Le chaos en physique et en mathématiques

S. De Bièvre
UFR de Mathématiques
Université des Sciences et Technologies de Lille

31 janvier 2007

Tout devrait être rendu aussi simple
que possible, mais pas plus.
A.Einstein

Introduction

Tapez les mots-clés « chaos-mathématiques-physique » dans un moteur de recherche et 2.500.000 sites sont proposés à votre exploration : des articles dans des revues spécialisées (comme « Chaos », « Chaos, solitons and fractals », « International Journal of Bifurcation and Chaos », « Nonlinearity »,...), des monographes spécialisés, des conférences internationales, des animations en ligne et des livres de vulgarisation rivalisent afin d'attirer votre attention. L'étude des systèmes dynamiques chaotiques et de leurs applications dans les sciences est en effet devenue un sujet de recherche florissant depuis une trentaine d'années dans différentes branches de la chimie, de la physique, de la biologie et des mathématiques, avec en plus des ramifications diverses vers l'informatique et la théorie de la complexité. Pour se rendre compte de l'étendue du sujet, il suffit de réciter la longue liste des mots-clés qui viennent à l'esprit lorsqu'on pense au chaos : « dépendance sensible aux conditions initiales, exposant de Lyapounov, orbites périodiques instables, bifurcations, théorie ergodique, attracteur étrange, attracteur de Lorenz, effet papillon, chaos déterministe, cascade harmonique, chaos Hamiltonien, ensemble de Julia, fractals, entropie, complexité, codage, propriétés émergentes, chaos spatio-temporel, réseau d'applications couplées, turbulence, chaos quantique, matrices aléatoires... »

Pour des raisons évidentes, je n'ai pas l'intention d'esquisser ici l'histoire de ces développements, ni de donner un résumé des résultats obtenus. Je me contenterai simplement d'expliquer de façon un peu détaillée une ou deux idées centrales qui ont émergé de ces recherches, et qui se sont avérées importantes dans l'analyse d'un grand nombre de systèmes différents, que ce soit en physique, en chimie, en biologie, en hydrodynamique ou en économie. Ces idées sont belles et les questions qui les entourent fascinantes. Mon défi consiste à vous communiquer un peu de mon enthousiasme pour ce sujet. Si vous souhaitez en savoir plus, deux ouvrages de vulgarisation qui vous permettront de commencer votre exploration sont [E] et [R]. Un aperçu du sujet se trouve également à `http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_du_chaos`.

Ce texte reprend en grandes lignes un exposé « grand public » que j'ai donné en mars 2006 dans le cadre d'une série de tels exposés organisés au département de mathématiques de l'USTL. Les transparents de cet exposé peuvent être consultés à `http://www-gat.univ-lille1.fr/~debievre/Talks/talkchaosgrp.pdf` : je n'ai reproduit ici que quelques-unes des illustrations de mes propos qui s'y trouvent. Comme le texte présent, la conférence s'adressait à des non-scientifiques sans formation mathématique ou physique au-delà du collège. L'exposé qui suit sera donc non-technique et ne contient en particulier pas d'équations.

Deux questions

Voici deux questions : « Le présent détermine-t-il le futur ? Peut-on connaître l'avenir ? »

La plupart d'entre nous répondraient sans doute d'un « Non ! » franc et résolu à ces deux questions, et surtout à la deuxième. Ce qui n'empêche que de nombreuses personnes consultent leur horoscope en cachette ou rendent visite à des voyantes. En effet, le futur inquiète et intrigue parce qu'il nous est inconnu. L'incertitude qu'il engendre et les surprises qu'il peut cacher font peur. Notre attitude vis-à-vis de cette deuxième question n'est donc pas sans ambiguité. Il en est de même pour la première. Ainsi nous sommes nombreux à penser que nous pouvons exercer un certain degré de contrôle sur notre propre destin, et nous semblons donc penser que le présent ne détermine pas de façon inéluctable le futur : cela impliquerait en effet que le passé détermine le présent, ce qui nous ôterait tout contrôle sur l'avenir en général et sur le nôtre en particulier. Cela signifierait également que notre destin – et en particulier l'heure précise de notre inévitable disparition – serait écrit dans les étoiles. De quoi se féliciter de l'imprécision des horoscopes.

Dans certains domaines pourtant, notre expérience nous enseigne que nos actions ont des conséquences parfaitement prévisibles. Zinedine Zidane, par exemple, était considéré par tous comme un excellent joueur de foot. Lorsqu'on lui donnait l'occasion de tirer un coup franc à 25 mètres du but adverse, il réussissait régulièrement à mettre une lucarne. Personne ne pense que c'était le fruit du hasard, ni qu'il était béni des dieux. Non, nous étions tous d'accord pour dire qu'il avait du talent et qu'il s'était beaucoup entraîné. Il était par conséquent capable, connaissant la distance qui séparait le ballon du but, la disposition du « mur » adverse et tenant compte d'un éventuel petit vent latéral, d'ajuster son tir afin de donner au ballon la trajectoire voulue. D'ailleurs, nous savons par expérience que, s'il répétait *exactement* le même geste dans exactement les mêmes circonstances, le ballon tracerait exactement la même trajectoire. Et quand par malheur le ballon passait à un mètre au-dessus du but, nous en concluions qu'il n'avait pas correctement ajusté son tir, plutôt que de dire qu'un dieu courroucé avait fait exprès de dévier le ballon pour punir le peuple français, comme on aurait pu le penser dans le passé. Tous les sports de ballon sont d'ailleurs basés sur cette conviction. Les sportifs s'entraînent parce qu'ils pensent que leurs lancers francs et leur coups droits déterminent parfaitement la trajectoire du ballon de basket ou de la balle de tennis. Les livres de cuisine sont aussi basés sur une telle conviction. Si votre cake ne veut pas monter correctement, vous blâmerez la levure ou la température de votre four, pas un esprit maléfique qui rôde dans votre cuisine : si vous ne pensiez pas que l'exécution minutieuse d'une recette mènerait au résultat désiré, vous ne consulteriez jamais un livre de cuisine. En bref : « Mêmes causes, mêmes effets ».

