Interpolation rationnelle quasi-optimale sur un intervalle à pôles fixes

Karl Deckers

Department of Computer Science, KU Leuven, Heverlee, Belgium.

23 février 2012

Sommaire

1. Motivation
   - Formules de quadratures rationnelles
   - Méthode spectrale rationnelle
2. Fonctions rationnelles orthonormales (ORFs)
   - Les ORFs
   - Formules de quadratures rationnelles de Gauss
3. Les ORFs de Tchebychev
   - Expressions explicites
   - Calculer les nœuds rationnels de Tchebychev

Sommaire

1. Motivation
   - Formules de quadratures rationnelles
   - Méthode spectrale rationnelle
2. Fonctions rationnelles orthonormales (ORFs)
   - Les ORFs
   - Formules de quadratures rationnelles de Gauss
3. Les ORFs de Tchebychev
   - Expressions explicites
   - Calculer les nœuds rationnels de Tchebychev

Sommaire

1. Motivation
   - Formules de quadratures rationnelles
   - Méthode spectrale rationnelle
2. Fonctions rationnelles orthonormales (ORFs)
   - Les ORFs
   - Formules de quadratures rationnelles de Gauss
3. Les ORFs de Tchebychev
   - Expressions explicites
   - Calculer les nœuds rationnels de Tchebychev

Sommaire

1. Motivation
   - Formules de quadratures rationnelles
   - Méthode spectrale rationnelle
2. Fonctions rationnelles orthonormales (ORFs)
   - Les ORFs
   - Formules de quadratures rationnelles de Gauss
3. Les ORFs de Tchebychev
   - Expressions explicites
   - Calculer les nœuds rationnels de Tchebychev

Formules de quadratures rationnelles

Considérons les formules de quadratures rationnelles de Gauss:

$$I_3(f) := \int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1-x^2}\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \lambda_{3,k} f(x_{3,k}) =: I_{3,n}(f)$$

$$I_2(g) := \int_{-1}^{1} f(x)(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \lambda_{2,k} g(x_{2,k}) =: I_{2,n}(g)$$

$$I_1(h) := \int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{1,k} h(x_{1,k}) =: I_{1,n+1}(h),$$

avec

$$A_{3,n} = A_{2,n} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \infty\},$$
$$A_{1,n+1} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \infty, \infty\}.$$

Notez que $I_3(f) = I_2(g) = I_1(h)$.

Formules de quadratures rationnelles

Exemple 1: $f(x) = \frac{\pi x/\omega}{\sinh(\pi x/\omega)}$, $\omega \in \mathbb{R}_0$

$$\alpha_{2k} = k \cdot \mathbf{i}\omega, \qquad \alpha_{2k-1} = -k \cdot \mathbf{i}\omega.$$

ω	1.1			1.001		
n	$\Delta_3(f)$	$\Delta_2(g)$	$\Delta_1(h)$	$\Delta_3(f)$	$\Delta_2(g)$	$\Delta_1(h)$
3	7.3e-4	4.2e-7	7.3e-4	1.1e-3	9.7e-7	1.1e-3
5	2.1e-7	2.1e-14	2.1e-7	4.5e-7	9.0e-14	4.5e-7
9	1.8e-16	0	1.8e-16	1.9e-16	1.9e-16	5.8e-16

Table: L'erreur relative Δ sur l'approximation de $I_3(f)$ par $I_{3,n}(f)$, $I_{2,n}(g)$ et $I_{1,n+1}(h)$.

Convergence: $n_{\text{poly}} \cong 2n_{\text{rat}}$

Formules de quadratures rationnelles

Exemple 2: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+\omega^2}\right)$, $\omega \in \mathbb{R}_0$

$$\alpha_{2k} = -\mathbf{i}\omega, \qquad \alpha_{2k-1} = \mathbf{i}\omega.$$

ω	0.05		
n	$\Delta_3(f)$	$\Delta_2(g)$	$\Delta_1(h)$
101	3.9e-1	1.3e-2	3.8e-1
201	2.9e-2	8.2e-16	2.9e-2
401	4.5e-14	4.9e-15	3.7e-14
801	1.1e-14	1.4e-14	7.8e-15

Table: L'erreur relative Δ sur l'approximation de $I_3(f_3)$ par $I_{3,n}(f)$, $I_{2,n}(g)$ et $I_{1,n+1}(h)$.

Convergence: $n_{\text{poly}} \cong 10 n_{\text{rat}}$

Sommaire

1. Motivation
   - Formules de quadratures rationnelles
   - Méthode spectrale rationnelle
2. Fonctions rationnelles orthonormales (ORFs)
   - Les ORFs
   - Formules de quadratures rationnelles de Gauss
3. Les ORFs de Tchebychev
   - Expressions explicites
   - Calculer les nœuds rationnels de Tchebychev

Méthode spectrale rationnelle

- Considérons l'équation différentielle

$$\epsilon f''(x) + xf'(x) + xf(x) = 0, \ -1 < x < 1,$$

avec des conditions aux limites $f(-1) = e$ et $f(1) = 2e^{-1}$.

- Si $\epsilon \ll 1$, il y a une couche limite interne dans un voisinage de $x = 0$.

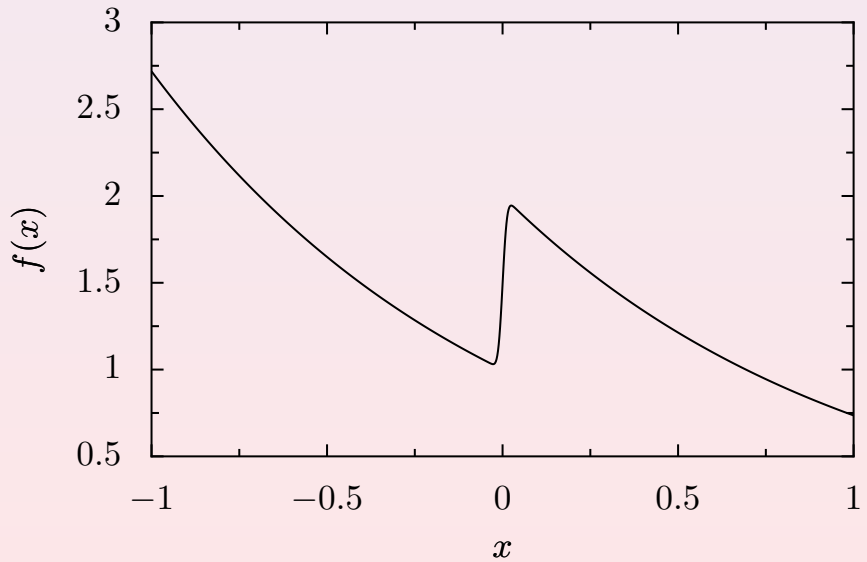

Figure: La solution exacte si $\epsilon = 0.0001$.

Méthode spectrale rationnelle

- Soit erf(x) la fonction d'erreur:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$

Alors, si $\epsilon \to 0$, la solution interne est donnée par

$$f_{\text{in}}(x) = 0.5\text{erf}(x/\sqrt{2\epsilon}) + 1.5, \qquad x = \mathcal{O}(\sqrt{\epsilon}).$$

- A l'aide d'un (m, m) approximant de Padé, nous obtenons pour $m = 10$ et $\epsilon = 0.0001$:

$$\alpha_{1,2} \approx \pm 0.0403\mathbf{i},\ \alpha_{3,4,5,6} \approx \pm 0.0094 \pm 0.0398\mathbf{i},$$
$$\alpha_{7,8,9,10} \approx \pm 0.0200 \pm 0.0384\mathbf{i}.$$

- Supposons que $n > m$ et $\alpha_{m+1} = \ldots = \alpha_n = \infty$.

Méthode spectrale rationnelle

Nous considérons trois méthodes spectrales, les points d'interpolation fondés sur

CHEB les polynômes de Tchebychev;

NCOP des polynômes orthogonaux non-classiques associés à une mesure rationnelle (J.A.C. Weideman, 1999);

RCHEB les ORFs de Tchebychev.

