Université de Lille 1
Master 1 de Mathématiques 2004 / 2005
Mathématiques Assistées par Ordinateur (MAO)

Feuille d'exercices 1

1. Animation du polynôme d'interpolation de Lagrange
   On considère la fonction `f=exp(sin(pi*x)).*cos(3*pi*x)` sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour n donné, on définit les points d'interpolations $x_i^n = i/(n)$, $i = 0, \cdots, n$.
   Pour n variant de 2 à Nmax (donné) représenter successivement sur le même graphique f,son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points x_i^n ainsi que les points $(x_i^n, f(x_i^n))$. On pourra adopter le plan suivant
   ```
   for i=n:Nmax figure(1)
   % construction de xu :  pts interpolation, pxu polynome d'interpolation
   % x points de discrétisation , pxu évaluation de p en les x
   % f evaluation de f en les x
   plot(x,pxu,xu,fxu,'+',x,f)
   title('Interpolation anime')
   xlabel('x')
   legend('Poly.  Pts unif.','pts interp.','la fonction f',-2)
   drawnow
   pause(1)
   end
   ```

2. Phénomène de Runge
   La convergence du polynôme d'interpolation de Lagrange p vers la fonction f n'a pas toujours lieu. Un contre-exemple classique est celui de Runge, lorsque la fonction considérée est
   $$f(x) = \frac{1}{1 + 16x^2}, \ x \in [-1, 1]$$
   (a) Les x_i sont régulièrement espacés, $x_i = -1 + 2i/n$, $i = 0, \cdots, n$. Représenter f et p sur un même graphique pour différentes valeurs de n. Que remarque-t-on ?
   (b) Les x_i sont définis comme les zéros des polynômes de Tchebytcheff :
   $$x_i = sin((-1 + 2i/n)\pi/2).$$
   Effectuer le même type de représentation graphique que précédemment. Conclusion ?

3. Approximation au sens des moindres carrés.
   On reprend les notations de la feuille 1.
   (a) On se place dans la base canonique de $\mathcal{P}_n$: $e_i = x^i$, $i = 0, \cdots, n$. On choisit $f(x) = exp(x) * sin(pi * x)$ sur $[0, 1]$. Calculer et représenter l'approximation de f au sens des moindres carrés dans $L^2([0, 1])$. Maintenant, on approche les contributions de f par une formule de quadrature (trapèzes ou rectangles). QUe remarque-ton ? les résultats sont-ils comparables ?
   (b) Mêmes questions mais avec $e_i = T_i$, le $i$ème polynôme de Chebyshev.

4. Polynôme de meilleure approximation uniforme.
   Soit $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{C}([0,1])/f(0) = f(1) = 0\}$. Soit $f \in \mathcal{E}$. Pour n fixé, on définit l'approximation f_n de f par les polynômes de Bernstein comme

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k (1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n}).$$

   On choisit $f = exp(sin(pi * x)) * sin(3 * pi * x)$. Représenter f et f_n sur un même graphique.