Dans certains domaines donc et dans des circonstances bien contrôlées, nous pensons que le présent détermine le futur et nous nous attendons à pouvoir à la fois *prédire et contrôler* l'avenir au moins partiellement, en fonction du présent. Cette même conviction soustend également les sciences : elles décrivent le monde matériel qui nous entoure, puis tentent d'en prédire et si possible, d'en contrôler le comportement. C'est parce que cela fonctionne raisonnablement bien dans un certain nombre de situations, que les sciences sont considérées comme importantes dans nos sociétés modernes. Si je règle mon réveil le soir au coucher, je sais qu'il sonnera le matin à l'heure souhaitée ; si je pousse le bouton de la cafetière, je sais que le café sera prêt dix minutes plus tard ; si je roule à cent-dix à l'heure, je sais que je fais Lille-Paris en deux heures ; si je mets les lunettes que mon ophtalmologue m'a préscrites, je sais que je saurai lire le journal sans développer une migraine. Ces retombées des sciences et des technologies sont perçues comme constituant des ingrédients essentiels de notre confort, de notre sécurité et de notre bien-être. C'est pour cette raison que les états industrialisés sont prêts à consacrer une partie du budget public aux sciences, et qu'ils souhaitent aujourd'hui favoriser la recherche sur projet, de préférence appliquée. Signalons en passant que ceci contrarie les scientifiques qui, dans leur vaste majorité, aiment la science parce qu'ils sont curieux de comprendre le fonctionnement du monde qui les entoure, sans se soucier des éventuelles applications ou de retombées économiques à court terme :

> « Je ne dis pas : la Science est utile parce qu'elle nous permet à construire des machines ; je dis : les machines sont utiles, parce qu'en travaillant pour nous, elles nous laisseront un jour plus de temps pour faire de la science. »
> (H. Poincaré, La valeur de la Science.)

Déterministe ou pas déterministe ?

Mais revenons à nos questions. Il semblerait donc que le comportement futur de certains systèmes (mon réveil, ma cafetière, le ballon de foot,. . .) est parfaitement déterminé par leur état présent. Un autre exemple, dont il sera beaucoup question par la suite, est celui d'une boule de billard. Il est clair que sa trajectoire est complètement déterminée par sa position et sa vitesse initiales : si vous la lancez deux fois du même point de la table dans la même direction et avec la même vitesse, elle suivra deux fois la même trajectoire. On dit que de tels systèmes sont *déterministes.* Mais ce n'est certainement pas le cas de tous les systèmes.

Imaginez-vous trente adolescents, quinze filles et quinze garçons, qui partent ensemble en voyage durant une semaine. Ils ne se connaissent pas au départ. On peut prédire sans trop de risque que des couples se seront formés à la fin de la semaine. Mais qui sera tombé amoureux de qui ? Même si vous disposez au départ de tous les paramètres de l'état psychologique des acteurs, comme leurs goûts, caractères et tempéraments, pensez-vous qu'il existe des lois gérant la psychologie humaine et qui impliquent qu'un tel sera tombé amoureux d'une telle ? Je ne le pense pas. Il me semble que l'évolution de chacun sera également influencée par d'autres facteurs extérieurs, et que la seule connaissance de l'état psychologique des trente adolescents ne peut pas suffire à figer son évolution future.

Voici un autre exemple, plus quantitatif. Pensez-vous qu'il existe une loi économique qui permet de déterminer la valeur qu'auront demain les actions cotées à la Bourse de Paris, si l'on connaît leur valeur aujourd'hui ? Attention, je ne demande pas si une telle loi a été trouvée (ce n'est pas le cas !), mais si vous pensez qu'une telle loi pourrait exister. En d'autres termes, pensez-vous que les valeurs de toutes ces actions demain dépend uniquement de leurs valeurs actuelles, comme c'était le cas avec la trajectoire du ballon de foot ? Signalons que, si vous pensez qu'une telle loi existe, cela signifie que, si dans deux mois toutes les actions avaient à nouveau la même valeur qu'aujourd'hui, le lendemain leur valeur serait celle de demain : l'histoire de la Bourse de Paris se répéterait parfaitement. Personnellement, je ne pense pas qu'une telle loi existe. En effet, il est fort probable que l'évolution de la valeur de ces actions est couplée à l'évolution d'un grand nombre d'autres paramètres économiques, politiques et sociaux et n'est pas déterminée uniquement par leur valeur actuelle. Tout ceci explique par ailleurs la prudence de votre banquier lorsqu'il fait de la publicité pour les produits financiers qu'il essaie de vous vendre :

> « Les performances passées ne présument en rien des performances futures. »

Quelles peuvent être les raisons pour lesquelles tel ou tel système n'est pas déterministe ? L'hypothèse de travail qui est manipulée depuis des siècles par les scientifiques est la suivante :

> « Lorsque l'évolution du système dépend de paramètres extérieurs au système, il n'est pas déterministe, sinon il l'est. »

En physique, on parle d'un système ouvert dans le premier cas. Un exemple sont les valeurs des actions cotées à la Bourse de Paris. Comme on l'a vu, leurs valeurs futures dépendent d'un grand nombre de paramètres économiques et sociaux.