Méthode spectrale rationnelle

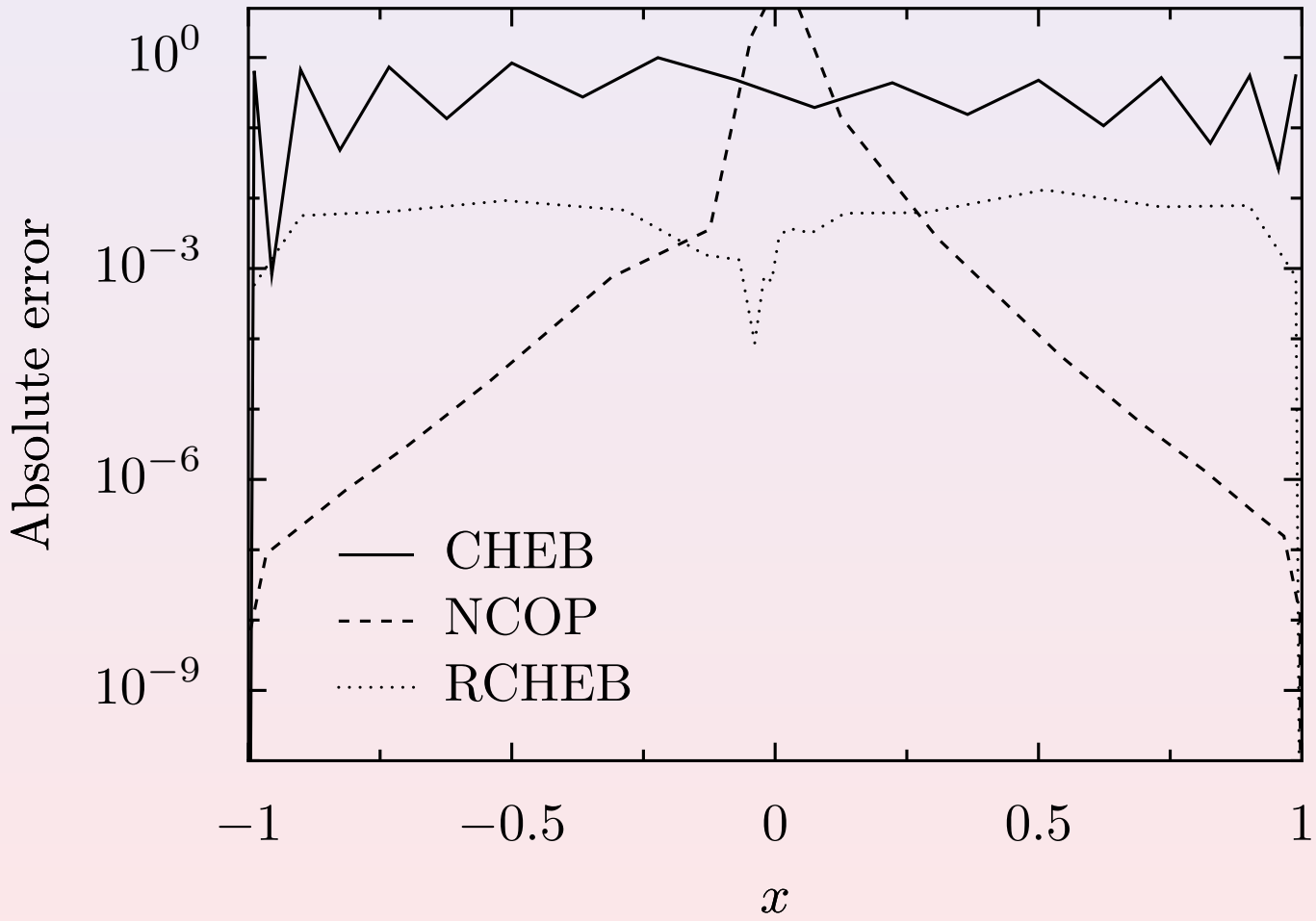

Figure: L'erreur absolue si $n = 20$ et $m = 10$.

Méthode spectrale rationnelle

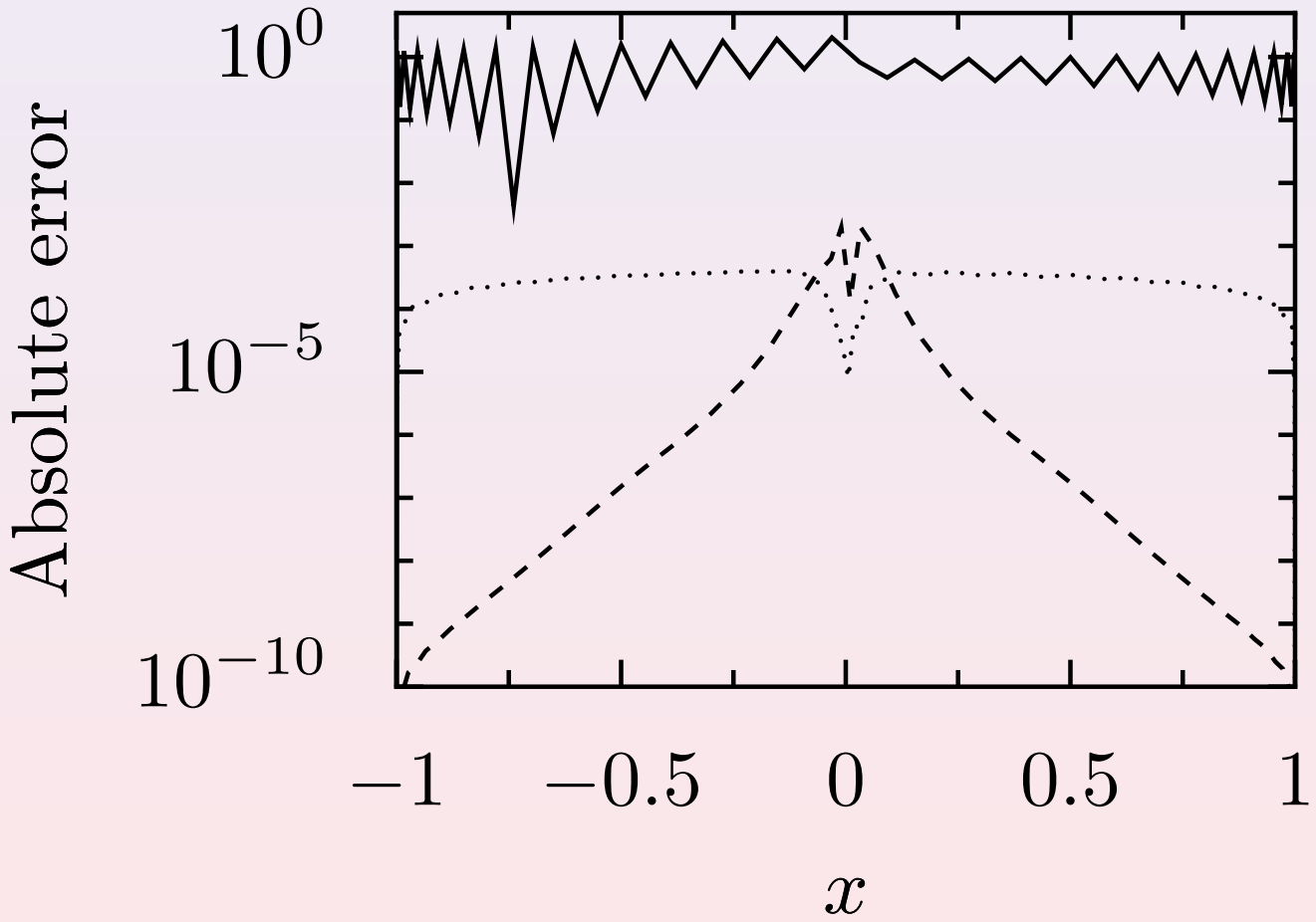

Figure: L'erreur absolue si $n = 50$ et $m = 10$.

