

Travail encadré de recherche

Présenté par : Quentin Fourché et Benjamin Kasprzak

10 mai 2019

Modélisation du trafic routier

Référente : Ana Matos.

Contents

1	Approche du modèle mathématiques	4
1.1	Obtention de l'équation de transport	4
1.2	Approximation polynomiale pour le flux	5
2	Étude générale des problèmes hyperboliques	7
2.1	Problème de transport linéaire	7
2.2	Problème de transport non linéaire	10
2.3	Résolution de l'équation de Burgers	21
3	Schémas de volumes finis pour le problème non linéaire	27
3.1	Présentation générale de la méthode	27
3.2	Différents schémas à implémenter	28
3.3	Étude théorique des schémas	31
4	Retour au trafic routier	36
4.1	Position du problème	36
4.2	Simulation numérique : visualisation d'une détente	38
4.3	Simulation numérique : visualisation d'un choc	40

Introduction

Dans le cadre de notre première année commune de Master, nous sommes amenés à réaliser un travail de recherche et nous avons choisi de le faire, parmi les divers sujets proposés, sur la modélisation du trafic routier. Nous avons choisi ce sujet pour deux raisons :

La première est que le trafic routier est un sujet du quotidien, qui nous concerne tous et la fluidité de celui-ci concerne sans doute toute personne étudiant à l'université de Lille et venant en voiture par l'autoroute A1, considérée comme la deuxième route la plus embouteillée de France aux heures de pointes.

La deuxième raison est la possibilité de découvrir la résolution d'une équation aux dérivées partielles non linéaire via la méthode des volumes finis. Cette dernière n'étant enseignée que durant la dernière année de Master, c'était l'occasion pour nous de la découvrir en avance, par nous même, en prévision de l'année prochaine.

Durant cette étude, nous aurons l'occasion de manipuler le logiciel Python, et d'implémenter la méthode des volumes finis pour résoudre dans un premier temps l'équation de Burgers, puis pour résoudre l'équation similaire du trafic routier, où la fonction non linéaire de notre modèle sera parabolique et approchée par une méthode de moindres carrés ordinaire.

Nous concluons alors notre étude par une simulation numérique via le logiciel Python, afin d'afficher la vitesse et éventuellement la densité du trafic routier. Avec le sujet, sont mises à disposition les données de la densité (le nombre de voitures par unité de longueur) de deux routes A et B , plus ou moins surchargées de voitures, que nous étudierons par la suite.

1 Approche du modèle mathématiques

1.1 Obtention de l'équation de transport

Nous considérons un tronçon de route à sens unique de taille L , sans entrée ni sortie de véhicule au milieu du tronçon. Nous désignerons par x la distance au bord 0 d'un point du tronçon et par t le temps. Présentons rapidement les différentes quantités entrant en jeu :

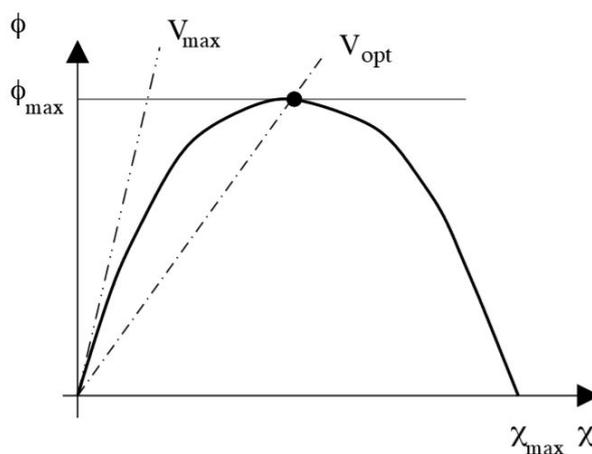
- $V(x, t)$: Vitesse moyenne des véhicules au point x et à l'instant t .
- $\phi(x, t)$: Flux moyen instantané, c'est à dire le nombre de véhicules au point x par unité de temps.
- $\chi(x, t)$: Densité moyenne instantanée, c'est à dire le nombre de véhicules par unité de longueur.

