M33 DS Janvier 2012

1. (i) Thm Soit $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ continue et telle que $\partial_x f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ soit continue. Alors

Thm : 1 pt

$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ définie par } \varphi(x) = \int_c^d f(x,t)\,dt$$

est dérivable et

$$\varphi'(x) = \int_c^d (\partial_x f)(x,t)\,dt$$

Posons $f(x,t) = \cos(x\sin t)$. Alors f satisfait les conditions sur $[a,b]\times[0,2\pi]$, pour tout $-\infty < a < b < +\infty$.

Donc

0.5 pt $$\underline{\varphi'(x)} = -\int_0^{2\pi} (\sin t)\,\underbrace{(\sin(x\sin t))}_{\text{cont}}\,dt \qquad (1)$$

En posant $f_1(x,t) = -\sin t \,\underbrace{\sin(x\sin t)}_{\text{cont}}$, on peut répéter l'argument et

0.5 pt $$\underline{\varphi''(x)} = -\int_0^{2\pi} (\sin^2 t)\,\underbrace{\cos(x\sin t)}_{\text{cont}}\,dt \qquad (2)$$

(ii) Dans (2), l'intégrand satisfait toujours les conditions du thm. Donc

$$\varphi'''(x) = \int_0^{2\pi} (\sin^3 t)\,\underbrace{\sin(x\sin t)}_{\text{cont}}\,dt \qquad (3)$$

Formule pour $\varphi^{(2n)}(x)$, $\varphi^{(2n+1)}(x)$

1 pt

et de même

$$\varphi^{(iv)}(x) = \int_0^{2\pi} \sin^4(t)\,\underbrace{\cos(x\sin t)}_{\text{cont}}\,dt \qquad (4)$$

Récurrence 1 pt

On a donc montré, pour $n = 0, 1$, que

$$(5)\quad \begin{cases} \underline{\varphi^{(2n)}(x)} = (-1)^n \displaystyle\int_0^{2\pi} (\sin^{2n} t)\,\underbrace{\cos(x\sin t)}_{\text{cont}}\,dt \\ \underline{\varphi^{(2n+1)}(x)} = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^{2\pi} (\sin^{2n+1} t)\,\underbrace{\sin(x\sin t)}_{\text{cont}}\,dt \end{cases}$$

On procède alors par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons (5) est satisfait; les conditions du thm étant satisfaites par les intégrands, on trouve

$$\varphi^{(2n+2)}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^{2\pi} (\sin^{2(n+1)} t)\,\underbrace{\cos(x\sin t)}_{\text{cont}}\,dt$$

et $\varphi^{(2n+3)}(x) = (-1)^{n+2} \int_0^{2\pi} \sin^{2(n+1)+1}$ [illegible] $(x\sin t)\,dt$

On a alors montré (5) pour $(n+1)$.

Finalement

1 pt $\left\{ \begin{array}{l} \varphi^{(2n+1)}(0) = (-1)^{n+1} \int_0^{2\pi} (\sin^{2n+1} t) \sin(0 \sin t) \overset{\cos t}{} dt = 0 \\ \varphi^{(2n)}(0) = (-1)^n \int_0^{2\pi} \sin^{2n} t \cos t \, dt \end{array} \right.$

$$= (-1)^n \frac{1}{2n+1} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} (\sin^{2n+1} t) \, dt$$

$$= (-1)^n \frac{1}{2n+1} \left[\sin^{2n+1} t \right]_0^{2\pi} = 0$$

2. (i) On a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{dx}\,dx$$

1pt pour isoler l'analyse en $x=0$

Comme $\frac{\sin x}{x}$ est prolongeable par cont. en 0, la première intégrale est une intégrale de Riemann. Considérons la deuxième. On a

2pt pour une analyse correcte à $+\infty$

$$\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{X\to\infty}\left(\left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^X - \int_1^{X} \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right)$$

$$= \frac{\cos(1)}{1} - \lim_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

Or $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| < \frac{1}{x^2}$ et $\int_1 \frac{1}{x^2}dx$ converge. Donc $\frac{\cos x}{x^2}$ est abs. intégrable sur $[1,+\infty[$. On a donc

$$\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\sin x}{x}\,dx = \cos(1) - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

et on conclut que $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ est convergente.

Alternativement on peut utiliser le théorème d'Abel pour montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ est convergente. On a

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = g(x)\,h(x) \quad \text{avec } g(x) = \sin(x),\ h(x) = \frac{1}{x}$$

Ici : f est continue sur $[1,+\infty[$, g a une primitive bornée et $\frac{1}{x} > 0$ est décroissante.

? beaucoup utilisent Abel sur $[0,+\infty[$. J'ai donné 1pt/2 pour cela.

(ii) Lorsque $x=0$ on obtient $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$

1pt pour $x=0$

1pt pour $x\neq 0$

Or, lorsque $t\to+\infty$ $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \sim t^{-1}$ et on sait que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ est divergente. Par les thm. de comparaison, on conclut que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ est divergente.

Lorsque $x\neq 0$, $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\frac{1}{1+(tx)^2} \leq \frac{1}{1+(tx)^2}$: Comparaison OK

1 pt

3. (i) Comme $x^2+y^2 < x$, on a $x>0$.