La méthode spectrale rationnelle

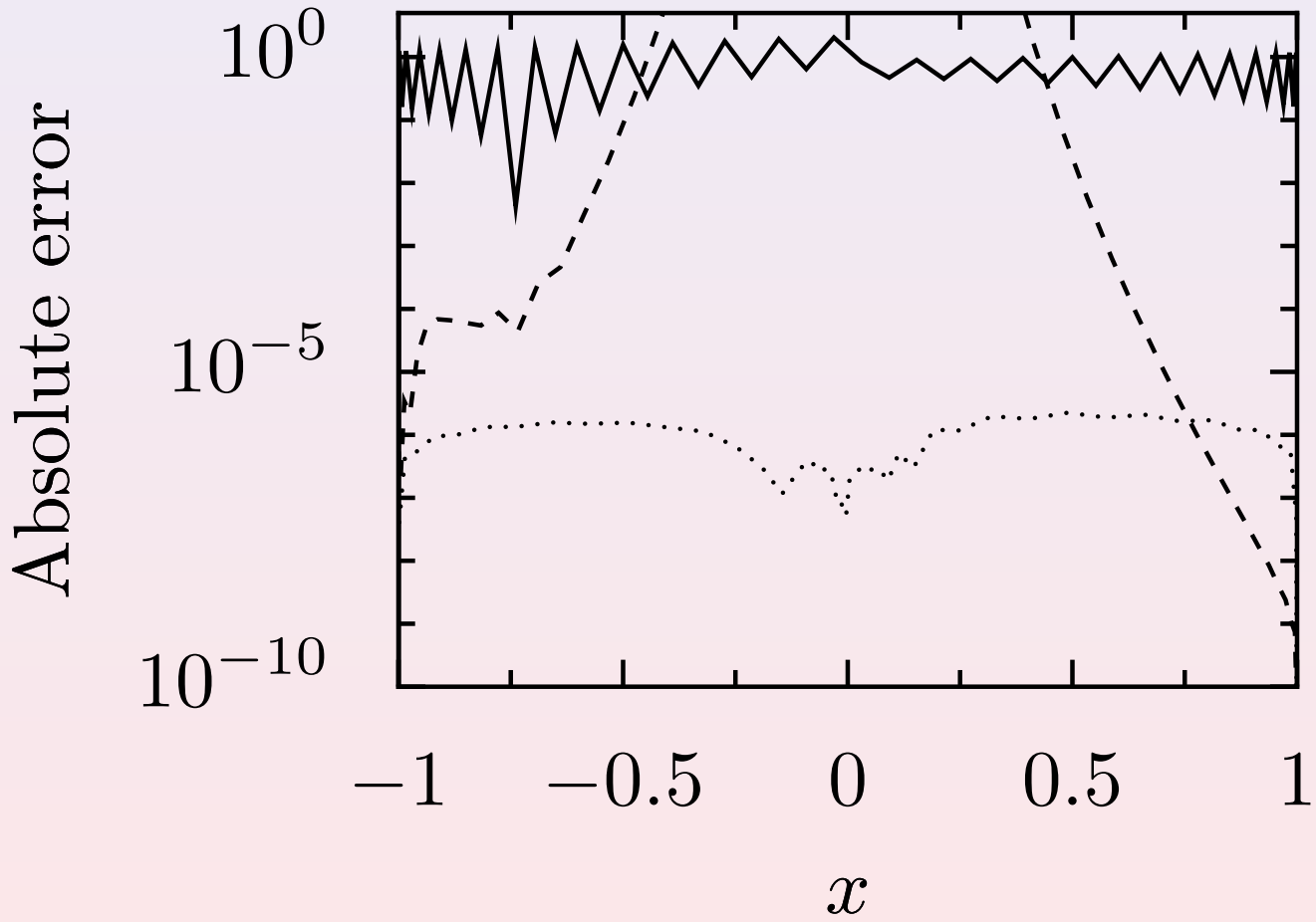

Figure: L'erreur absolue si $n = 50$ et $m = 24$.

Sommaire

1. Motivation
   - Formules de quadratures rationnelles
   - Méthode spectrale rationnelle
2. Fonctions rationnelles orthonormales (ORFs)
   - Les ORFs
   - Formules de quadratures rationnelles de Gauss
3. Les ORFs de Tchebychev
   - Expressions explicites
   - Calculer les nœuds rationnels de Tchebychev

Les ORFs

Les fonctions rationnelles

$$f_n(x) = \frac{c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_0}{(1 - x/\alpha_1)(1 - x/\alpha_2) \cdot \ldots \cdot (1 - x/\alpha_n)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

- $c_0, c_1, \ldots, c_n$: arbitraires dans $\mathbb{C}$
- $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$: fixes dans $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus [-1, 1]$

L'espace des fonctions rationnelles

- $n > 0$: $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ = l'espace des fonctions rationnelles à pôles dans $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$
- $\mathcal{L}_{-1} = \{0\}$, $\mathcal{L}_0 = \mathbb{C}$ et $\mathcal{L} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$
- $\mathcal{L}_{-1} \subset \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{L}_n \subset \ldots \subset \mathcal{L}$

Les ORFs

Les fonctions rationnelles

$$f_n(x) = \frac{c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_0}{(1 - x/\alpha_1)(1 - x/\alpha_2) \cdot \ldots \cdot (1 - x/\alpha_n)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

- $c_0, c_1, \ldots, c_n$: arbitraires dans $\mathbb{C}$
- $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$: fixes dans $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus [-1, 1]$

L'espace des fonctions rationnelles

- $n > 0$: $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ = l'espace des fonctions rationnelles à pôles dans $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$
- $\mathcal{L}_{-1} = \{0\}$, $\mathcal{L}_0 = \mathbb{C}$ et $\mathcal{L} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$
- $\mathcal{L}_{-1} \subset \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{L}_n \subset \ldots \subset \mathcal{L}$

Les ORFs

Notation

$I = [-1, 1], \quad X \subseteq \mathbb{C} : \ \overline{X} = X \cup \{\infty\}$ et $X_I = \{x \in X : x \notin I\}$

Une base pour $\mathcal{L}_n$

$b_k(x) = \prod_{j=1}^{k} \frac{x}{1-x/\alpha_j}, \quad \alpha_j \in \overline{\mathbb{C}}_I$

$\mathcal{L}_n = \text{span}\{1, b_1(x), \ldots, b_n(x)\}$

Polynômes

$\forall j : \alpha_j = \infty \Rightarrow b_k(x) \equiv x^k$

$\mathcal{L}_n \equiv \mathcal{P}_n = \text{span}\{1, x, \ldots, x^n\}$

Les fonctions rationnelles orthonormales (ORFs)

Considérons une mesure positive μ sur I et un produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_\mu = \int_I f(x) g^c(x) d\mu(x) \quad g^c(x) = \overline{g(\overline{x})}$$

$\rightarrow$ ORFs: $\varphi_k(x)$

$$\varphi_k \in \mathcal{L}_k \setminus \mathcal{L}_{k-1}, \ \varphi_k \perp_\mu \mathcal{L}_{k-1} \text{ et } \|\varphi_k\|_\mu = \sqrt{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle_\mu} = 1.$$

Les ORFs

Notation

$I = [-1, 1], \quad X \subseteq \mathbb{C} : \ \overline{X} = X \cup \{\infty\}$ et $X_I = \{x \in X : x \notin I\}$

Une base pour $\mathcal{L}_n$

$b_k(x) = \prod_{j=1}^{k} \frac{x}{1-x/\alpha_j}, \quad \alpha_j \in \overline{\mathbb{C}}_I$

$\mathcal{L}_n = \text{span}\{1, b_1(x), \ldots, b_n(x)\}$

Polynômes

$\forall j : \alpha_j = \infty \Rightarrow b_k(x) \equiv x^k$

$\mathcal{L}_n \equiv \mathcal{P}_n = \text{span}\{1, x, \ldots, x^n\}$

Les fonctions rationnelles orthonormales (ORFs)

Considérons une mesure positive μ sur I et un produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_\mu = \int_I f(x) g^c(x) d\mu(x) \quad g^c(x) = \overline{g(\overline{x})}$$

$\rightarrow$ ORFs: $\varphi_k(x)$

$$\varphi_k \in \mathcal{L}_k \setminus \mathcal{L}_{k-1}, \ \varphi_k \perp_\mu \mathcal{L}_{k-1} \text{ et } \|\varphi_k\|_\mu = \sqrt{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle_\mu} = 1.$$

Les ORFs

Notation

$I = [-1, 1], \quad X \subseteq \mathbb{C} : \ \overline{X} = X \cup \{\infty\}$ et $X_I = \{x \in X : x \notin I\}$

Une base pour $\mathcal{L}_n$

$b_k(x) = \prod_{j=1}^{k} \frac{x}{1-x/\alpha_j}, \quad \alpha_j \in \overline{\mathbb{C}}_I$

$\mathcal{L}_n = \text{span}\{1, b_1(x), \ldots, b_n(x)\}$

Polynômes

$\forall j : \alpha_j = \infty \Rightarrow b_k(x) \equiv x^k$

$\mathcal{L}_n \equiv \mathcal{P}_n = \text{span}\{1, x, \ldots, x^n\}$

Les fonctions rationnelles orthonormales (ORFs)

Considérons une mesure positive μ sur I et un produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_\mu = \int_I f(x) g^c(x) d\mu(x) \quad g^c(x) = \overline{g(\overline{x})}$$

$\rightarrow$ ORFs: $\varphi_k(x)$

$$\varphi_k \in \mathcal{L}_k \setminus \mathcal{L}_{k-1}, \ \varphi_k \perp_\mu \mathcal{L}_{k-1} \text{ et } \|\varphi_k\|_\mu = \sqrt{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle_\mu} = 1.$$