Il est clair de remarquer que :

$$\chi V = \frac{\text{Nbr de véhicules}}{\text{Longueur}} \times \frac{\text{Longueur}}{\text{Temps}} = \frac{\text{Nbr de véhicules}}{\text{Temps}} = \phi$$

Nous disposons pour notre étude de deux routes, A et B où les valeurs de la densité et du flux moyen sont données par le tableau ci dessous. Les quantités précédemment citées n'étant pas indépendantes, les observations nous donnent une loi empirique $\phi = f(\chi)$ pour une fonction $f : [0, \chi_{max}]$ concave, supposée régulière, nulle au bord.

Route A		Route B	
10	1200	10	550
18	1850	18	825
25	2500	25	900
38	2700	38	1000
50	2050	50	1050
60	1550	60	1060
80	1000	80	1000
92	500	92	500
100	0	100	0



Relation fondamentale $\phi = f(\chi)$

Supposons maintenant que les quantités V, ϕ, χ soient suffisamment régulières pour que les calculs ci-après soient corrects. On considère l'évolution du trafic routier sur un tronçon $[x, x + \Delta x]$ durant un intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$. La loi de conservation du nombre de

véhicules, où N_{Ve} est le nombre de véhicule sur ce segment, s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
N_{Ve}(\text{final}) - N_{Ve}(\text{initial}) &= N_{\text{entrés}} - N_{\text{sortis}} \\
\chi(x, t + \Delta t) - \chi(x, t) &= \phi(x, t) - \phi(x + \Delta x, t) \\
\int_x^{x+\Delta x} \chi(\xi, t + \Delta t) - \chi(\xi, t) d\xi &= \int_t^{t+\Delta t} \phi(x, \tau) - \phi(x + \Delta x, \tau) d\tau \\
\int_x^{x+\Delta x} \left(\int_t^{t+\Delta t} \partial_t \chi(\xi, \tau) d\tau \right) d\xi &= - \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_x^{x+\Delta x} \partial_x \phi(\xi, \tau) d\xi \right) d\tau \quad (\text{TFA}) \\
\int_x^{x+\Delta x} \int_t^{t+\Delta t} \partial_t \chi(\xi, \tau) + \partial_x \phi(\xi, \tau) d\tau d\xi &= 0 \quad (\text{Fubini sous hypothèses de régularité})
\end{aligned}$$

Puisque Δx et Δt sont supposés petits, par passage à la limite, l'intégrande est nulle.

Puisque nous avons supposé que $\phi = f(\chi)$, alors :

$$\boxed{\partial_t \chi(x, t) + \partial_x f(\chi(x, t)) = 0}$$

Ainsi, nous obtenons le modèle mathématique central pour notre étude, assorti de condition aux limites de Dirichlet :

$$\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial t} \chi(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(\chi(x, t)) = 0 & \forall (x, t) \in]0, L[\times]0, T[\\
\chi(x, 0) = \chi_0(x) & \forall x \in]0, L[\\
\chi(0, t) = \chi_{\text{entrée}}(t) & \forall t \in]0, T[
\end{cases}$$

D'un point de vue pratique, il n'est pas toujours très rationnel d'utiliser la densité pour spécifier l'état à l'entrée de la portion de route, mais il est possible de la déduire à l'aide du flux ϕ qui s'obtient par un simple comptage.

1.2 Approximation polynomiale pour le flux

Revenons un instant sur les routes A et B de nos données de départ. Nous avons supposé plus tôt que $\phi = f(\chi)$, pour une certaine fonction f , concave, régulière, nulle au bord de l'intervalle $[0, \chi_{max}]$. Nous allons ici introduire une méthode d'approximation polynomiale par MCO (Moindres carrés ordinaires) pour obtenir cette fonction f en pratique. Il semble naturel, au vu du graphique attendu, de s'attendre à un polynôme du second degré.

Supposons alors que $f(\chi) = \beta_2 \chi^2 + \beta_1 \chi + \beta_0$.

La méthode des MCO revient à minimiser la fonction :

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^n \left[\phi_i - \underbrace{\left(\beta_2 \chi_i^2 + \beta_1 \chi_i + \beta_0 \right)}_{=f(\chi_i, \beta)} \right]^2$$

