-difféo. En particulier ψ est bijective et $\exists\, \delta > 0$ tq $B(0,\delta) \subset V_0$. Ainsi $\forall m \in B(0,\delta)$, $\exists!\, x \in U_0$ tq $\underset{\Phi(x)(T)}{\underset{\shortparallel}{\psi(x)}} = m$,

c-à-d $y(T) = m$ où y est la sol de $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = x. \end{cases}$

Exo 2 | a) $y' + \frac{6}{t}y = 3y^{4/3} \Rightarrow$ Bernoulli $\alpha = 4/3$, on pose $z = y^{1-\alpha} = y^{-1/3}$

$$\Rightarrow z' = -\frac{1}{3}\frac{y'}{y^{4/3}} = -\frac{1}{3y^{4/3}}\left[-\frac{6y}{t} + 3y^{4/3}\right] = \frac{2z}{t} - 1$$

$$\Rightarrow z' - \frac{2z}{t} = -1 \quad \Big| \quad e^{-\int \frac{2}{t}} = e^{-2\ln|t|} = \frac{1}{t^2}$$

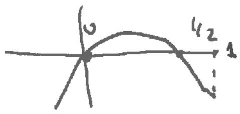
$$\Rightarrow \left(\frac{z}{t^2}\right)' = -\frac{1}{t^2} \quad \Big/ \int$$

$$\Rightarrow \frac{z}{t^2} = \frac{1}{t} + c \Rightarrow z = t + ct^2 \Rightarrow y^{-1/3} = t + ct^2.$$

Or $y(1) = -1 \Rightarrow -1 = 1 + c \Rightarrow \boxed{c = -2}$ et donc $\boxed{y(t) = \frac{1}{(t-2t^2)^3}}$

En $t=1$, $t - 2t^2 = +1 - 2 = -1$.

et $\frac{1}{t-2t^2} < 0 \iff t - 2t^2 < 0 \iff t(1-2t) < 0$



Conclusion : $\boxed{J =]\frac{1}{2}, +\infty[}$

b) On a : $$\underbrace{\left(2tye^{t^2} - \frac{y^2}{2}\right)}_{M} + \underbrace{\left(e^{t^2} - ty\right)}_{N} y' = 0$$

On a : $\frac{\partial N}{\partial t} = 2e^{t^2} - y$ et $\frac{\partial M}{\partial y} = 2te^{t^2} - y$. Alors l'éq est exacte.

et donc il existe F tel que :
$$\frac{\partial F}{\partial t} = M \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

Or $\frac{\partial F}{\partial t} = M \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} = 2tye^{t^2} - \frac{y^2}{2} \overset{\int dt}{\Rightarrow} F = ye^{t^2} - \frac{y^2}{2}t + h(y)$

$\underset{\frac{\partial F}{\partial y} = N}{\Rightarrow} \quad e^{t^2} - yt + h'(y) = e^{t^2} - ty \Rightarrow \boxed{h(y) = c}$

Ainsi : $\boxed{ye^{t^2} - \frac{y^2}{2}t = c}$ ou encore : $y = \frac{e^{t^2} \pm \sqrt{e^{2t^2} + 2tc}}{t}$

Rmq : On pourrait faire : $\frac{\partial F}{\partial y} = N \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = e^{t^2} - ty \overset{\int dy}{\Rightarrow} F = ye^{t^2} - t\frac{y^2}{2} + h(t)$

$\underset{\frac{\partial F}{\partial t} = M}{\Rightarrow} \quad 2t\cancel{ye^{t^2}} - \cancel{\frac{y^2}{2}} + h'(t) = \cancel{2tye^{t^2}} - \cancel{\frac{y^2}{2}} \Rightarrow h(t) = C \Rightarrow \boxed{ye^{t^2} - t\frac{y^2}{2} = c}$

Exo 3

Soit $J =]-\alpha, \beta[$ l'intervalle maximal donné par le thm de Cauchy - Lip. que l'on peut appliquer car $f(t,y) = \frac{t^3(1-y^2)y}{1+t^2}$ est de classe C^1, où $\alpha, \beta > 0$.

On pose $\tilde{y}(t) = y(-t)$, $\forall |t| < \delta$, où $\delta = \min\{\alpha, \beta\}$

Ainsi $\tilde{y}'(t) = -y'(-t) = -\left[\frac{(-t)^3(1-y^2(-t))\,y(-t)}{1+(-t)^2}\right] = \frac{t^3(1-\tilde{y}^2(t))\tilde{y}(t)}{1+t^2}$

et $\tilde{y}(0) = y(0) = y_0$. $\forall t \in]-\delta, \delta[$.

D'après le thm de Cauchy - Lip : $\underset{\overset{\shortparallel}{y(-t)}}{\tilde{y}(t)} = y(t)$ $\forall t \in]-\delta, \delta[$,

c-à-d y est paire sur $]-\delta, \delta[$.

