UNIVERSITÉ LILLE 1
2010-2011

L2 MIMP S4 – Analyse numérique

Responsable: S. De Bièvre

DS vendredi 3 juin 2011 – 8h00-10h00

Il est important de donner des arguments complets, bien rédigés.

L'UTILISATION DE DOCUMENTS OU DE CALCULATRICES EST INTERDITE PENDANT L'EPREUVE

Le barême est donné à titre indicatif

I [8 pts] On considère sur l'intervalle $[-1,1]$ les formules de quadrature élémentaires de la forme

$$I_{\text{app}}(f) = 2\left(\lambda_0 f(-\alpha) + \lambda_1 f(\alpha)\right),$$

où $\lambda_0, \lambda_1 \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$.

(i) Rappeler la définition d'ordre d'une formule de quadrature élémentaire. Montrer que l'unique choix de λ_0, λ_1 tel que la formule de quadrature soit d'ordre 1 au moins est $\lambda_0 = 1 = \lambda_1$.

(ii) Montrer qu'il existe un unique choix de α pour que la formule soit d'ordre 2 au moins. Montrer que, pour ce choix de α, elle est d'ordre 3 exactement.

(iii) On considère maintenant un intervalle $[a,b]$, avec $-\infty < a < b < +\infty$. Écrire la formule d'intégration composée qui correspond à la formule élémentaire établi en (ii).

(iv) Comment se compare cette méthode à celles des rectangles, du point milieu et de Simpson?

II [7 pts] On considère le problème de Cauchy-Lifschitz suivant:

$$y' = 2y + t^2, \quad y(0) = 2. \qquad (*)$$

que l'on étudie sur un intervalle $[0,T]$.

(i) Énoncer une forme du théorème de Cauchy-Lifschitz. Montrer que les conditions du théorème sont satisfaites pour l'équation ci-dessus.

(ii) Comme il s'agit d'une équation linéaire de premier ordre, on sait la résoudre explicitement: le faire!

(iii) Rappeler le schéma d'Euler modifié. L'écrire sous la forme

$$y_{n+1} = y_n + h\phi_f(t_n, y_n), h),$$

où on utilise les notations habituelles: $0 \leq n \leq N$, $h = T/N$. Pour l'équation $(*)$, identifier explicitement la fonction $\phi_f(t,y,h)$.

(iv) En examinant la fonction ϕ_f, montrer que le schéma d'Euler modifié est stable lorsqu'on l'applique à l'équation $(*)$.

III [7 pts]
(i) Expliquer en quelques lignes la méthode de Newton pour la solution de l'équation $f(x) = 0$, lorsque f est une fonction dérivable. On illustrera ses explications avec un dessin.
(ii) On souhaite trouver une valeur approchée de $\sqrt[3]{2}$. Pour cela on applique la méthode de Newton à l'équation $x^3 - 2 = 0$. Montrer que cela mène à l'itération suivante

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}(x_n + \frac{1}{x_n^2}).$$

(iii) Établir par un calcul direct que $1.25 \leq \sqrt[3]{2} \leq 1.26$. Poser $x_0 = 1.25 = 5/4$ et calculer x_1 exactement (sous forme de fraction et sous forme décimale).
(iv) On écrit $\epsilon_n = |x_n - \sqrt[3]{2}|$. Montrer que $\epsilon_0 \leq 10^{-2}$. On admettra par la suite que, dans cet exemple,

$$\epsilon_{n+1} \leq \epsilon_n^2.$$

Que faudrait-il faire si on souhaitait déterminer les quinze premières décimales de $\sqrt[3]{2}$ en utilisant la méthode de Newton? A-t-on besoin d'une calculatrice pour cela? Pourquoi dit-on que la méthode de Newton est efficace?