En développant un peu l'exemple de la boule de billard citée ci-dessus, on obtient facilement un système non-déterministe nettement plus simple. Supposons que je place deux boules sur un billard dont l'une contient une petite lampe qui vous permet de la voir dans le noir. J'éteins les lumières, je vous fais rentrer et vous faites rouler la boule ainsi illuminée. En même temps, je mets l'autre boule en mouvement, sans que vous vous en aperceviez. En répétant l'expérience, vous constaterez facilement que le mouvement de la boule illuminée n'est pas uniquement déterminé par sa position et sa vitesse initiales. En effet, elle risque de se heurter non seulement aux bords du billard, mais aussi à l'autre boule, dont le mouvement influe donc sur le mouvement de la boule illuminée. Si vous faites donc partir deux fois la boule illuminée de la même position avec la même vitesse, elle risque de suivre deux trajectoires différentes. Tout dépend du mouvement que j'ai imparti à l'autre boule, que vous ne voyez pas. Bien sûr, si vous rallumez la lumière dans la pièce, vous verrez la cause du problème, et vous constaterez que le système consistant des deux boules est déterministe. C'est parce que vous vous êtes concentré exclusivement sur le devenir de l'unique boule équipée de la petite lampe que vous avez pensé avoir affaire à un système non-déterministe. Vous pourriez revenir à l'étude d'un système déterministe en étudiant le système composé des deux boules, mais deux remarques s'imposent immédiatement. D'abord, même si il n'y a qu'une seule boule supplémentaire, cela devient immédiatement beaucoup plus compliqué que d'étudier le mouvement d'une unique boule sur une table de billard. Deuxièmement, dans des systèmes un peu plus intéressants, le nombre de paramètres qu'il faut rajouter aux paramètres du système auquel on s'intéresse au départ est souvent gigantesque et il devient complètement impossible d'étudier le système ainsi obtenu. C'est par exemple le cas pour le mouvement erratique d'une petite poussière à la surface d'un liquide ou suspendue dans l'air. Ce mouvement est appelé mouvement Brownien, d'après le botaniste Robert Brown qui l'avait observé avec des pollen au dix-neuvième siècle. Ses propriétés ont été expliquées par Einstein en 1905 en termes des collisions de la particule suspendue avec les molecules du fluide. Tout se passe comme si la poussière était continûment bombardée par les molecules, tout comme une boule de billard placée sur une table de billard et entourée d'un très grand nombre de plus petites billes. Il est vrai que si on spécifie les positions et vitesses initiales de toutes les billes ainsi que de la boule, leur mouvement futur est complètement déterminé. Mais la description et le calcul de ce mouvement serait impossible à faire et de surcroît, sans intérêt : on ne s'intéresse qu'au mouvement de la boule (ou de la poussière), pas à celui de toutes les billes (ou des molecules). S'ajoute à cela que dans beaucoup d'applications on s'intéresse au mouvement d'un nuage de telles poussières et pas au mouvement de chaque poussière individuellement. On fait alors appel à la théorie des probabilités qui permet de calculer par exemple la distribution des poussières dans l'espace, plutôt que la position précise de telle ou telle poussière.

En résumé, les systèmes déterministes sont ceux dont l'évolution future est déterminée par leur état présent. En général, si un système n'est pas déterministe, c'est parce qu'il subit l'influence de son environnement de façon trop forte : on peut alors *en théorie* se ramener à l'étude d'un système déterministe en incluant dans l'étude certains paramètres décrivant cet environnement. Mais si la description d'un état du système requiert trop de paramètres (plus que 10, disons), on ne sait très souvent plus *établir* les équations définissant la dynamique. Et en tout cas, même si on y arrive, ces équations deviennent trop difficiles et on ne sait plus les résoudre, même à l'aide d'un puissant ordinateur ; le modèle est alors inutile si on souhaite prédire l'évolution future du système.

Pour les systèmes déterministes, la réponse à la première question posée au début de ce texte est donc positive. Ils constituent cette partie de notre environnement dont l'avenir est déterminé par le présent, et ils ont – pour cette raison-là sans doute – été très étudiés. C'est de ceux-là qu'il sera question par la suite. Je me concentrerai de surcroît sur des systèmes déterministes dont la description peut se faire à l'aide d'un nombre réduit de paramètres et dont la dynamique est d'apparence simple. On verra que, néanmoins, il arrive que l'évolution future de ces systèmes soit complètement imprévisible et d'apparence aléatoire : on appelle alors de tels systèmes chaotiques. Cette observation à priori paradoxale, que je m'efforcerai d'expliquer de façon plus détaillée ci-dessous est sans doute la leçon la plus frappante qu'on peut tirer de trente années de recherche dans les systèmes dynamiques et leurs applications : même un système isolé de son environnement et décrit avec un nombre réduit de paramètres, ayant une dynamique déterministe et simple, n'est pas forcément prévisible. Les deux questions posées ci-dessus sont donc distinctes. La première porte sur le système lui-même (ou au moins sur le modèle utilisé pour sa description), la deuxième sur la connaissance que nous pouvons en avoir. L'avenir peut être déterminé par le présent, sans pour autant être prévisible.

Systèmes dynamiques

Pour étudier un système déterministe, on en construit un modèle mathématique, que les mathématiciens appellent un *système dynamique*. L'étude mathématique formelle des systèmes dynamiques remonte au dix-neuvième siècle, mais a connu un essor spectaculaire dans les trente dernières années, partiellement parce que l'arrivée des ordinateurs a rendu la simulation numérique de ces systèmes facilement accessible, ce qui a permis de mettre en évidence un certain nombre de phénomènes qui auraient été très difficiles à appréhender autrement.

Un système dynamique est composé de deux parties. D'abord, il a un *espace des phases* : c'est l'ensemble des états possibles du système. Par exemple, toutes les positions et vitesses (rapidité et direction) possibles de la boule de billard. Un point de l'espace des phases décrit un état du système. Le deuxième ingrédient d'un système dynamique est la dynamique elle-même. Elle prend la forme d'une équation, dont la solution est l'évolution du système, représentée par une courbe dans l'espace des phases, passant par tous les états atteints par le système au fil du temps. Je donnerai des exemples explicites dans un instant. Pour le ballon de Zidane, c'est la théorie de la mécanique développée par Newton (1642-1727) qui donne la règle permettant de déterminer cette trajectoire. Les méthodes et les équations utilisées pour la trouver sont les mêmes que celles qui interviennent lorsqu'on calcule le mouvement des planètes ou des satellites artificiels qui tournent autour de notre globe terrestre : on se souviendra de la légendaire pomme de Newton.

Du simple au moins simple : la perturbation

On appelle le nombre de paramètres nécessaires pour spécifier un point de l'espace des phases la dimension de l'espace de phases. Pour le modèle le plus simple du ballon de foot, c'est 6 : trois paramètres pour la position et trois pour la vitesse (direction et rapidité). En décrivant le ballon par ces six paramètres, on néglige son mouvement de rotation autour de lui-même pendant son vol, dont nous savons pourtant qu'il influe sur son mouvement. Dans un modèle plus complet, on en tiendra compte. Pour une boule de billard, le nombre de paramètres minimal est quatre : deux pour spécifier sa position sur la table de billard et deux pour sa vitesse. Une telle description est adéquate tant qu'on ne met pas d'effet sur la boule lorsqu'on la frappe : elle roule alors sans glisser et sans tourner sur son axe vertical. Pour deux boules, le nombre de paramètres nécessaires est donc huit, et pour cinq, la dimension de l'espace de phases est vingt. Typiquement, l'étude d'un système dynamique est d'autant plus difficile que son espace de phases est de dimension plus élevée.