Si on suppose par l'absurde que $\alpha \neq \beta$, alors $\alpha < +\infty$ ou $\beta < +\infty$.

Sans perte de généralité on suppose $\alpha \neq \beta$, $\beta < +\infty$, et $\beta = \min\{\alpha, \beta\} = \delta$.

Ainsi, d'après le théorème d'explosion en temps fini

$\lim_{t \nearrow \beta} |y(t)| = +\infty$. Mais on a vu que $\tilde{y}$ est un sol de

$-\alpha \quad -\beta \quad 0 \quad \beta$

$$\begin{cases} \tilde{y}' = f(t,\tilde{y}), & t \in]-\beta, \beta[\\ y(0) = y_0 \end{cases}$$ et donc $y(t) = y(-t)$, $\forall t \in]-\beta, \beta[$

En particulier $\lim_{t \nearrow \beta} |y(t)| = \lim_{t \nearrow \beta} |y(-t)| = +\infty$; ce qui est absurde car

y est continue sur $]-\alpha, 0[$ et $\beta \in]-\alpha, 0[$.

<u>Conclusion</u> $\alpha = \beta$ et donc $J =]-\beta, \beta[$.

b) $y_0 = 1$; $y_0 = 0$, $y_0 = -1$.

c) Soit $y_0 > 1$. i) M.q $y(t) > 1$, $\forall t \in]-\beta, \beta[$.
Sinon, $\exists t_0 \in J$ tq $y(t_0) = 0$. D'après Cauchy - Lip. $y(t) \equiv 0$.
Absurde :

ii) D'après i, $y(t) > 1$, $\forall t \in [0, \beta[$ et donc $y' = \frac{t^3(1-y^2)y}{1+t^2} < 0$, $\forall t \in]0, \beta[$

$\Rightarrow$ y est strict décroissante sur $[0, \beta[$

$\Rightarrow$ $y(t) < y(0)$, $\forall t \in]0, \beta[$.

Or y est paire, $y(0) = y_0$ est le max. ~~Exp~~

iii) D'après (i) et (ii) $1 < y(t) \leq y_0$, $\forall t \in]-\beta, \beta[$.

Si $\beta < +\infty$, d'après le thm d'explosion en temps fini, on a que :
$\lim_{t \nearrow \beta} |y(t)| = +\infty$, ce qui est une contradiction. Ainsi $J =]-\infty, +\infty[$.

iv) Il suffit de montrer que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1$ car y est paire.

D'après le théorème des fonctions monotones, on a que $\exists \lim_{t\to+\infty} y(t) = L$ car y est décroissante et minorée par 1. Ainsi $L \geq 1$.

Par l'absurde, on suppose que $L > 1$. D'après l'éq :

$$\lim_{t\to\infty} y'(t) = \lim_{t\to\infty} \underbrace{\frac{t^3}{1+t^2}}_{\downarrow \atop +\infty} \cdot \underbrace{(1-y^2)\, y}_{\downarrow\, t\to+\infty \atop (1-L^2)\cdot L < 0 \text{ car } L>1} = -\infty.$$

D'autre part, d'après le T.A.F. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in]n, n+1[$ tel que :

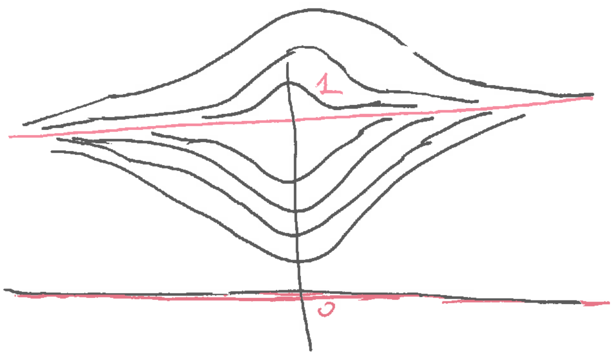
$$\underbrace{y(n+1)}_{\downarrow \atop L} - \underbrace{y(n)}_{\downarrow\, n\to\infty \atop L} = y'(x_n). \quad \Big/ \lim_{n\to+\infty}$$

$$\Rightarrow \boxed{0 = \lim_{n\to\infty} y'(x_n)}$$

ce qui contredit le fait que $\lim_{t\to\infty} y'(t) = +\infty$ car la suite $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

d) Le même raisonnement montre que si $y_0 \in]0,1[$, alors $0 < y(t) < 1$, $\forall t \in]-\beta, \beta[$.
En particulier y est borné et donc $\beta = +\infty$ (i.e. $J = \mathbb{R}$).
Ainsi $y'(t) = \frac{t^3(1-y^2)y}{1+t^2} \in]0,1[$, $\forall t > 0$ et donc y est strict. croissante sur $]0, +\infty[$. Ceci implique que y_0 est un minimum de y.
De plus $\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = 1$

e)