Les ORFs

Théorème 1 (A. Bultheel 1999, J. Van Deun 2003, K. Deckers 2009)

Supposons que $\alpha_{-1} = \alpha_0 = \infty$, $\varphi_{-1}(x) \equiv 0$, $\varphi_0(x) \equiv \|1\|_\mu^{-1}$ et $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$. Les ORFs φ_k, $k = 0, 1, \ldots$ répondent à la relation de récurrence suivante:

$$\begin{aligned} & x\left[\varphi_k(x) - a_k \mathbf{i} 2\Im\left\{1/\alpha_{k-1}\right\}\varphi_{k-1}(x)\right] \\ & \quad = a_k\left(1 - x/\alpha_{k-1}\right)\varphi_{k-1}(x) + b_k\left(1 - x/\alpha_k\right)\varphi_k(x) \\ & \quad\quad + c_k\left(1 - x/\alpha_{k+1}\right)\varphi_{k+1}(x), \qquad b_k \in \mathbb{C}, \;\; a_k, c_k \in \mathbb{C}_0. \end{aligned}$$

En plus,

$$a_k = \left[1 + b_k \mathbf{i} 2\Im\left\{1/\alpha_k\right\}\right]\overline{c}_{k-1}, \qquad k > 0.$$

Les ORFs

Théorème 1 (suite)

$$b_k = f\left(\langle Z_{k+1}\varphi_{k-1}\,,\varphi_j\rangle_\mu\,,\langle Z_{k+1}\varphi_k\,,\varphi_j\rangle_\mu\right),\quad j<k+1,$$

avec $Z_i(x)=\frac{x}{1-x/\alpha_i}$, $i\geqslant 0$, et

$$|c_k| = \left\| Z_{k+1}\left[\left(1-\frac{b_k}{Z_k}\right)\varphi_k - \frac{a_k}{Z_{k-1}^c}\varphi_{k-1}\right]\right\|_\mu,\quad \Im\{\alpha_{k+1}\}=0,$$

ou

$$|c_k| = g\left(b_k,\alpha_{k-1},\alpha_k,\alpha_{k+1}\right),\quad \Im\{\alpha_{k+1}\}\neq 0,$$

Les ORFs

Notation

Soit $\mathbf{I}_n$ la matrice unité, $\mathbf{D}_n = \mathrm{diag}(\alpha_0^{-1}, \ldots, \alpha_{n-1}^{-1})$,

$$\mathbf{J}_n = \begin{pmatrix} b_0 & c_0 & & \\ a_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-2} \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} 0 & & \\ a_1 \mathbf{i} 2\Im\{1/\alpha_0\} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots \\ & & a_{n-1}\mathbf{i}2\Im\{1/\alpha_{n-2}\} \quad 0 \end{pmatrix},$$

et $\mathbf{B}_n = \mathbf{J}_n\mathbf{D}_n + \mathbf{I}_n - \mathbf{S}_n$.

Les ORFs

Conséquence du Théorème 1

Les zéros $\{x_k\}_{k=1}^n$ d'une ORF $\varphi_n \in \mathcal{L}_n$ sont les valeurs propres du GEP

$$\mathbf{J}_n \underline{v}_k = x_k \mathbf{B}_n \underline{v}_k, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

$$\underline{v}_k = \eta_k \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} |\varphi_j(x_k)|^2 \right\}^{-1/2} \begin{pmatrix} \varphi_0(x_k) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(x_k) \end{pmatrix}, \quad |\eta_k| = 1.$$

Lemme 1

Soit $\{x_k\}_{k=1}^n$ les zéros d'une ORF $\varphi_n \in \mathcal{L}_n$. Alors, $\{x_k\}_{k=1}^n \subset I$ si et seulement si $\alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}_I$.

Les ORFs

Conséquence du Théorème 1

Les zéros $\{x_k\}_{k=1}^n$ d'une ORF $\varphi_n \in \mathcal{L}_n$ sont les valeurs propres du GEP

$$\mathbf{J}_n \underline{v}_k = x_k \mathbf{B}_n \underline{v}_k, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

$$\underline{v}_k = \eta_k \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} |\varphi_j(x_k)|^2 \right\}^{-1/2} \begin{pmatrix} \varphi_0(x_k) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(x_k) \end{pmatrix}, \quad |\eta_k| = 1.$$

Lemme 1

Soit $\{x_k\}_{k=1}^n$ les zéros d'une ORF $\varphi_n \in \mathcal{L}_n$. Alors, $\{x_k\}_{k=1}^n \subset I$ si et seulement si $\alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}_I$.

Les ORFs

Définition

On appelle $Q_n \in \mathcal{L}_n$ une para-ORF si et seulement si $Q_n(x) = c\left\{\varphi_n(x) + \tau \frac{b_n(x)}{b_n^c(x)}\varphi_n^c(x)\right\}$, $c \in \mathbb{C}_0$ et $|\tau| = 1$.

Lemme 2

Les zéros $\{x_k\}_{k=1}^n$ d'une para-ORF $Q_n \in \mathcal{L}_n$ sont réels. En plus, il existe un ensemble non vide de τ's tel que $\{x_k\}_{k=1}^n \subset I$.

Lemme 3

Les zéros $\{x_k\}_{k=1}^n$ d'une para-ORF $Q_n \in \mathcal{L}_n$ sont les valeurs propres d'un GEP modifié: $a_{n-1}, b_{n-1} \rightarrow a_{n-1}(\tau), b_{n-1}(\tau)$.

Les ORFs

Définition

On appelle $Q_n \in \mathcal{L}_n$ une para-ORF si et seulement si $Q_n(x) = c\left\{\varphi_n(x) + \tau \frac{b_n(x)}{b_n^c(x)}\varphi_n^c(x)\right\}$, $c \in \mathbb{C}_0$ et $|\tau| = 1$.

Lemme 2

Les zéros $\{x_k\}_{k=1}^n$ d'une para-ORF $Q_n \in \mathcal{L}_n$ sont réels. En plus, il existe un ensemble non vide de τ's tel que $\{x_k\}_{k=1}^n \subset I$.

Lemme 3

Les zéros $\{x_k\}_{k=1}^n$ d'une para-ORF $Q_n \in \mathcal{L}_n$ sont les valeurs propres d'un GEP modifié: $a_{n-1}, b_{n-1} \rightarrow a_{n-1}(\tau), b_{n-1}(\tau)$.

Les ORFs

Définition

On appelle $Q_n \in \mathcal{L}_n$ une para-ORF si et seulement si $Q_n(x) = c\left\{\varphi_n(x) + \tau \frac{b_n(x)}{b_n^c(x)}\varphi_n^c(x)\right\}$, $c \in \mathbb{C}_0$ et $|\tau| = 1$.

Lemme 2

Les zéros $\{x_k\}_{k=1}^n$ d'une para-ORF $Q_n \in \mathcal{L}_n$ sont réels. En plus, il existe un ensemble non vide de τ's tel que $\{x_k\}_{k=1}^n \subset I$.

Lemme 3

Les zéros $\{x_k\}_{k=1}^n$ d'une para-ORF $Q_n \in \mathcal{L}_n$ sont les valeurs propres d'un GEP modifié: $a_{n-1}, b_{n-1} \rightarrow a_{n-1}(\tau), b_{n-1}(\tau)$.

Sommaire

1. Motivation
   - Formules de quadratures rationnelles
   - Méthode spectrale rationnelle
2. Fonctions rationnelles orthonormales (ORFs)
   - Les ORFs
   - Formules de quadratures rationnelles de Gauss
3. Les ORFs de Tchebychev
   - Expressions explicites
   - Calculer les nœuds rationnels de Tchebychev

Quadratures rationnelles

Théorème 2

Soit $\{x_k\}_{k=1}^n \subset I$ les zéros d'une para-ORF et soit

$$\lambda_k = \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} |\varphi_j(x_k)|^2 \right\}^{-1}.$$

Alors, la formule de quadrature

$$\int_I f(x) d\mu(x) \approx \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

est exacte pour chaque
$f \in \mathcal{L}_{n-1} \cdot \mathcal{L}_{n-1}^c = \mathcal{L}\{\alpha_1, \overline{\alpha}_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \overline{\alpha}_{n-1}\}$. Si $\alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}_I$, la formule de quadrature est exacte pour chaque $f \in \mathcal{L}_n \cdot \mathcal{L}_{n-1}^c$.