Par conséquent on essaie toujours de décrire le système qui nous intéresse avec le plus petit nombre de paramètres possibles. Par exemple, bien qu'on sache que le mouvement de la terre autour du soleil est influencé par la présence de la lune et de toutes les autres planètes, on obtient déjà une très bonne description en supposant que la terre est seule et ne subit que l'influence du soleil. Cette approche a permis à Newton de montrer que l'orbite de la terre est elliptique et qu'elle fait le tour du soleil une fois par an, revenant annuellement exactement au même endroit, siècle après siècle, millénaire après millénaire. Mais pour rendre compte des petites déviations de cette orbite elliptique observée par les astronomes, il faut ensuite tenir compte de la présence de la lune et des autres planètes, en traitant leur influence comme une petite perturbation. Cela a par exemple permis au dix-neuvième siècle à l'astronome français Jean Joseph Le Verrier de *prédire* la présence de la planète Neptune, qui n'avait pas encore été découverte par les astronomes, et de dire où elle devait se trouver. Elle a ensuite été observée par Johan Gottfried Galle (Berlin, 1846), le jour même où il avait reçu une lettre de Verrier lui indiquant la position de la planète !

De la même façon, si l'on veut comprendre comment Zidane réussit à faire contourner le mur adverse par le ballon, il faudra tenir compte des forces aérodynamiques agissant sur celui-ci, qui dépendent de la façon dont il tourne sur son axe. Cela augmente le nombre de paramètres à considérer dans le modèle et complique les équations. De même, le comportement d'une boule de billard n'est pas aussi simple lorsqu'elle tourne sur un axe vertical en roulant, comme le sait tout joueur de billard.

Dans la modélisation des phénomènes physiques, la démarche que je viens de décrire a connu de formidables succès, dont la découverte de Neptune est un exemple frappant : on construit d'abord un modèle simple, avec un nombre réduit de paramètres, éliminant tous les facteurs qui ne semblent pas essentiels et une dynamique suffisamment simple pour qu'on puisse explicitement calculer les trajectoires du système et en décrire les propriétés les plus marquantes. Puis on tient compte d'autres facteurs en les traitant de façon perturbative afin d'analyser des propriétés plus fines des systèmes étudiés.

Le chaos par l'exemple : le billard de Sinai

La méthode décrite ci-dessus a néanmoins des limites. La première difficulté – un peu triviale – est qu'il faut éviter de tellement simplifier le modèle qu'on se retrouve avec un joli modèle mathématique très simple dont le comportement est facile à décrire mais qui n'a plus rien à voir avec le système réel qu'il est sensé décrire. Voir pour cela la citation d'Einstein en début de ce texte. Le deuxième problème – nettement plus sérieux – est qu'un système dynamique peut avoir une apparence extraordinairement simple, mais la description de ses trajectoires peut s'avérer tout de même très difficile. C'est ce qui arrive dans les systèmes dits *chaotiques*. Bien que connus de quelques mathématiciens (et notamment de H. Poincaré) depuis un siècle, leur pertinence pour la description d'un grand nombre de phénomènes dans quasiment toutes les sciences n'est apparue que graduellement depuis une trentaine d'années.

Pour comprendre de quoi il s'agit, mieux vaut regarder un exemple. Or, un exemple simple mais pertinent de système dynamique chaotique est fourni par une boule de billard sur une table de billard au milieu de laquelle on a placé un obstacle circulaire fixe : c'est ce qu'on appelle le billard de Sinai. Comme avec le ballon de foot, la position et la vitesse initiales de la boule déterminent complètement sa trajectoire future. Si vous lancez la boule dix fois *exactement* du même point et avec *exactement* la même vitesse, elle suivra dix fois *exactement* la même trajectoire.

Dans la suite on s'imaginera que le frottement entre la boule et la table est très faible et que la boule peut donc rouler longtemps avant de s'arrêter. On va également supposer que la table de billard que j'ai dessinée est un carré de côté deux mètres, que la boule roule à une vitesse d'un mètre par seconde et qu'elle ne s'arrête pas avant

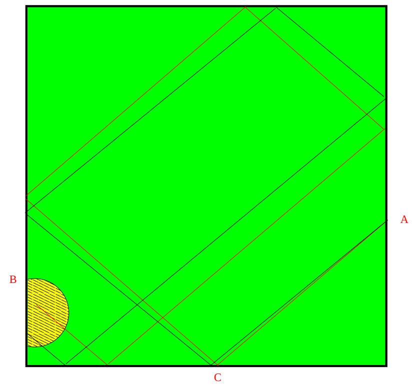

Fig. 1 – Un jeu de billard

une bonne quinzaine de secondes. Regardons d'abord ce qui se passe lorsqu'il n'y a pas d'obstacle sur la table. Vous souhaitez lancer la boule du point A et vous voulez qu'elle atteigne la zone jaune marquée B sur la figure 1, après avoir fait quatre ou cinq rebonds sur le bord du billard. Une trajectoire possible est dessinée sur la figure, en rouge : elle part du point A, passe sur le bord du billard en C, puis continue sa route jusqu'à B. Supposons que vous lanciez maintenant en effet la boule du point A, en visant dans la direction de C, dans le but de lui faire suivre exactement cette trajectoire rouge. Comme votre tir ne sera pas parfait, la boule déviera un peu de la direction voulue et sa trajectoire sera donc un peu différente de la première : elle est marquée en noir. Néanmoins, la boule finira dans la zone B après cinq rebonds sur les bords du billard. Si vous suivez les deux boules plus longtemps, vous verrez qu'elles continuent à s'éloigner lentement l'une de l'autre : leur écart est proportionnel au temps écoulé.

