Université de Lille 1
Master 1 Recherche de Mathématiques 2004 / 2005
Mathématiques Assistées par Ordinateur (MAO)

Feuille d'exercices 3

1 - Interpolation et Fourier : TFD

De par leur définition, la détermination des coefficients de fourier d'une fonction nécessite de savoir calculer exactement les intégrales

$$c_n = \int_0^T u(x) e^{-i2\pi x/T} dx,$$

ce qui n'est évidemment pas toujours possible en pratique. Une idée naturelle consisterait alors à approcher ces intégrales par des formules de quadratures. Soit. Mais laquelle ou lesquelles choisir ?

Rappelons que, par construction, si $e_i,\ i = 1, \cdots$ est une suite hilbertienne dans l'espace de Hilbert E, alors les coefficients c_n de Fourier de $u \in E$ vérifient :

$$\|u - \sum_{i=1}^{N} c_i e_i\|_E \leq \|u - \sum_{i=1}^{N} d_i e_i\|_E, \forall (d_i)_{i=1}^N \in \mathbb{C}^N, \forall N \in \mathbb{N}^*,$$

les relations d'orthogonalité donnant directement

$$c_i = \frac{(u, e_i)}{(e_i, e_i)}.$$

Parmi les techniques d'approximation rencontrées, nous avons mis en œuvre celle de l'interpolation polynômiale. Marions-donc allègrement Fourier et interpolation ! Pour cela plaçons-nous dans l'espace $\mathcal{E} = \{u \in L^2([0, T])\}$ qui, munit du produit scalaire $(f, g) = \int_0^T f(x)\bar{g}(x)dx$ est un espace de Hilbert. Pour N pair donné cherchons $u_N \in K_N = LIN(e^{2ik\pi x/T}, k = -N/2, \cdots, N/2 - 1)$ tel que

$$u_N(\frac{jT}{N}) = u(\frac{jT}{N}), j = 0, \cdots, N - 1.$$

Puisque $u_n \in K_N$, nous pouvons écrire

$$u(\frac{jT}{N}) = U_N(\frac{jT}{N}) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} c_k e^{-\frac{2i\pi kT\pi}{TN}}.$$

d'où

$$u(\frac{jT}{N}) e^{i\frac{2j\ell\pi}{N}} = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} c_k e^{-\frac{2ijk\pi}{N}} e^{i\frac{2j\ell\pi}{N}}$$

Ainsi

$$\sum_{j=0}^{N-1} u(\frac{jT}{N}) e^{i\frac{2j\ell\pi}{N}} = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} c_k \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\frac{2ij(k-\ell)\pi}{N}}$$

A l'aide d'une technique rencontrée au lycée, on démontre l'identité

$$\sum_{j=0}^{N-1} e^{-\dfrac{2ij(k-\ell)\pi}{N}} = N\delta_{k,\ell}$$

Finalement

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} u(\frac{jT}{N})e^{i\dfrac{2jk\pi}{N}}.$$

ce qui n'est rien d'autre que l'approximation du (vrai) coefficient de Fourier par une formule des rectangles à gauche !!!!!!

Exercice 1

1. Calculer les coefficients de la série de Fourier et ceux de la TFD pour chacune des fonctions suivantes

$$(a) u(x) = 1 - |x|, [-1, 1]$$

2. Représenter sur un même graphique la somme partielle de Fourier et la TDF. Que remarquez-vous ?

2 - Diagonalisation et TFD

Considérons la discrétisation par différences finies du problème de Dirichlet 1-D

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f \quad \text{dans }]0,1[, \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

Soit A la matrice de discrétisation avec N points intérieurs régulièrement espacés :

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

avec $h = \dfrac{1}{N+1}$. On rappelle le

Théorème 1 *Les valeurs propres de A sont les nombres*

$$\lambda_i = 2(1 - \cos(i\pi h))/h^2, i = 1, \cdots, N.$$

Le vecteur propre associé à λ_i est

$$w_i = (\sin(i\pi h), \sin(2i\pi h), \sin(3i\pi h), \cdots, \sin(Ni\pi h))^T.$$

La résolution du système

$$Au = f$$

est triviale si l'on se place dans la base des vecteurs propres de A. En effet soit $V = (v_1, v_2, \cdots, v_N)^T \in \mathbb{R}^N$. Dans la base w_i, on écrit

$$V = \sum_{i=1}^{N} \hat{v}_i w_i$$

d'où

$$v_j = \sum_{i=1}^{N} \hat{v}_i \sin(ij\pi h)$$

Tenant compte de la relation d'orthogonalité donnée par le

Lemme 2

$$\sum_{k=1}^{n} sin(ki\pi h)\sin(kj\pi h) = \frac{N+1}{2}\delta_{ij}$$

on en déduit que

$$\hat{v}_j = \frac{2}{N+1}\sum_{i=1}^{N} v_i \sin(ij\pi h).$$

L'algorithme de résolution se présente alors comme suit :