On pose $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, avec $\rho > 0$

Alors $x^2+y^2 < x \iff \rho^2 < \rho\cos\varphi$, $\rho>0$

$\iff \rho < \cos\varphi$, $\rho > 0$

Il en résulte que $\cos\varphi > 0$, donc $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$. De façon équivalente et plus commode, on peut poser $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

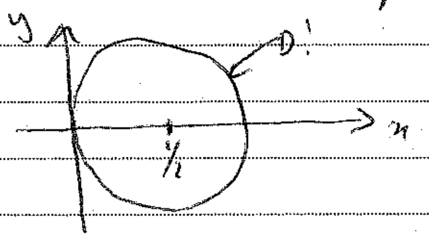
N.B. J'ai enlevé 0.5 pt si le fait que $\rho \neq 0$ n'est pas marqué.

(ii) Première méthode

$x^2+y^2 < x \iff (x^2-x)+y^2 < 0$

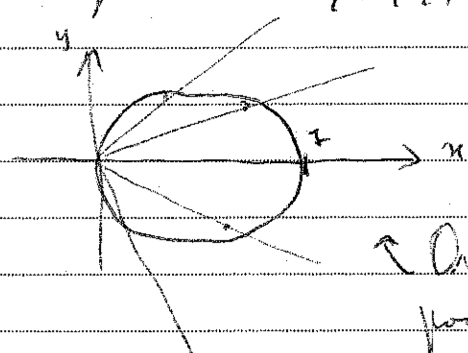
$\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} < 0$

Donc D est le disque de rayon $\frac{1}{2}$ centré en $x=\frac{1}{2}$, $y=0$



2 pt

Deuxième méthode. $0 \leq \rho < \cos\theta$ signifie que, pour chaque $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, ρ varie entre 0 et $\cos\theta$



$\theta = 0 \Rightarrow 0 < \rho < 1$

On obtient une courbe de ce type pour $\rho = \cos\theta$. Ce n'est pas tout de suite évident que c'est un cercle!

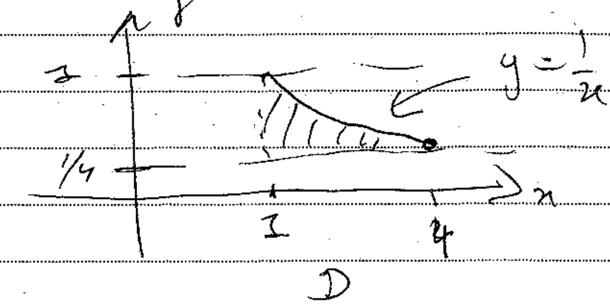
(iii) $$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} (\rho - 1)\rho\, d\rho\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\cos\theta} d\theta$$

2 pts

N.B. J'ai donné 1 pt si seulement jusque ici ⟶ $$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \frac{\cos^2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2\theta)\, d\sin\theta - \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\cos 2\theta + 1}{2}\right) d\theta \; \frac{1}{3}\left[\ldots - \frac{\ldots}{3}\right] - \frac{1}{8}\left[\sin 2\theta\right]_{-\pi}^{\pi} \mp \frac{1}{4}\pi$$

4. (i)



1pt

(ii)

$$\int_{1/4}^{1}\int_{1}^{1/y} x\exp(xy)\,dx\,dy = \int_{1}^{4}\left(\int_{1/4}^{1/x} x\exp(xy)\,dy\right)dx$$

$$= \int_{1}^{4}\left(\exp(xy)\Big|_{y=1/4}^{y=1/x}\right)dx$$

2pts

? C'est possible aussi sans changer l'ordre d'intégration.

$$= \int_{1}^{4}\left(\exp(1) - \exp\left(\frac{x}{4}\right)\right)dx$$

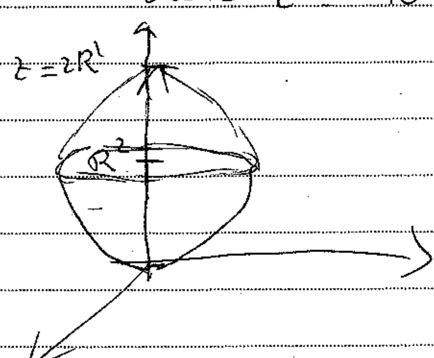
$$= 3e - 4\exp\frac{x}{4}\Big]_{1}^{4} = 3e - 4\left(e - e^{1/4}\right)$$

5. (i) $0 \le \rho^2 \le z \le 2R^2 - \rho^2$

1pt

(ii) Les graphes de $z = \rho^2$ et $z = 2R^2 - \rho^2$ s'intersectent qd $\rho^2 = 2R^2 - \rho^2 \Rightarrow \rho^2 = R^2$ et donc $z = R^2$

2pt



2pts

(iii) $$V_D = \int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_{\rho^2}^{2R^2-\rho^2} \rho\, dz\, d\rho\, d\varphi$$

$$= (2\pi)\int_0^{R} \rho(2R^2 - 2\rho^2)\,d\rho$$

$$= (2\pi)\left(R^2R^2 - \frac{2}{4}R^4\right) = 2\pi\frac{R^4}{2} = \pi R^4$$