Plaçons maintenant un obstacle circulaire au milieu du billard et recommençons l'expérience. Une trajectoire possible est à nouveau indiquée en rouge sur la figure 2 : partant de A, passant en C, la trajectoire atteint B après environ six secondes. Mais que se passe-t-il lorsque cette fois-ci vous tirez *le mieux possible* une boule de A dans la direction du point C ? Comme vous voyez, après trois rebonds sur le bord extérieur du billard et deux sur l'obstacle, la boule part de l'autre côté du billard. Et après six secondes, lorsque la première boule a atteint la zone B, la deuxième se trouve très loin de là. On constate que, pour atterrir dans la zone B en partant du point A, il faut vraiment ajuster extraordinairement bien son tir vers le point C, parce que la moindre déviation initiale est très rapidement amplifiée par les rebonds successifs sur l'obstacle circulaire au milieu. On dit que le système est sujet à *une grande sensibilité aux conditions initiales.*

Cette observation a une conséquence très importante. Supposons que je vous aie invité pour venir jouer au billard chez moi. Je vous ai expliqué que, si vous visez exactement C, la boule sera dans B six secondes plus tard. Je vous donne alors la boule et une queue de billard, et je vous propose de tirer la boule aussi précisément

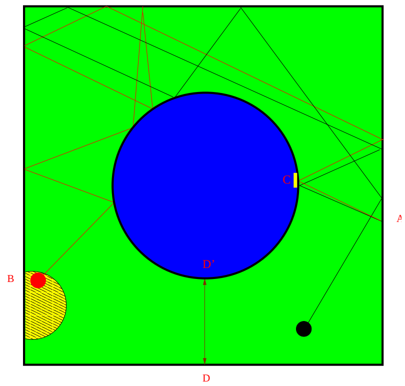

FIG. 2 – Le billard de Sinai

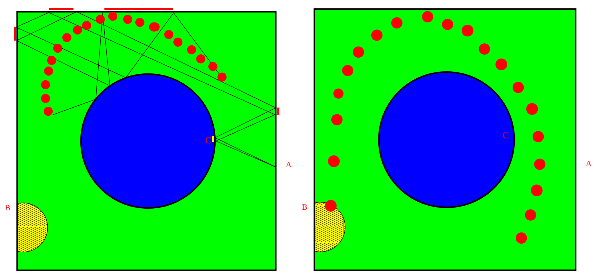

FIG. 3 – Où seront les boules ?

que possible du point A vers C. Puis je vous demande de me dire, avant de jouer, où sera la boule après six secondes. Comme vous pouvez le constater sur les figures, elle peut être presque n'importe où dans le billard ! Dans la figure 3 par exemple, vous voyez la position de vingt boules, tirées de A vers C, après trois secondes, puis après six secondes. Vous voyez qu'il est impossible de faire une prédiction utile sur la position future de la boule, six secondes après son lancement. En effet, vous ne pouvez par exemple même pas savoir *à l'avance* si elle sera dans la moitié droite ou gauche du billard, puisqu'elle peut être dans l'une comme dans l'autre. Autant dire que vous ne pouvez pas *prédire* l'avenir de la boule, bien que celui-ci soit complètement déterminé par sa condition initiale. Le problème est que vous ne connaissez cette dernière qu'approximativement : la petite ignorance sur l'état initial de la boule est très rapidement amplifiée par la dynamique et se transforme en quelques secondes en une ignorance totale. La seule chose que vous pouvez encore dire après une dizaine de secondes est que la boule est quelque part dans le billard, ce qui n'est pas dire grand-chose !

Plus quantitativement, cela signifie que, si I_0 désigne l'incertitude initiale sur la position ou la vitesse de la boule, alors l'incertitude I_n après n secondes suit une progression géométrique. Par exemple, supposons que I_0 désigne la distance entre l'impact de votre boule sur l'obstacle et le point C sur son bord. Alors I_n est la distance qui sépare à l'instant n votre boule de la position d'une autre boule tirée parfaitement sur C à partir de A. Si I_0 vaut 2 mm, I_1 en vaudra (à peu près) $3 \times 2 = 6$, puis I_2 en vaut $3 \times 6 = 18$ et ainsi de suite : $I_3 = 54$ mm, $I_4 = 162$ mm, $I_5 = 486$ mm, $I_6 = 1458$ mm, c'est-à-dire déjà un mètre et demi ! Ces chiffres dépendent de la taille exacte de l'obstacle et du billard, mais l'idée est que l'incertitude sur la position de la boule est multipliée chaque seconde par un facteur plus grand que 1.

Vous direz bien évidemment qu'il suffit d'améliorer la précision du tir initial, mais je prétends que cela ne vous aidera pas beaucoup. Supposons en effet que vous souhaitiez prédire la position de la boule à dix centimètres près, pendant dix secondes. Cela signifie que vous souhaitez que I_{10} ne dépasse pas 10 cm= 100 mm. Mais cela implique que I_9 ne doit pas dépasser 33 mm, et que I_8 doit être inférieur à 11 mm. En continuant le calcul, on trouve que le tir initial doit se faire avec une précision de 2 millièmes d'un millimètre : le point d'impact de la boule sur l'obstacle doit être à moins de $0,002$ millimètres de C. Bonne chance ! Et en tout cas, même si vous réussissez cet exploit, vous ne connaîtrez la position de la boule qu'à 90 cm près douze petites secondes plus tard.

Le billard de Sinai n'est qu'un exemple, il y a beaucoup d'autres systèmes dynamiques ayant cette propriété de dépendance sensible aux conditions initiales : ce sont ceux-là qu'on appelle les systèmes dynamiques chaotiques. Ce qui les caractérise est que presque n'importe quels deux états initialement proches s'éloigneront l'un de l'autre selon une progression géométrique de raison a plus grande que 1. Dans l'exemple du billard, la raison était $a = 3$. Pour ceux qui se souviennent des logarithmes, mentionnons que c'est le logarithme de cette raison qu'on appelle l'exposant de Lyapounov. Plus la raison (et donc l'exposant de Lyapounov) est grande, plus le système est instable. Cela signifie que, étant donnée la précision avec laquelle les conditions initiales du système peuvent être connues, le temps après lequel aucune prédiction utile ne peut être faite sur son évolution est plus court. Pour le billard de Sinai ci-dessus, si on admet que la position de l'impact proche de C peut être connue à un millimètre près, ce temps est de six à sept secondes. Au-delà, la balle peut être « n'importe où ».

