M33 Compléments d'intégration, S3 2011-2012

Devoir Surveillé, 14 janvier 2012
Durée 2 heures

Documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.
Le barême est donné à titre indicatif

Exercice 1. [5 pts] Soit

$$\varphi(x) = \int_0^{2\pi} \cos(x \sin t) \cos t \ \mathrm{d}t.$$

(i) [2 pts] Donner une expression en forme d'intégrale de $\varphi'(x)$ et de $\varphi''(x)$. Justifier vos calculs et citer explicitement le théorème principal utilisé.
(ii) [3 pts] Donner une expression en forme d'intégrale de $\varphi^{(2n)}(x)$ et de $\varphi^{(2n+1)}(x)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, en justifiant à nouveau vos calculs. Calculer explicitement $\varphi^{(k)}(0)$, pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Exercice 2. [5 pts]
(i) [3 pts] Déterminer si l'intégrale généralisée suivante est convergente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x.$$

(ii) [2 pts] Déterminer les valeurs de $x \in \mathbf{R}$ pour lesquelles l'intégrale généralisée suivante est convergente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \frac{1}{1+(tx)^2} \mathrm{d}t.$$

Attention: Il n'est pas demandé de calculer ces intégrales, mais de justifier en détail ses conclusions, en énonçant notamment les théorèmes utilisés.

Tourner la page...

Exercice 3. [5 pts] On considère l'intégrale double suivante:

$$I = \int\int_D (\sqrt{x^2+y^2} - 1)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

où D est la région du plan déterminée par $x^2 + y^2 < x$.
(i) [1 pt] Montrer que, en coordonnées polaires, le domaine D est défini par les inégalités

$$0 < \rho < \cos\varphi, \quad \varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

(ii) [2 pts] Dessiner le domaine D. **Indication:** On peut utiliser indifféremment, et selon sa propre préférence, la caractérisation de D en termes de coordonnées cartésiennes ou polaires.
(iii) [2 pts] Calculer I.

Exercice 4. [3 pts] On considère l'intégrale double suivante:

$$\int_{1/4}^{1} \int_{1}^{\frac{1}{y}} x \exp(xy) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(i) [1 pt] Dessiner le domaine d'intégration.
(ii) [2 pts] Calculer l'intégrale.

Exercice 5. [5 pts] On considère la région D de l'espace définie par

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq z \leq 2R^2 - (x^2 + y^2).$$

(i) [1 pt] Exprimer le domaine D en coordonnées cylindriques.
(ii) [2 pts] Dessiner D.
(iii) [2 pts] Calculer le volume de D.