Quadratures rationnelles

Théorème 2

Soit $\{x_k\}_{k=1}^n \subset I$ les zéros d'une para-ORF et soit

$$\lambda_k = \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} |\varphi_j(x_k)|^2 \right\}^{-1}.$$

Alors, la formule de quadrature

$$\int_I f(x) d\mu(x) \approx \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

est exacte pour chaque $f \in \mathcal{L}_{n-1} \cdot \mathcal{L}_{n-1}^c = \mathcal{L}\{\alpha_1, \overline{\alpha}_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \overline{\alpha}_{n-1}\}$. Si $\alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}_I$, la formule de quadrature est exacte pour chaque $f \in \mathcal{L}_n \cdot \mathcal{L}_{n-1}^c$.

Quadratures rationnelles

- Les nœuds sont les valeurs propres d'un GEP modifié.
- Soit $\underline{v}_k$ le vecteur propre normé selon de x_k, et soit $v_{k,1}$ le premier élément de $\underline{v}_k$. Alors,

$$\lambda_k = |v_{k,1}|^2 \cdot \|1\|_\mu^2 .$$

- Sachant les coefficients a_k, b_k et c_k, la complexité de calculer les nœuds et les poids est $\mathcal{O}(n^2)$.
- Le calcul des coefficients à l'aide de la relation de récurrence n'est pas stable.

Sommaire

1. Motivation
   - Formules de quadratures rationnelles
   - Méthode spectrale rationnelle
2. Fonctions rationnelles orthonormales (ORFs)
   - Les ORFs
   - Formules de quadratures rationnelles de Gauss
3. Les ORFs de Tchebychev
   - Expressions explicites
   - Calculer les nœuds rationnels de Tchebychev

Les ORFs de Tchebychev

- Considérons la mesure de Tchebyshev $d\mu(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et le produit scalaire comme précédemment.
- Supposons que $x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$, $|z| \leqslant 1$, et $\alpha_k = \frac{1}{2}(\beta_k + \beta_k^{-1})$, $|\beta_k| < 1$, $k = 1, 2, \ldots$.
- Soit

$$B_0(z) \equiv 1, \qquad B_k(z) = \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{z - \beta_j}{1 - \overline{\beta}_j z} \right), \ k > 0.$$

- Alors, les ORFs de Tchebyshev sont données explicitement par les expressions suivantes: $\varphi_0(x) \equiv \sqrt{1/\pi}$,

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{1 - |\beta_k|^2}{2\pi}} \left\{ \frac{z B_{k-1}^c(z)}{1 - \beta_k z} + \frac{1}{(z - \beta_k) B_{k-1}(z)} \right\}, \ k > 0.$$

Les ORFs de Tchebychev

- Considérons la mesure de Tchebyshev $d\mu(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et le produit scalaire comme précédemment.
- Supposons que $x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$, $|z| \leqslant 1$, et $\alpha_k = \frac{1}{2}(\beta_k + \beta_k^{-1})$, $|\beta_k| < 1$, $k = 1, 2, \ldots$.
- Soit

$$B_0(z) \equiv 1, \qquad B_k(z) = \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{z - \beta_j}{1 - \overline{\beta}_j z} \right), \ k > 0.$$

- Alors, les ORFs de Tchebyshev sont données explicitement par les expressions suivantes: $\varphi_0(x) \equiv \sqrt{1/\pi}$,

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{1 - |\beta_k|^2}{2\pi}} \left\{ \frac{z B_{k-1}^c(z)}{1 - \beta_k z} + \frac{1}{(z - \beta_k) B_{k-1}(z)} \right\}, \ k > 0.$$

Les ORFs de Tchebychev

- Considérons la mesure de Tchebyshev $d\mu(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et le produit scalaire comme précédemment.
- Supposons que $x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$, $|z| \leqslant 1$, et $\alpha_k = \frac{1}{2}(\beta_k + \beta_k^{-1})$, $|\beta_k| < 1$, $k = 1, 2, \ldots$.
- Soit

$$B_0(z) \equiv 1, \qquad B_k(z) = \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{z - \beta_j}{1 - \overline{\beta}_j z} \right), \ k > 0.$$

- Alors, les ORFs de Tchebyshev sont données explicitement par les expressions suivantes: $\varphi_0(x) \equiv \sqrt{1/\pi}$,

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{1 - |\beta_k|^2}{2\pi}} \left\{ \frac{z B_{k-1}^c(z)}{1 - \beta_k z} + \frac{1}{(z - \beta_k) B_{k-1}(z)} \right\}, \ k > 0.$$

Les ORFs de Tchebychev

- Considérons la mesure de Tchebyshev $d\mu(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et le produit scalaire comme précédemment.
- Supposons que $x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$, $|z| \leqslant 1$, et $\alpha_k = \frac{1}{2}(\beta_k + \beta_k^{-1})$, $|\beta_k| < 1$, $k = 1, 2, \ldots$.
- Soit

$$B_0(z) \equiv 1, \qquad B_k(z) = \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{z - \beta_j}{1 - \overline{\beta}_j z} \right), \ k > 0.$$

- Alors, les ORFs de Tchebyshev sont données explicitement par les expressions suivantes: $\varphi_0(x) \equiv \sqrt{1/\pi}$,

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{1 - |\beta_k|^2}{2\pi}} \left\{ \frac{z B_{k-1}^c(z)}{1 - \beta_k z} + \frac{1}{(z - \beta_k) B_{k-1}(z)} \right\}, \ k > 0.$$

Les ORFs de Tchebychev

Théorème 2

Supposons que les pôles $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n-1}$ sont réels ou complexes conjugués et $\alpha_n = \infty$. Considérons l'espace des fonctions rationnelles

$$\mathcal{T}_n = \left\{ f_n \in \mathcal{L}_n : f_n(x) = \frac{1x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_0}{(1 - x/\alpha_1)(1 - x/\alpha_2) \cdot \ldots \cdot (1 - x/\alpha_{n-1})} \right\}$$

Considérons l'ORF de Tchebychev $\varphi_n \in \mathcal{L}_n$ et soit $T_n(x) = c_n \varphi_n(x) \in \mathcal{T}_n$. Alors,

$$\forall f_n \in \mathcal{T}_n : \quad \max_{x \in I} |T_n(x)| \leqslant \max_{x \in I} |f_n(x)| .$$