Une autre façon imagée et anthropomorphe de parler de la sensibilité aux conditions initiales est de dire que la boule de billard perd la mémoire. Si vous regardez une boule et que vous vous demandez d'où elle vient, c'est-à-dire où elle était dix secondes plus tôt, vous constatez que le même problème se pose que tout à l'heure, lorsqu'on voulait prédire l'avenir de la boule : si nous ne connaissons pas avec une précision inaccessiblement grande la position et la vitesse actuelle de la boule, tout ce que nous pourrons dire concernant son état dix secondes plus tôt est qu'elle était quelque part dans le billard, ce qui ne nous apprend rien. Tout se passe comme si la boule avait oublié d'où elle venait.

Le chaos, source de hasard

Afin d'explorer un peu plus les conséquences de la sensibilité aux conditions initiales, retournons un moment à notre jeu. Supposons que je tire soixante boules de A vers C, visant aussi bien que possible. Puis je marque d'un point rouge la position de ces boules dix secondes après leur lancement. Vous obtiendrez alors l'image de la

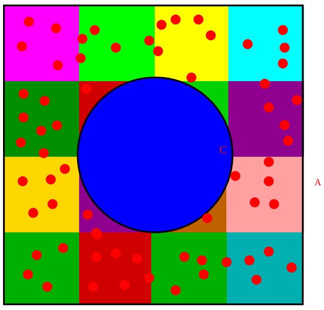

FIG. 4 – Le multicolore

figure 4. On remarquera qu'il y a approximativement le même nombre de boules dans chacun des carrés coloriés. Ceci est un théorème auquel plusieurs mathématiciens ont contribué (Sinai, Bunimovich, Young) dans les quarante dernières années et dont une formulation désinvolte est :

Théorème 1 *Si vous lancez un grand nombre de boules du point A vers C, la même fraction de boules se trouvera dans chacun des carrés coloriés après une dizaine de secondes.*

Si maintenant je me prépare à tirer une boule de A vers C et que je vous demande de prédire où la boule que je vais tirer sera après dix secondes, vous pouvez répondre une couleur au hasard. L'issue de cette expérience paraît en effet comme étant complètement aléatoire ou imprévisible.

Il existe un jeu de chance basé sur ce principe : le multicolore. Il a été inventé par le mathématicien et homme politique Paul Painlevé à la demande du Président de la République Raymond Poincaré (cousin du célèbre mathématicien Henri Poincaré), au début du vingtième siècle. Il s'agissait d'en finir avec les paris illégaux entre les joueurs de billard des cafés parisiens. Les paris étant légaux pour les jeux du hasard, mais interdits pour les jeux d'adresse, Painlevé trouva le compromis : une boule de billard est lancée sur une table coupée en carrés de couleurs différentes. La couleur gagnante est celle où la boule s'arrête. Le multicolore devint (et est toujours) la roulette du peuple : pas besoin de noeud papillon ou de costume pour jouer dans les quelques salles qui survivent à Pigalle. Pour plus d'informations, voir `www.esj-lille.fr/atelier/js/js2003/P4/g4_ev_1.html`.

Il y a encore une autre façon d'illustrer ce phénomène d'imprévisibilité. Imaginez-vous que j'installe deux lampes, une verte à gauche et une rouge à droite du billard. Si la boule se heurte au bord gauche, la lampe verte s'allume, ce que j'indiquerai par « V ». Si elle tape contre le bord droite, c'est la rouge « R » qui s'allume. Pour la trajectoire rouge de la figure 2, cela donne : $RRVVVR\ldots$ Si je continue, j'obtiendrai une suite arbitrairement longue de V et de R. On peut la penser comme une phrase écrite avec un alphabet ne contenant que deux lettres. Que puis-j'en dire d'intelligent ? D'abord, si je fais la même chose après avoir enlevé l'obstacle, c'est très simple. Quelle que soit la façon dont je lance la boule, la suite se présentera toujours sous la forme

$$\dots RVRVRVRVRVRVRVRVRVRVRVRVRVRV\dots$$

En effet, sans obstacle, la boule ne peut pas deux fois de suite taper à gauche ou à droite. En particulier, si la verte vient de s'allumer, on sait qu'après la rouge s'allumera. Le comportement des lampes n'est pas seulement déterministe, elle est *parfaitement prévisible* : pas de surprises. D'ailleurs, la phrase formée par les V et les R ne contient que très peu de mots différents. Le mot RR n'y apparaît pas et des huit mots différents qu'on peut à priori former avec deux lettres, seulement RVR et VRV apparaissent.

Mais avec l'obstacle la situation est très différente. La suite des R et des V n'a pas une telle régularité et à première vue, elle n'a même aucune régularité. Une chose qu'on peut néanmoins dire est qu'il y aura à peu près autant de V que de R. Cela résulte d'un autre théorème démontré par Sinai, qui dit grosso modo :

Théorème 2 *La trajectoire typique d'une boule dans un billard de Sinai passera en moyenne le même temps dans chacun des carrés coloriés.*

Attention, ce n'est pas le même théorème que le précédent ! Celui-ci ne donne qu'une information sur la position de la boule moyennée dans le temps, pas à un temps grand mais fixé. En tout cas, il implique que la boule passe autant de temps proche du bord gauche que du bord droite et donc elle doit heurter en moyenne le même nombre de fois chacun des deux bords. Néanmoins, cette fois-ci et contrairement à ce qui se passait en absence de l'obstacle, un V peut être suivi d'un R ou d'un V. Et un VV peut être suivi d'un RR, ou d'un RV, par exemple. Et tous les mots de trois lettres peuvent intervenir : RRR, VVV, RVR, VRR, RRV, RVV, VRV, VVR. Une telle suite n'est en fait pas facile à distinguer de celle obtenue par le jeu de pile ou face, dans lequel on allume la lampe Rouge lorsque c'est face et la Verte sinon. C'est dans ce sens qu'elle est imprévisible : même si on connaît les mille premières lettres, on aura du mal à décider quelle sera la mille et unième. Cela peut se comprendre de la façon suivante. Connaître les mille premières lettres, c'est avoir une information partielle sur la condition initiale de la boule. Si par exemple la suite commence par RR, vous pouvez éliminer toutes les conditions initiales pour lesquelles la boule commence sur le bord droit pour frapper ensuite le bord gauche, éventuellement après un ou plusieurs rebonds sur l'obstacle et les bords en haut et en bas. Connaître les mille premières lettres, c'est donc savoir à peu près d'où la boule est partie et dans quelle direction. Mais, comme on a vu, une telle information incomplète sur la condition initiale ne permet pas de prédire l'avenir de la boule avec beaucoup de précision. Ici, cela ne suffit pas pour dire si c'est sur le bord droite ou gauche qu'elle frappera. La boule se comporte donc comme les produits financiers de votre banquier : « Les performances passées ne présument pas des performances futures. »