Exo 4

a) $g(A) = \|A^T A - I_n\|^2$

On peut regarder $g = N \circ F \circ G_1 \circ G_2$ où $N : M_n \to M_n$, $A \to \|A\|^2$, $G_1 : M_n \times M_n \to M_n$, $(A, B) \to A^T B$

$F : M_n \to M_n$, $A \to A - I$, $G_2 : M_n \to M_n \times M_n$, $A \to (A ; A)$

On a vu que N est C^1 et $dN(A)(H) = 2 \langle A, H \rangle$

F est linéaire affine, donc C^1 et $dF(A)(H) = H$

G est bilinéaire et donc C^1 et $dG_1(A, B)(H, K) = H^T B + A^T K$

G_2 est linéaire en chaque composante donc C^1 et $dG_2(A)(H) = (H, H)$.

D'après la prop. de la diff. composée, g est C^1 et :

$$dg(A)(H) = dN(F(G_1(G_2(A)))) \circ dF(G_1(G_2(A))) \circ dG_1(G_2(A)) \circ dG_2(A)(H)$$

$$dg(A)(H) = 2 \langle A^T A - I_n, H^T A + A^T H \rangle$$

b) Soit $f(A) = A^3 = A \cdot A \cdot A$, $f : M_n \to M_n$

f est une aplication composée : $f = F \circ G$, où

$G : M_n \to M_n \times M_n \times M_n$, $A \to (A, A, A)$, $F : M_n \times M_n \times M_n \to M_n$, $(A, B, C) \to A \cdot B \cdot C$

G est linéaire et F trilinéaire, donc G et F sont C^1 et :

$dG(A)(H) = (H, H, H)$, $dF(A, B, C)(H_1, H_2, H_3) = A B H_3 + A H_2 C + H_1 B H_3$

Ainsi f est C^1 et :

$$df(A)(H) = A^2 H + A H A + H A^2$$

Soit $B : M_n \times M_n \to \mathbb{R}$, $(A, B) \to A \cdot B$. Ainsi B est bilinéaire (en dim finie) est donc de classe C^1.

Le même raisonnement montre que la fonction

$$\tilde{F} : M_n \times M_n \longrightarrow M_n$$
$$(A,B) \longrightarrow A^3 - 2A^2 - AB + I$$

est de classe (c'est la somme des fonctions de classe C^1).

De plus : $\tilde{F}(I,0) = I - 2I - 0 + I = 0$

et $d_1\tilde{F}(A,B)(H) = A^2H + AHA + HA^2 - 2AH - 2HA - HB$, $\forall H \in M_n$

En particulier, $d_1\tilde{F}(I,0) = H + H + H - 2H - 2H = -H$,

c-à-d : $d_1\tilde{F}(I,0) = -id \in \mathrm{Isom}(M_n, M_n)$.

D'après le thm des fonctions implicites, $\exists V_I \subset M_n$ voisinage ouvert de I et $\exists U_0 \subset M_n$ voisinage ouvert de 0, et $\exists g : U_0 \longrightarrow V_I$ de classe C^1 t.q.

$$\tilde{F}(g(B), B) = 0, \ \forall B \in U_0, \text{ avec } g(0) = I$$

Or U_0 est ouvert, il existe $\alpha > 0$ t.q la boule $\overline{B}(0,\alpha) \subset U_0$. Ainsi $\forall B \in \overline{B}(0,\alpha)$ (i.e. $\|B\| \leq \alpha$), $\tilde{F}(g(B), B) = 0$,

c-à-d $A = g(B)$ est une solution de l'équation.

Il reste à montrer que $A = g(B) \in GL_n(\mathbb{R})$.

D'après le T.A.F. $\|g(B) - \underset{I}{\underset{\shortparallel}{g(0)}}\| \leq \sup\limits_{\overline{B}(0,\alpha)} \|dg\| \cdot \underbrace{\|B\|}_{\leq \alpha}$, $\forall B \in \overline{B}(0,\alpha)$

$$\Rightarrow \|g(B) - I\| \ \sup_{\overline{B}(0,\alpha)} \|dg\| \cdot \alpha .$$

Or g est de classe C^1, $\sup\limits_{\overline{B}(0,\alpha)} \|dg\| \cdot \alpha \underset{\alpha \to 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, si $\alpha > 0$ est suffisament petit, $\|g(B) I\| \leq \frac{1}{2}$, $\forall B \in \overline{B}(0,\alpha)$.

$$\Rightarrow \|A - I\| \leq 1/2 .$$

D'après un thm de cours, ceci implique que $A \in GL_n(\mathbb{R})$.