Les ORFs de Tchebychev

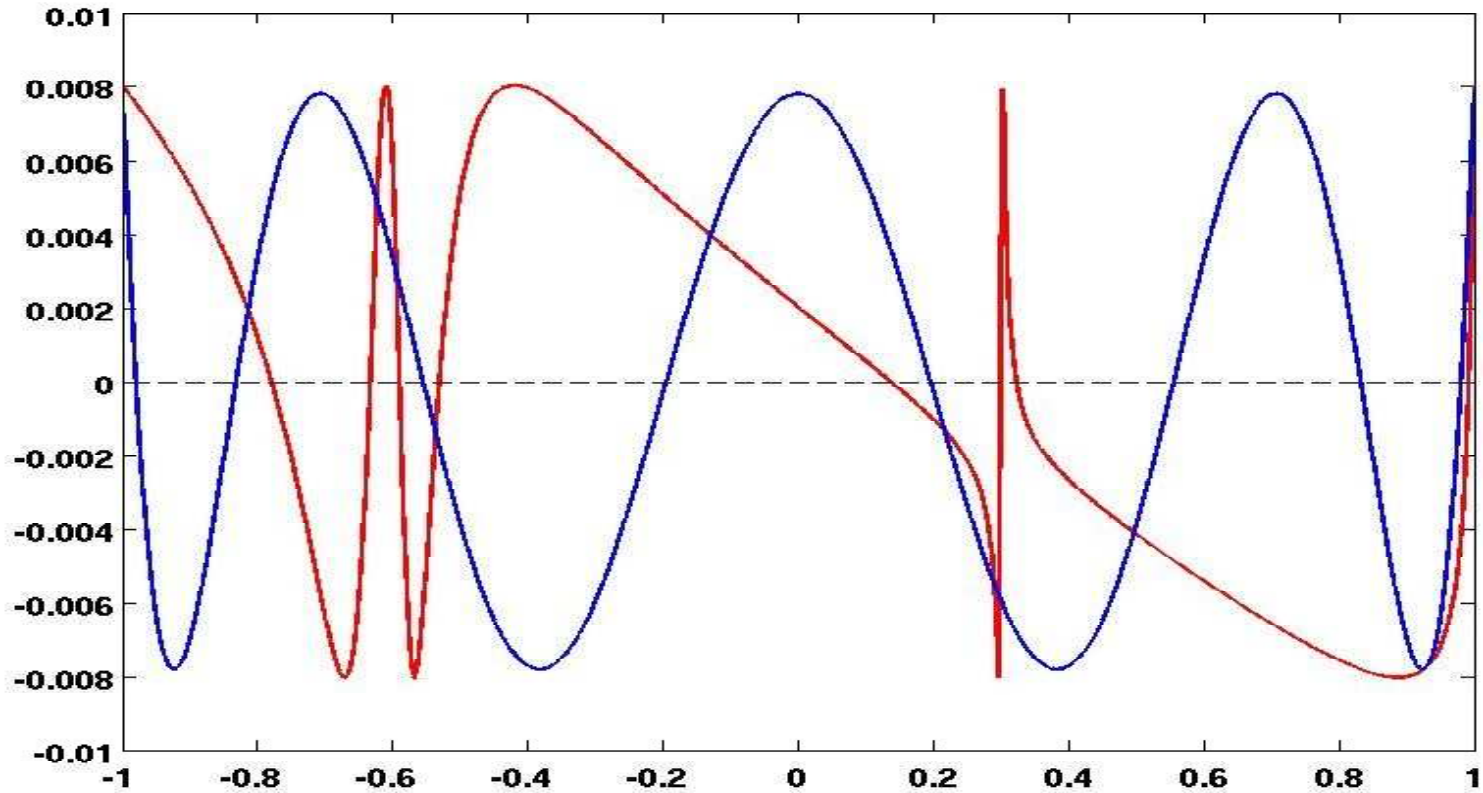

Figure: Les graphiques de $T_8^{\infty}(x)$ (bleu) et $T_8(x)$ (rouge).

Les ORFs de Tchebychev

Les coefficients dans la relation récursive

Les coefficients a_k, b_k et c_k, $k \geqslant 0$, sont donnés explicitement par

$$b_k = \frac{e_k^2(1+\beta_k^2)}{2(1-|\beta_k|^2)} \times \frac{(1-|\beta_k|^2)(\beta_{k+1}+\overline{\beta}_{k-1}) + 2\Re\{\beta_k\}(1-\beta_{k+1}\overline{\beta}_{k-1})}{(1-\beta_{k+1}\beta_k)(1-\beta_k\overline{\beta}_{k-1})},$$

$$c_k = \frac{e_k(1+\beta_{k+1}^2)(1+\beta_k^2)}{2\sqrt{(1-|\beta_{k+1}|^2)(1-|\beta_k|^2)(1-\beta_{k+1}\beta_k)}},$$

$$\beta_{-1} = \beta_0 = 0, \quad e_0 = \sqrt{2} \text{ et } e_k = 1, \ k > 0,$$

et $a_k = [1 + b_k \mathbf{i} 2\Im\{1/\alpha_k\}]\,\overline{c}_{k-1}$, $k > 0$.

Les ORFs de Tchebychev

Considérons une ORF $\tilde{\varphi}_n \in \mathcal{L}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha\}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}_I$. Soit

$$R_n(x) = c \left(\frac{1 - x/\alpha}{1 - x/\alpha_n} \right) \tilde{\varphi}_n(x), \qquad c \in \mathbb{C}_0. \tag{1}$$

Alors,

- $R_n \in \mathcal{L}_n$;
- R_n a les mêmes zéros que $\tilde{\varphi}_n$;
- R_n est une para-ORF.

(En règle générale, la réciproque est fausse. Mais ...)

Soit $R_n \in \mathcal{L}_n$ une para-ORF associée à la mesure de Tchebychev. Si tous les zéros de R_n sont en $(-1, 1)$, ils existent $c \in \mathbb{C}_0$ et une ORF de Tchebychev $\tilde{\varphi}_n \in \mathcal{L}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha\}$ tels que l'égalité en (1) est vrai.

$a_{n-1}(\tau), b_{n-1}(\tau) \to a_{n-1}(\alpha), b_{n-1}(\alpha)$

Les ORFs de Tchebychev

Considérons une ORF $\tilde{\varphi}_n \in \mathcal{L}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha\}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}_I$. Soit

$$R_n(x) = c \left(\frac{1 - x/\alpha}{1 - x/\alpha_n} \right) \tilde{\varphi}_n(x), \qquad c \in \mathbb{C}_0. \tag{1}$$

Alors,

- $R_n \in \mathcal{L}_n$;
- R_n a les mêmes zéros que $\tilde{\varphi}_n$;
- R_n est une para-ORF.

(En règle générale, la réciproque est fausse. Mais ...)
Soit $R_n \in \mathcal{L}_n$ une para-ORF associée à la mesure de Tchebychev. Si tous les zéros de R_n sont en $(-1, 1)$, ils existent $c \in \mathbb{C}_0$ et une ORF de Tchebychev $\tilde{\varphi}_n \in \mathcal{L}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha\}$ tels que l'égalité en (1) est vrai.

$a_{n-1}(\tau), b_{n-1}(\tau) \to a_{n-1}(\alpha), b_{n-1}(\alpha)$

Les ORFs de Tchebychev

Considérons une ORF $\tilde{\varphi}_n \in \mathcal{L}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha\}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}_I$. Soit

$$R_n(x) = c \left(\frac{1 - x/\alpha}{1 - x/\alpha_n} \right) \tilde{\varphi}_n(x), \qquad c \in \mathbb{C}_0. \tag{1}$$

Alors,

- $R_n \in \mathcal{L}_n$;
- R_n a les mêmes zéros que $\tilde{\varphi}_n$;
- R_n est une para-ORF.

(En règle générale, la réciproque est fausse. Mais ...)
Soit $R_n \in \mathcal{L}_n$ une para-ORF associée à la mesure de Tchebychev. Si tous les zéros de R_n sont en $(-1, 1)$, ils existent $c \in \mathbb{C}_0$ et une ORF de Tchebychev $\tilde{\varphi}_n \in \mathcal{L}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha\}$ tels que l'égalité en (1) est vrai.
$a_{n-1}(\tau), b_{n-1}(\tau) \to a_{n-1}(\alpha), b_{n-1}(\alpha)$

Les ORFs de Tchebychev

Les poids

Les poids dans la formule de quadrature rationnelle de Gauss-Tchebychev sont donnés explicitement par

$$\lambda_k = 2\pi \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{n-1} g(x_k, \alpha_j) + \frac{1}{2} g(x_k, \alpha) \right\}^{-1}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

avec

$$\begin{aligned} g(x, \alpha) &:= 2\Re \left\{ \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha - x} \right\} \\ &= (1 - |\beta|^2) \left[|z - \beta|^{-2} + \left| z - \overline{\beta} \right|^{-2} \right] \\ &= G(\theta, r, \phi), \quad z = e^{\mathbf{i}\theta}, \ \beta = r e^{\mathbf{i}\phi}. \end{aligned}$$

Les ORFs de Tchebychev

Les nœuds

Les nœuds $x_k = (z_k + z_k^{-1})/2 = \cos\theta_k$ dans la formule de quadrature rationnelle de Gauss-Tchebychev sont donnés implicitement par

$$z_k B_n(z_k) B_{n-1}^c(z_k) = -1, \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$\Leftrightarrow F(\theta_k) := \sum_{j=1}^{n-1} f_{\beta_j}(\theta_k) + \frac{1}{2} f_\beta(\theta_k) - (n-1)\theta_k = \pi\left(k - \frac{1}{2}\right),$$

avec $\theta_k \in [0, \pi]$ et

$$f_\beta(\theta) := \arg(z-\beta) + \arg(z-\overline{\beta}) \quad \left(= \tilde{f}(\theta, r, \phi),\ z = e^{\mathbf{i}\theta},\ \beta = re^{\mathbf{i}\phi}\right),$$

et $\arg(\cdot) \in [-\pi/2, 3\pi/2)$ est l'argument d'un nombre complexe.

