Université de Lille 1
Master 1 Recherche de Mathématiques 2004 / 2005
Mathématiques Assistées par Ordinateur (MAO)

Feuille d'exercices 2

1. Représentation graphique des approximées de Fourier.
   Représenter graphiquement les approximées de Fourier des fonctions suivantes
   - $f(x) = abs(x)$
   - $g(x) = (1-(1-x)^2)^2$
2. Phénomène de Gibbs
   On considère la fonction T-périodique en créneaux :
   $$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]-T/2, 0[, \\ -1 \text{ si } x \in]0, T/2[, \end{cases}$$
   (a) Animer $SF_N(x)$ pour $N = 1, \cdots, 20$. Que remarque-t-on ? On choisit dans toute la suite $T = 2\pi$.
   (b) Le point culminant étant l'extrémum local de f le plus proche de x=0, on s'intéresse la plus petite valeur x0 de x annulant la dérivée de $SF_N(f)(x)$ sur $[0, \pi/2]$.
   (c) Calculer x0 pour tout N
   (d) Pour différentes valeurs de N, calculer numériquement $SF_N(f)(x0)$. Que peut-on en conclure ?
   (e) Filtre de Fejer
   Montrer que, pour une fonction 2π-périodique, on a
   $$K_n(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\cos(kx)$$
   et que
   $$K_n(x) * f = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} = \left(1-\frac{k}{n}\right)(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$$
   (f) représenter $K_n * f$ pour différentes valeurs de n. Que remarquez-vous ?
3. Equation des ondes. Instruments à corde.
   On se propose ici de simuler la vibration d'une corde musicale de longueur L pour les instruments piano, violon et guitare. On considèrera les données suivantes :

L=100;	(longueur de la corde)
c=3000;	(vitesse des ondes de déplacements dans la corde)
a=L/2;	(position du pincement (guitare) ou de la frappe (piano))
h=1;	(amplitude maximale du deplacement initial)
b=L/20;	(largeur du marteau (corde de piano))
v=200	(amplitude de la vitesse initiale (corde de piano))

Le déplacement vertical de la corde $u(x,t)$ est modélisé par l'équation des ondes ; on suppose que la force extérieure est la seule tension et que le déplacement aux extrémités est nul (conditions de type Dirichlet homogène).

(a) Mettre en œuvre une méthode de séparation des variables et proposer une formule approchée pour $u(x,t)$, notée $u_N(x,t)$; on explicitera cette approximation en fonction des coefficients de Fourier de la donnée initiale.

(b) On fournit les coefficients de Fourier suivants :

- Corde pincée (guitare)

$$c_n = \frac{2h}{(n^2\pi^2)L^2}(a(L-a))\sin\frac{(n\pi a)}{L}$$

- Corde frottée (violon)

$$c_n = \frac{32h}{((2n-1)^3\pi^3)}$$

- Corde frappe (piano)

$$c_n = \frac{2vb\sin{(n\pi a)}/L}{(n\pi c)}$$

Calculer $u_N(x,t)$ et effectuer une animation avec Matlab dans chacun de ces 3 cas.

4. Equation de la chaleur.
On s'intéresse à l'évolution de la distribution de température $u(x,t)$ dans une barre infiniment mince de longueur 1, de conductivité thermique 1 et dont les extemités sont maintenues aux températures T_0 en $x=0$ et T_1 en $x=1$. Soit $f(x,t)$ la source extérieure de chaleur. Alors $u(x,t)$ est solution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t) = T_0, u(1,t) = T_1, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{3}$$

On supposera dans la suite que $T_0 = T_1 = 0$.

(a) Mettre en œuvre une méthode de séparation des variables.

(b) Programmer une animation de la solution approchée au cours du temps ; on pourra partir des données :

$$u(x,0) = 1 - 2|x - 1/2| \quad \text{et} \quad f(x) = exp(-x).$$