Néanmoins, des différences avec une suite obtenue par le jeu de pile ou face existent tout de même : si on joue pile ou face, allumant la lampe verte lorsque c'est pile, la rouge sinon, tous les mots sont possibles et tous le mots de même longueur ont la même probabilité. Ce ne sera pas le cas pour une suite produite par les rebonds d'une boule de billard où tous les mots ne sont pas possibles et en tout cas n'arrivent pas avec la même fréquence. On peut dire qu'une suite de R et de V est d'autant plus imprévisible qu'elle contient plus de mots différents.

En conclusion, même en regardant une longue suite de R et de V, il sera difficile de décider quelle lampe s'allumera ensuite. On a l'impression que c'est le hasard qui décide ! Dans ce sens, un système dynamique chaotique engendre le hasard sous forme d'imprévisibilité. En analyse finale, ce hasard est le fruit de l'extrême sensitivité du système aux conditions initiales, comme l'avait déjà compris Henri Poincaré :

> « Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et nous disons alors que cet effet est dû au hasard."

Pertinence ?

On pourrait légitimement penser que toutes ces histoires de billards ne sont que des jeux d'esprit insignifiants, et sans relation quelconque avec les vrais problèmes de la physique ou des autres sciences. Ce qui est étonnant, c'est qu'un grand nombre de systèmes dynamiques sont chaotiques dans le sens illustré par le billard de Sinai, ou ont au moins une composante chaotique dans leur espace de phases. Typiquement, lorsqu'on a un système qui n'est pas chaotique, comme le billard carré et qu'on le change un peu, une partie de ses trajectoires deviennent instables. Ceci a été observé dans de nombreux domaines de la physique, de la chimie ou de la biologie en particulier, de sorte qu'on peut même dire que le chaos est la règle plutôt que l'exception.

En particulier, réduire le nombre de variables pour décrire le système qui nous intéresse ne suffit pas forcément pour rendre les choses simples. Un exemple célèbre est la météo. S'il y a une chose que tout le monde aimerait prédire avec précision, c'est bien le temps qu'il fera, et cela fait longtemps que les météorologistes essaient d'y arriver. C'est d'une importance vitale pour les agriculteurs et les marins, et c'est fort utile lorsqu'on organise ses vacances ou un pique-nique sur la plage de Wissant en juillet. Et nous semblons tous croire que cela doit être possible : en effet, lorsque Météo France ne réussit pas bien ses prévisions et notre pique-nique est noyé dans une belle averse, nous les blâmons pour leur misérable prestation. En d'autres termes, nous semblons tous croire que l'atmosphère terrestre est à la fois un système déterministe et prévisible. C'est ce que pensait aussi le météorologiste américain Eduard Lorenz : dans les années soixante, il construisit un modèle simple pour étudier l'écoulement de l'air dans l'atmosphère, éliminant un grand nombre de variables pour n'en retenir que trois, liées par des équations assez simples. Il s'aperçut assez vite que le système obtenu était chaotique, et que la prédiction de son comportement était impossible pour des temps trop longs. L'article de Lorenz est considéré comme marquant le début de la recherche moderne sur le chaos. On pense aujourd'hui que l'atmosphère terrestre est en effet un système chaotique et que des prévisions météo à long terme ne seront jamais possibles, quelle que soit la puissance des ordinateurs utilisés pour simuler l'évolution de l'atmosphère. Mais peut-être que cela ne vous surprend pas tellement, surtout à Lille. Après tout, si vous marquiez, pour les dix dernières années d'un S (pour sec) les jours où il a plu moins que trois heures et par P les autres, vous verriez quelque chose comme

$$PPSPSSPPSSSPPPSPPPPSSPPSSSSPPSPPPSPSPPPSP$$

$$SPSPSSSPSPSPSSSPPSPSSPPPSPPSSSPPPSPSSSSPPS\ldots\ :$$

une phrase de 3650 lettres. Après tout, ce n'est pas si différent de la suite des R et des V obtenus avec le billard de Sinai...

Un autre contexte où l'existence de régions de conditions initiales donnant lieu à des trajectoires chaotiques a été mis en évidence est le système solaire, ce qui est d'autant plus étonnant que celui-ci est un paradigme de régularité et de prévisibilité. Qui peut en effet douter que la terre tournera éternellement autour du soleil et autour de son propre axe, gentiment incliné à 23 degrés par rapport au plan de l'écliptique ? Dans les années 80-90 un astronome français, Jacques Laskar, a pourtant mis en évidence des composantes chaotiques dans le mouvement de la terre et du système solaire plus généralement. Mais ne vous inquiétez pas trop : le temps caractéristique est de quelque cinq millions d'années et ce n'est donc pas demain que le soleil ne se lèvera pas. Ceci dit, la découverte de Laskar est importante pour qui veut comprendre les changements climatiques passées de la terre puisqu'elle existe depuis quelque 4,5 millards d'années et qu'elle a donc subi dans le passé les conséquences de ces mouvements chaotiques. Une discussion détaillée mais non-technique du rôle du chaos dans l'évolution du système solaire se trouve dans [P].

