Collision de solitons pour gKdV non intégrable

Yvan Martel(1) and Frank Merle(2)

(1) Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines
(2) Université de Cergy-Pontoise, IHES and CNRS

Abstract

On considère les équations de KdV généralisées

$$\partial_t u + \partial_x(\partial_x^2 u + u^p) = 0 \quad t, x \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

pour $p = 2$, 3 et 4. On se concentre sur le cas $p = 4$. Il est bien connu que l'équation (1) a des solutions particulières $u(t,x) = Q_{c_0}(x - x_0 - c_0 t)$, appelées solitons. Le problème général est le suivant: on connaît l'existence de solutions de l'équation qui se comportent en $t \to -\infty$ comme

$$u(t,x) = Q_{c_1}(x - x_1 - c_1 t) + Q_{c_2}(x - x_2 - c_2 t) + \eta(t,x), \tag{2}$$

où $c_1 > c_2$ et $\eta(t)$ est un terme de dispersion H^1 petit par rapport à Q_{c_1}, Q_{c_2}. Les deux solitons Q_{c_1} et Q_{c_2} doivent rentrer en collision pour un certain temps t_0. Peut-on comprendre la collision et déterminer ce qu'il se passe après ? En analyse non linéaire, sauf pour certaines équations dites intégrables, ces questions sont complètement ouvertes.

On introduit un nouveau cadre pour comprendre ces problèmes pour (1) dans le cas où $c_2 \ll c_1$ et $\|\eta(t)\|_{H^1} \ll \|Q_{c_2}\|_{H^1}$. Premièrement, cette approche nous permet de décrire pour tout temps les solutions satisfaisant (2) pour t proche de $-\infty$. En particulier, on prouve que les deux solitons survivent l'interaction à un terme de correction près d'ordre inférieur. Deuxièmement, notre analyse dans le cas non intégrable $p = 4$ prouve qu'il n'existe pas de solution 2-soliton dans ce régime ($c_2 \ll c_1$), contrairement aux cas intégrables $p = 2, 3$, pour lesquels il existe des solutions multi-soliton explicites.

Néanmoins, on trouve de nouvelles solutions exceptionnelles pour $p = 4$ qui sont les généralisations naturelles des multi-solitons dans le cas nonintégrable.