i. *calcul de f dans la base des w_i*

$$\hat{f}_i = \frac{2}{N+1}\sum_{i=1}^{N} f_i \sin(ij\pi h),\ i = 1, \cdots, N.$$

ii. *résolution du système dans cette base*

$$\hat{v}_i = \hat{f}_i/\lambda_i,\ i = 1, \cdots, N.$$

iii. *réécriture de $\hat{V}$ dans la base canonique*

$$v_i = \sum_{i=1}^{N} \hat{v}_i \sin(ij\pi h),\ i = 1, \cdots, N.$$

Remarque 3 *Là encore, le coefficient de Fourier est approché par une formule des rectangles à gauche. Il n'est pas difficile de vérifier que ces coefficients définissent le polynôme d'interpolation trigonométrique de la fonction v aux points $x_j = \frac{j}{N+1}$, $j = 1, \cdots N$.*

Exercice 2

1. On considère le problème de Dirichlet 1-D avec $f(x) = sin(3\pi x)e^{-x}$.
2. Calculer la solution exacte du problème.
3. Mettre en œuvre l'algorithme ci-dessus en Matlab. Pour différentes valeurs de N, calculer l'erreur aux points de discrétisation. On pourra tracer une courbe de l'erreur en fonction de N et on explorera la commande `semilogy`.
4. On remplace λ_i par $\mu_i = i^2\pi^2$. Refaire les calculs précédents. Que remarque-t-on ?

3 - TFD et FFT

On l'a vu plus haut la vertu principale de la TFD est de possder une inverse qui se présente sous la même forme. Quel que soit le sens de la transformation considéré, nous sommes amenés à calculer des sommes du type

$$P(W_N) = \sum_{j=0}^{N} f_j W_N^j$$

où $W_N = e^{-i2\pi/N}$ est la racine Nième de l'unité. On introduit les deux polynômes

$$P_p(W_N) = f_0 + f_2 W_N + \cdots + f_{N-2} W_N^{N/2-1} \text{ et } P_i(W_N) = f_1 + f_3 W_N + \cdots + f_{N-1} W_N^{N/2-1}$$

Maintenant, remarquons que

$$P(W_n) = P_p(W_N^2) + W_N P_i(W_N^2)$$

si bien que, puisque $W_N^2 = W_{N/2}$, le calcul se réduit à l'évaluation de deux polynômes en la racine $N/2$ième de l'unité. Lorsque N est une puissance de 2 ce calcul peut s'effectuer récursivement, en $\mathcal{O}(N \log_2(N))$ opérations. L'algorithme de la FFT (Fast Fourier Transform) ou TFR (Transformée de Fourier Rapide) consiste donc en une mise en œuvre efficace de ce principe.

Exercice 3

1. Explorer la commande `fft` de Matlab.
2. Différentiation et fft.
   Soit f une fonction L-périodique, développable en série de Fourier ainsi que toutes ses dérivées :
   $$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\frac{2\pi kx}{L}}.$$
   Formellement, on a
   $$\frac{d^m f}{dx^m} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (i\frac{2\pi k}{L})^m c_k e^{i\frac{2\pi kx}{L}},$$
   ce qui donne directement l'expression des coefficients de Fourier de $\frac{d^m f}{dx^m}$; on ne s'occuppe pas ici des conditions de convergence mais simplement des techniques de calcul si bien que l'on se placera toujours dans le cadre ou toutes les opérations sont licites.

   Bien entendu,la dérivation terme à terme s'applique *a fortiori* à la série tronquée
   $$f_N(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} c_k e^{i\frac{2\pi kx}{L}}.$$
   Dans la pratique, il reste toujours à calculer les c_k et pour les approcher, on s'en remet à notre formule des rectangles à gauche. On définit ainsi la méthode suivante pour approcher la dérivée d'une fonction périodique en N points prédéfinis régulièrement espacés.

   i. Calculer $(f(\frac{kL}{N})$, $k = 0, \cdots, N-1$.
   ii. Calculer les coefficients $\tilde{c}_k$ de Fourier approchés de f par fft.
   iii. Définir $d_k = (i\frac{2\pi k}{L})^m \tilde{c}_k$ (les coefficients approchés de $f^{(m)}(\frac{kL}{N})$.
   iv. En déduire l'approximation de $f^{(m)}(\frac{kL}{N})$ par fft inverse.

Important : la fft utilise une permutation des indices. Pour les retrouver dans le bon ordre, on pourra définir les coefficients de dérivation par fréquence comme suit :

```
for j=1:N/2
Mm(j)=(2*pi*(j-1)/L)^ m;
Mm(n+1-j)=-(2*pi*j/L)^ m;
end
```

Appliquer la méthode décrite ci-dessus pour approcher les dérivées premières et secondes de

$$f(x) = x(1-x),\ [0,1],\ g(x) = (x(1-x))^2,\ [0,1],\ h(x) = 1-|x|,\ [-1,1];$$