Le chaos quantique

Au niveau moléculaire et atomique les lois de la mécanique classique ne s'appliquent plus et ce sont les lois de la mécanique quantique qui prennent la relève. En particulier, selon une de ces lois – le principe d'incertitude de Heisenberg – on ne peut pas assigner une position et une vitesse précises à une particule. Il y a toujours une incertitude fondamentale sur ses grandeurs. La situation est différente et plus subtile que celle avec la boule de billard. Même si nous n'arrivons pas à la tirer *exactement* de A vers C, le modèle classique de la boule suppose qu'elle a bien une position et une vitesse précises ; la difficulté est simplement que nous ne les connaissons pas précisément. Dans la description quantique d'une particule, comme d'un électron par exemple, les notions de position et vitesse précises ne sont simplement plus fournies par le modèle. Seules des *distributions de probabilité*, permettant de déterminer la probabilité que la particule a telle ou telle vitesse ou position font encore partie de la théorie. Et selon le principe d'incertitude de Heisenberg, si l'incertitude sur la position d'une particule est très petite, l'incertitude sur sa vitesse sera forcément relativement grande et vice versa. Ces deux incertitudes ne peuvent pas simultanément être rendues trop petites.

Lorsque, dans les années soixante-dix, l'importance des nouvelles idées concernant le chaos est devenue apparente, les physiciens n'ont pas tardé à s'interroger sur leur pertinence dans le contexte quantique. Il s'agit plus particulièrement de comprendre quelle est la signature du chaos dans le monde quantique : en quoi, dans ce contexte, les systèmes chaotiques sont-ils différents des autres ? Il n'est bien sûr pas possible de rentrer dans les détails de cette problématique, mais je crois pouvoir évoquer au moins quelques idées de façon compréhensible, bien que peu précise.

Considérons alors à nouveau le billard de Sinai. Si on le construit tout petit et qu'on y lâche un seul électron, il faut décrire le mouvement de celui-ci à l'aide de la mécanique quantique. Remarquons d'abord qu'au niveau classique, le billard permet plusieurs orbites périodiques : si, par exemple, une boule part de D et va exactement vers D' dans la figure 2, elle fera des va-et-vient éternels entre le bord et l'obstacle. Une question qui se pose alors est la suivante : « Une particule quantique peut-elle être localisée entièrement sur une telle trajectoire ? » A priori non, puisque cela implique que l'incertitude sur sa vitesse doit être nulle : on a vu que la moindre déviation de la verticale ferait très rapidement dévier la trajectoire de la trajectoire périodique entre D et D'. Mais peut-être peut-elle rester proche de l'orbite périodique ? Comme l'orbite est instable, cela aussi doit être très difficile : des orbites proches s'éloignent très vite d'elle. Alors, que croire, à quoi s'attendre, que fera l'électron ?

Un premier théorème, démontré par le mathématicien Russe Schnirelman dans les années soixante-dix, puis amélioré et adapté à divers contextes, dont celui des billards chaotiques, par d'autres chercheurs (S. Zelditch, Y. Colin de Verdière, M. Zworski, ...) dit la chose suivante :

Théorème 3 *Supposons qu'un électron soit placé avec une énergie bien définie dans un billard de Sinai ou dans un autre billard chaotique. Alors, pour presque toutes les énergies possibles, la probabilité de trouver l'électron dans une des cases coloriées du billard est identique pour toutes les cases.*

Maintenant, si on calcule la probabilité de trouver l'électron dans chacune des cases à l'aide d'un ordinateur, pour une longue suite d'énergies différentes, on constate en effet que, pour la plupart de ces énergies, les probabilités calculées ne dépendent pas de la case considérée. Mais pour certaines énergies, on observe des déviations et on a l'impression qu'il est plus probable de trouver l'électron très proche de certaines orbites périodiques dans le billard et qu'il est donc moins probable de le trouver ailleurs. Une des multiples questions qui occupent aujourd'hui les mathématiciens et physiciens actifs dans le chaos quantique est de montrer rigoureusement l'existence ou la non-existence de telles énergies et de calculer la probabilité de trouver l'électron proche de telle ou telle orbite périodique. On veut par exemple savoir si cette probabilité peut valoir 1, ce qui voudrait dire qu'on est sûr de trouver la particule proche de l'orbite périodique. Dans certains modèles nettement plus simples à traiter mathématiquement que les billards, on sait en effet montrer qu'il existe des énergies où la probabilité de trouver la particule proche de l'orbite périodique vaut 0,5. Pour les billards, on ne sait pas exactement ce qui se passe. Deux résumés techniques des connaissances actuelles sur ces questions sont [DB] et [Z].

Conclusions

Une des choses que les recherches des trente à quarante dernières années sur la théorie des systèmes dynamiques et sur leurs applications dans les sciences ont permis d'établir clairement est que les deux questions que j'ai posées dans le premier paragraphe de ce texte sont distinctes : certains systèmes, mêmes simples, peuvent être déterministes, sans pour autant être prévisibles. Même si l'état futur du système est complètement déterminé par son état présent, il n'est donc pas forcément possible de prédire le futur du système au-delà d'un temps très court. Les scientifiques avaient l'habitude de penser que, si on pouvait isoler un système des influences de son environnement et le décrire à l'aide d'un nombre réduit de variables, il serait à la fois déterministe et prévisible. Le développement assez formidable de la théorie des systèmes dynamiques a permis de mettre clairement en évidence l'observation à posteriori assez banale que, pour être prévisible, le système doit être stable : de petites incertitudes sur l'état initial du système ne doivent pas s'amplifier trop vite, sinon toute prédiction sur le comportement futur du système devient illusoire.

Références

[DB] S. De Bièvre, *Recent results on quantum map eigenstates*, in *Mathematical Physics of Quantum Mechanics*, J. Asch, A. Joye (eds.), LNP 690, Springer 2006. Disponible à `http://www-gat.univ-lille1.fr/~debievre/Publications/giensproc.ps`.

[E] I. Ekeland, *Le chaos*, Editions Le Pommier, 2006.

[P] I. Peterson, *Le chaos dans le système solaire*, Collection Science d'Avenir, 1995.

[R] D. Ruelle, *Hasard et chaos*, Odile Jacob, 1991.

[Z] S. Zelditch, *Quantum ergodicity and mixing of eigenfunctions*, disponible à `http://arxiv.org/pdf/math-ph/0503026`