Les ORFs de Tchebychev

Un exemple

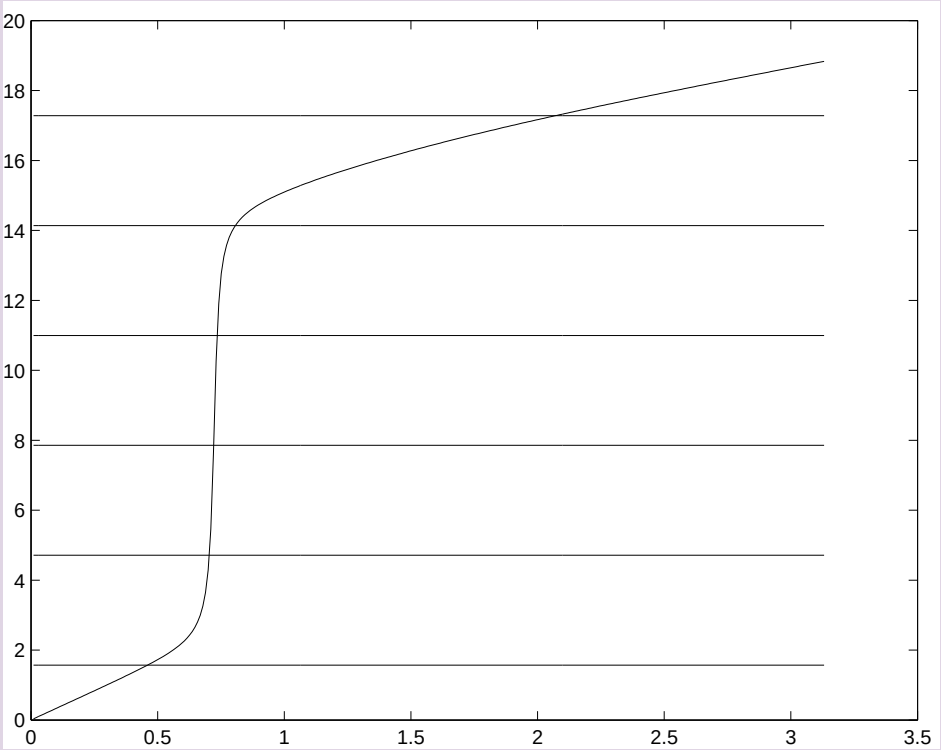

Figure: Les graphiques de $F(\theta)$ et $\pi(k-1/2)$, $k=1,\ldots,n=6$, pour la suite de pôles $\{0.75+0.01\mathbf{i}, 0.75+0.01\mathbf{i}, 0.75+0.01\mathbf{i}, 0.75+0.01\mathbf{i}, 2, 2\}$.

Sommaire

1. Motivation
   - Formules de quadratures rationnelles
   - Méthode spectrale rationnelle
2. Fonctions rationnelles orthonormales (ORFs)
   - Les ORFs
   - Formules de quadratures rationnelles de Gauss
3. Les ORFs de Tchebychev
   - Expressions explicites
   - Calculer les nœuds rationnels de Tchebychev

Procédure numérique

Des propriétés importantes de $F(\theta)$

- La fonction est continue et strictement croissante sur $[0, \pi]$ avec $F(0) = 0$ et $F(\pi) = n\pi$.
- θ_k est la seule solution de $F(\theta) = \pi(k - 1/2)$ sur $[0, \pi]$
- $F(\theta_k) - F(\theta_{k-1}) = \pi$ et $F(\pi) - F(\theta_n) = F(\theta_1) - F(0) = \pi/2$.
- Si $\alpha_j = \infty$, $j = 1, 2, \ldots$, alors $F(\theta) = n\theta$.

$\Rightarrow$ itérations de Newton-Raphson avec des valeurs initiales $\theta_k^{(0)}$

Procédure numérique

Newton-Raphson

Nous proposons deux méthodes pour obtenir des valeurs initiales:

- à l'aide d'un polynôme cubique d'interpolation Hermite par parties (PCHIP)
- à l'aide d'une estimation des points d'inflexion internes (IIP)

Si les itérations de Newton-Raphson ne convergent pas(*), nous utilisons la méthode de dichotomie.
(*) Dans nos applications, on a toujours observé convergence de la méthode de Newton-Raphson.

Procédure numérique

Newton-Raphson

Nous proposons deux méthodes pour obtenir des valeurs initiales:

- à l'aide d'un polynôme cubique d'interpolation Hermite par parties (PCHIP)
- à l'aide d'une estimation des points d'inflexion internes (IIP)

Si les itérations de Newton-Raphson ne convergent pas(*), nous utilisons la méthode de dichotomie.
(*) Dans nos applications, on a toujours observé convergence de la méthode de Newton-Raphson.

Procédure numérique

PCHIP

- Différence avec une spline cubique:
  - respecte la monotonicité;
  - moins cher à construire;
  - la deuxième dérivée n'est pas nécessairement continue.
- Soit $\theta_0^\infty = 0$, $\theta_{n+1}^\infty = \pi$ et $x_k^\infty = \cos\theta_k^\infty$, $k = 1, \ldots, n$, les nœuds de Tchebychev.
- Soit $P(\cdot)$ l'approximation de la fonction $F^{-1}(\theta)$:

$$P(F(\theta_k^\infty)) = F^{-1}(F(\theta_k^\infty)) = \theta_k^\infty, \quad k = 0, \ldots, n+1.$$

- Alors, nous obtenons des valeurs initiales par

$$\theta_k^{(0)} = P\left(\pi(k - 1/2)\right)$$

Procédure numérique

PCHIP

- Différence avec une spline cubique:
  - respecte la monotonicité;
  - moins cher à construire;
  - la deuxième dérivée n'est pas nécessairement continue.
- Soit $\theta_0^\infty = 0$, $\theta_{n+1}^\infty = \pi$ et $x_k^\infty = \cos\theta_k^\infty$, $k = 1, \ldots, n$, les nœuds de Tchebychev.
- Soit $P(\cdot)$ l'approximation de la fonction $F^{-1}(\theta)$:

$$P(F(\theta_k^\infty)) = F^{-1}(F(\theta_k^\infty)) = \theta_k^\infty, \quad k = 0, \ldots, n+1.$$

- Alors, nous obtenons des valeurs initiales par

$$\theta_k^{(0)} = P\left(\pi(k - 1/2)\right)$$

Procédure numérique

PCHIP (suite)

- Une borne pour l'erreur:

$$\theta_j^{\infty} \leqslant \theta_k^{(0)} \leqslant \theta_{j+1}^{\infty} \Rightarrow \theta_j^{\infty} \leqslant \theta_k \leqslant \theta_{j+1}^{\infty} \Rightarrow \left|\theta_k - \theta_k^{(0)}\right| \leqslant \frac{\pi}{n}.$$

- Si nécessaire, on a un intervalle initial $[\theta_j^{\infty}, \theta_{j+1}^{\infty}]$ pour la méthode de dichotomie (cet intervalle peut être réduit en plus pendant les itérations de Newton-Raphson)
- Critère d'arrêt:
  $\left|\theta_k^{(i+1)} - \theta_k^{(i)}\right| < \varepsilon$, ou $\theta_k^{(i)} \notin [\theta_j^{\infty}, \theta_{j+1}^{\infty}]$, ou $i > N$
  ($\varepsilon = \mathcal{O}(\text{eps})$ et $N = 10$)
  Dans toutes nos expériences, les itérations de Newton-Raphson convergent si les pôles ne sont pas 'proche de' l'intervalle.

Procédure numérique

Des pôles proches de l'intervalle

Des pôles attirent des nœuds. Plus proche un pôle est de l'intervalle, plus forte est sa force d'attraction $\Rightarrow$ des pentes fortes sur le graphique de $F(\theta)$

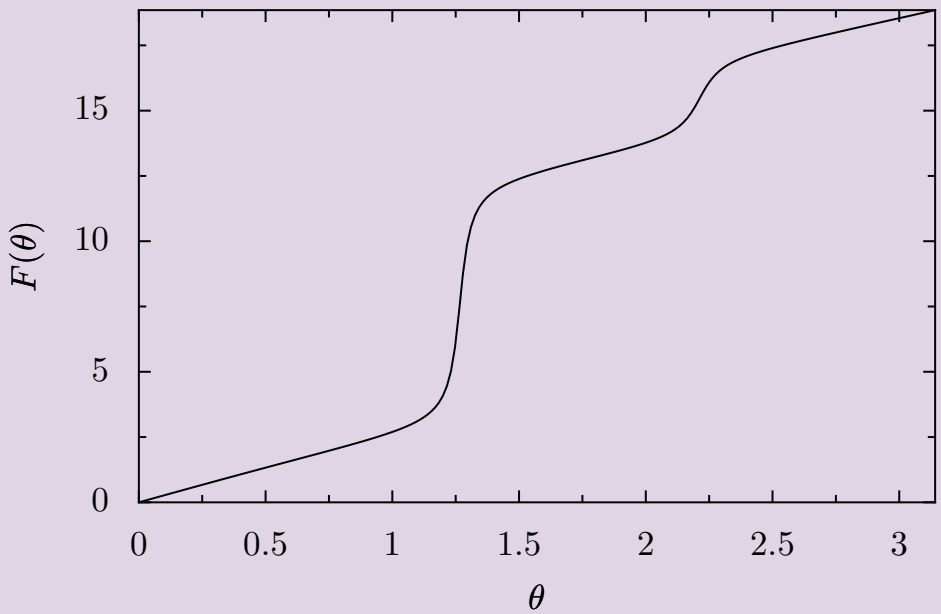

Figure: Le graphique de $F(\theta)$ pour $n = 6$ et la suite de pôles $\{2,\ 0.3 + 0.03\mathbf{i}, 0.3 + 0.03\mathbf{i}, 0.3 + 0.03\mathbf{i},\ -0.6 + 0.05\mathbf{i},\ -2\}$.

