Des carrés qui tournent en rond ou l'algorithme de Prabekhar

L'algorithme de Prabekhar est un algorithme numérique dont la règle d'itération est la suivante : on associe à tout entier strictement positif la somme des carrés de ses chiffres. Par exemple, 162 devient $1^2+6^2+2^2=41$, qui lui-même devient $4^2+1^2=17$, qui lui-même devient $1^2+7^2=50$, etc.
On dira du nombre 41 qu'il est l'*image* de 162 et que 162 est un *antécédent* de 41. La suite $162, 41, 50\ldots$ sera appelée la *trajectoire* du nombre 162.

Etape 1 : Expérimentation. Calculer quelques trajectoires ; commencer par celles des entiers 1 à 9 (Figure 1). Identifier le *puits* 1 et le *cycle* $4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20$. Représenter les trajectoires de tous les nombres à deux chiffres. Chaque nombre admet-il un antécédent ? Si oui, combien ? Existe-t'il d'autres puits ou cycles ?

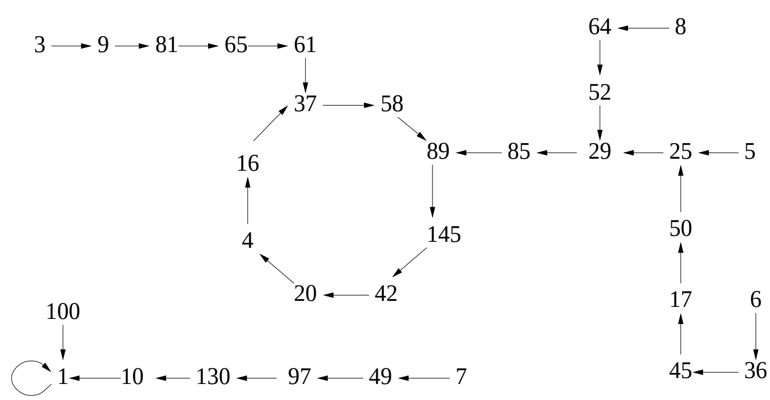

FIG. 1 – Les trajectoires des entiers $1, 2, \ldots, 9$.

Etape 2 : Démonstration. On veut montrer la conjecture : "la trajectoire de tout entier strictement positif échoue soit dans le puits 1 soit dans le cycle $4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20$". Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété :

la trajectoire de tout nombre à n chiffres échoue soit dans le puits 1
soit dans le cycle $4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20$.

La conjecture est équivalente aux propriétés $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3\ldots$ Procédons par récurrence.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ satisfaisant l'inégalité

$$n \times 9^2 \leq 10^{n-1} - 1\ . \qquad (1)$$

Dès lors, les propriétés $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_{n-1}$ impliquent $\mathcal{P}_n$. En effet, l'image d'un nombre à n chiffres est majorée par $n \times 9^2$. D'après (1), elle admet au plus $n-1$ chiffres. Il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence : la trajectoire de cette image (et donc aussi celle de ses antécédents) échoue soit dans le puits 1 soit dans le cycle $4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20$.
L'inégalité (1) est vraie pour $n \geq 4$. Pour amorcer la récurrence et prouver la conjecture, il suffit de vérifier les propriétés $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$.

Etape 3 : Utilisation de l'outil informatique. Les propriétés $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ont été vérifiées expérimentalement. Vérifier $\mathcal{P}_3$ "à la main" s'avère a priori fastidieux d'où le recours à un ordinateur.
Construire tout d'abord une fonction *Prabekhar* qui à un entier X associe son image par l'algorithme de Prabekhar, puis une fonction *appartient* définie par : $appartient(X, liste)$ vaut 1 si X appartient à la liste *liste* et 0 sinon. Voici enfin le schéma d'un algorithme déterminant la véracité de la propriété $\mathcal{P}_3$.

```
cycle ⟵ 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20
Pour X = 100 jusqu'à X = 999
    trajectoire ⟵ X
    Y ⟵ Prabekhar(X)
    Tant que appartient(Y, trajectoire) = 0
        trajectoire ⟵ trajectoire, Y
        Y ⟵ Prabekhar(Y)
    fin Tant que
    Si Y ≠ 1 et appartient(Y, cycle) = 0 alors
        Renvoyer(P3 est fausse)
    fin Si
fin Pour
Renvoyer(P3 est vraie)
```

Cet algorithme n'est pas optimal et pourra être amélioré.
Enfin, si la programmation n'est pas envisageable, la vérification de la propriété $\mathcal{P}_3$ est facilitée par les deux remarques suivantes. D'une part, l'image d'un nombre à trois chiffres est majorée par $3 \times 9^2 = 243$. D'autre part, 145, 154, 415, 451, 514 et 541 ont la même image.

Prolongements. Existe-t'il des critères déterminant où échouera la trajectoire d'un entier donné x ? Soit p_n la proportion des nombres plus petits que n dont la trajectoire échoue dans le cycle $4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20$. La suite $(p_n)_{n \geq 1}$ admet-elle une limite quand n tend vers l'infini ? Que dire de l'algorithme numérique qui à un entier associe la somme des cubes de ses chiffres ?