Procédure numérique

Des pôles proches de l'intervalle (suite)

- L'approximation de $F^{-1}(\theta)$ par le PCHIP se dégrade dans un voisinage de ces pentes fortes.
- Les itérations de Newton-Raphson peuvent diverger pour les nœuds dans un voisinage de ces pentes fortes.
- La solution: détectez les pentes fortes à l'aide du point d'inflexion local.

Procédure numérique

Théorème 3

Soit

$$r = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\beta_k| \in [0, 1) \quad \text{et} \quad \Delta = \frac{1+r}{1-r}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \min_{1 \leqslant k \leqslant n-1} |\theta_k - \theta_{k-1}| &\geqslant \frac{1}{\Delta} \frac{\pi}{n} \\ \max_{1 \leqslant k \leqslant n-1} |\theta_k - \theta_{k-1}| &\leqslant \Delta \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

Procédure numérique

- Il n'y a plus que $[\Delta]$ nœuds entre deux nœuds de Tchebychev successifs et vice versa.
- La fonction $\Delta = \Delta(r)$ est strictement croissante sur $[0, 1)$.
- $\Delta(0) = 1$ et $\Delta(1/3) = 2$.

Définition

On dit qu'un pôle α_k est 'peut-être proche de' l'intervalle si et seulement si $|\beta_k| > 1/3$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\Re\{\alpha_k\}}{5/3}\right)^2 + \left(\frac{\Im\{\alpha_k\}}{4/3}\right)^2 < 1.$$

Procédure numérique

- Il n'y a plus que $[\Delta]$ nœuds entre deux nœuds de Tchebychev successifs et vice versa.
- La fonction $\Delta = \Delta(r)$ est strictement croissante sur $[0, 1)$.
- $\Delta(0) = 1$ et $\Delta(1/3) = 2$.

Définition

On dit qu'un pôle α_k est 'peut-être proche de' l'intervalle si et seulement si $|\beta_k| > 1/3$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\Re\{\alpha_k\}}{5/3}\right)^2 + \left(\frac{\Im\{\alpha_k\}}{4/3}\right)^2 < 1.$$

Procédure numérique

La valeur 1/3 a été choisie d'une manière heuristique, mais:

- Dans toutes nos expériences, les itérations de Newton-Raphson convergent si aucun pôle n'est peut-être proche de l'intervalle.
- Même dans un voisinage des pentes fortes, à cause des pôles peut-être proches de l'intervalle, l'approximation de $F^{-1}(\theta)$ par le PCHIP peut être encore suffisamment bonne.
- Les points d'inflexion dans les pentes fortes, causés par des pôles peut-être proches de l'intervalle, peuvent être bien approchés à l'aide du Lemme 4 qui suit.

Procédure numérique

Lemme 4

Si $\beta \neq 0$, la fonction $f'_\beta(\theta)$ a un maximum local à

$$\theta_* = \arccos[H(\beta)],$$

$$H(\beta) := \frac{\Re\{\beta\}\left((1+|\beta|^2)^2 + 4\Im\{\beta\}^2\right)}{2\,|\beta|\left(|\beta|\,(1+|\beta|^2) + |\Im\{\beta\}|\sqrt{(1+|\beta|^2)^2 + 4\Re\{\beta\}^2}\right)}.$$

Si $H(\beta) > 1$ (respectivement < -1), la fonction $f'_\beta(\theta)$ a un maximum local à $\theta_* = 0$ (respectivement $= \pi$).
Dans la limite $\alpha \to \alpha_* \in [-1, 1]$, la fonction $F(\theta)$ est discontinue dans $\theta_* = \arccos(\alpha_*)$ à un saut

$$F(\theta_*+) - F(\theta_*-) = m\pi, \qquad m = \#\{\alpha : \alpha \to \alpha_*\}.$$

Procédure numérique

Définition

On dit qu'un pôle α_k est 'proche de' l'intervalle si et seulement si α_k est peut-être proche de l'intervalle et

$$F'(\theta_*) > 2\frac{F(\theta_{j+1}^{\infty}) - F(\theta_j^{\infty})}{\theta_{j+1}^{\infty} - \theta_j^{\infty}},$$

avec

$$\theta_* = \arccos[H(\beta_k)] \in [\theta_j^{\infty}, \theta_{j+1}^{\infty}].$$

De nouveau, le facteur 2 a été choisi d'une manière heuristique, mais ça donnait des résultats satisfaisants dans toutes nos expériences.

Procédure numérique

IIP

- Soit $\{\theta_{*,1}, \ldots, \theta_{*,j}, \ldots, \theta_{*,m}\}$ la suite de points d'inflexion occasionnés par des pôles proches de l'intervalle, et soit n_j la multiplicité de $\theta_{*,j}$.
- Définissons

$$\tilde{\theta}_{j+1} = \frac{\theta_{*,j} + \theta_{*,j+1}}{2} + \frac{\pi}{4}\left(\frac{n_j}{F'(\theta_{*,j})} - \frac{n_{j+1}}{F'(\theta_{*,j+1})}\right)$$

- Pour tous les $\theta_k \in [\tilde{\theta}_j, \tilde{\theta}_{j+1}] \rightarrow \theta_k^{(0)} = \theta_{*,j}$
- Si les itérations de Newton-Raphson ne convergent pas: $\theta_k > \theta_{*j,*} \rightarrow \theta_k^{(0)} = \theta_{*,j+1}$ et $\theta_k < \theta_{*j,*} \rightarrow \theta_k^{(0)} = \theta_{*,j-1}$.

Procédure numérique

La méthode de dichotomie

- Les itérations de Newton-Raphson peuvent diverger pour les nœuds dans un voisinage des pôles extrêmement proches de l'intervalle ($\text{dist}(\alpha, I) = \mathcal{O}(\text{eps})$).
- Nous utilisons alors la méthode de dichotomie pour calculer ces nœuds.
- Le problème de calculer les poids appartenant à ces nœuds est mal conditionné (une perte jusqu'à 8 sur 16 digits).
- Mais, dans les applications pratiques, des pôles extrêmement proches de l'intervalle sont très improbables.

Procédure numérique

Mise en œuvre

- Fonction en MATLAB: rcheb.m

$$[X, \Lambda, E] = \text{rcheb}(A, W)$$

$A =$ la suite de pôles, (optionnel) $W \in \{1, 2, 3\}$ (valeur par défaut 1), $X =$ la suite de nœuds, (optionnel) $\Lambda =$ la suite de poids, (optionnel) $E =$ la suite d'estimations de précision pour les nœuds calculés.

- Comparé avec le GEP, cette procédure numérique est plus compliquée. Mais elle est plus efficiente ($\mathcal{O}(mn)$) et plus précise.

Références

- A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen and O. Njåstad. "Orthogonal Rational Functions," volume 5 of *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- K. Deckers and A. Bultheel. "Recurrence and asymptotics for orthogonal rational functions on an interval," *IMA Journal of Numerical Analysis* 29(1):1-23, 2009.
- K. Deckers, A. Bultheel, and J. Van Deun. "A generalized eigenvalue problem for quasi-orthogonal rational functions," *Numerische Mathematik* 117(3):463-506, 2011.
- K. Deckers, J. Van Deun, and A. Bultheel. "Rational Gauss-Chebyshev quadrature formulas for complex poles outside [-1,1]," *Mathematics of Computation* 77(262):967-983, 2008.

Références

- J. Van Deun, K. Deckers, A. Bultheel, and J. A. C. Weideman. "Algorithm 882: Near best fixed pole rational interpolation with applications in spectral methods," *ACM Transactions on Mathematical Software* 35(2):14:1-14:21, 2008.
- K. Deckers, J. Van Deun, and A. Bultheel. "Computing rational Gauss-Chebyshev quadrature formulas with complex poles: The algorithm," *Advances in Engineering Software* 40(8):707-717, 2009.
- J.A.C. Weideman. "Spectral methods based on nonclassical orthogonal polynomials," in *Applications and computation of orthogonal polynomials* (Oberwolfach, 1998), volume 131 of *International Series of Numerical Mathematics*, pp. 239-251, Birkhäuser, Basel, 1999.

Je vous remercie de votre attention.