Minimiser S revient alors à résoudre :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, \frac{\partial S}{\partial \beta_k} = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket, \sum_{i=1}^n (\phi_i - f(\chi_i, \beta)) \frac{\partial f(\chi_i, \beta)}{\partial \beta_k} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (k=0) & \sum_{i=1}^n (\phi_i - \beta_2 \chi_i^2 - \beta_1 \chi_i - \beta_0) = 0 \\ (k=1) & \sum_{i=1}^n (\phi_i - \beta_2 \chi_i^2 - \beta_1 \chi_i - \beta_0) \chi_i = 0 \\ (k=2) & \sum_{i=1}^n (\phi_i - \beta_2 \chi_i^2 - \beta_1 \chi_i - \beta_0) \chi_i^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (k=0) & \beta_0 n + \beta_1 \left(\sum_{i=1}^n \chi_i \right) + \beta_2 \left(\sum_{i=1}^n \chi_i^2 \right) = \sum_{i=1}^n \phi_i \\ (k=1) & \beta_0 \left(\sum_{i=1}^n \chi_i \right) + \beta_1 \left(\sum_{i=1}^n \chi_i^2 \right) + \beta_2 \left(\sum_{i=1}^n \chi_i^3 \right) = \sum_{i=1}^n \phi_i \chi_i \\ (k=2) & \beta_0 \left(\sum_{i=1}^n \chi_i^2 \right) + \beta_1 \left(\sum_{i=1}^n \chi_i^3 \right) + \beta_2 \left(\sum_{i=1}^n \chi_i^4 \right) = \sum_{i=1}^n \phi_i \chi_i^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n \chi_i & \sum_{i=1}^n \chi_i^2 \\ \sum_{i=1}^n \chi_i & \sum_{i=1}^n \chi_i^2 & \sum_{i=1}^n \chi_i^3 \\ \sum_{i=1}^n \chi_i^2 & \sum_{i=1}^n \chi_i^3 & \sum_{i=1}^n \chi_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \phi_i \\ \sum_{i=1}^n \phi_i \chi_i \\ \sum_{i=1}^n \phi_i \chi_i^2 \end{pmatrix}$$

Il suffit alors de résoudre ce système 3×3 par la méthode numérique de son choix, inversion de la matrice carrée si elle est inversible, ou alors par résolution LU.

Avec nos données pour la route A et B , nous obtenons les courbes suivantes, qui nous semblent satisfaisantes :

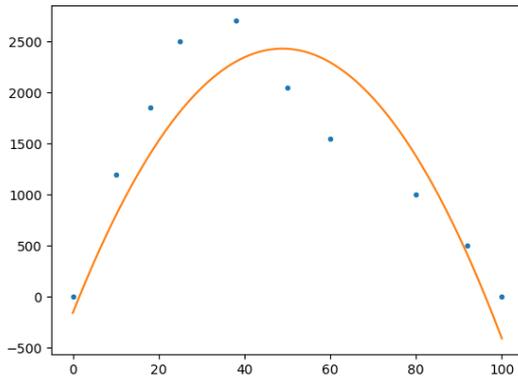


Figure 1 : Route A

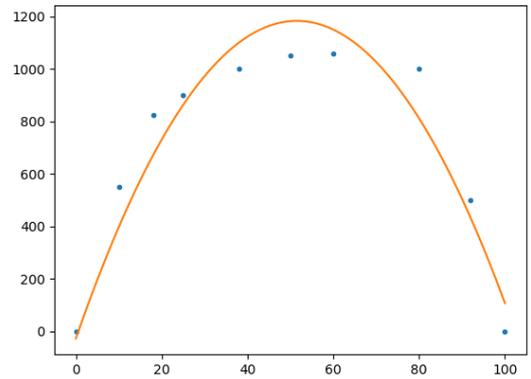


Figure 2 : Route B

2 Étude générale des problèmes hyperboliques

2.1 Problème de transport linéaire

Nous commençons par étudier le cas d'une équation de transport hyperbolique linéaire, modélisé souvent lors de l'étude d'un problème de transport, de la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + c \partial_x u(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le coefficient $c \in \mathbb{R}$ est appelé la vitesse de transport, $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ étant la condition initiale du problème. Le problème s'appelle un problème de Cauchy.

Définition :

On dit qu'une fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une **solution classique** (ou solution forte) du problème de Cauchy, si $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et vérifie ce problème.

Théorème :

Si $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, alors il existe une unique solution du problème de Cauchy qui s'écrit :

$$u(x, t) = u_0(x - ct)$$

Preuve :

L'existence de la solution est immédiate en remarquant que la fonction $u(x, t) = u_0(x - ct)$ est de classe C^1 et que $\partial_t + c\partial_x = 0$ en tout point.

L'unicité nécessite l'introduction de la notion de caractéristique, fort utile dans la résolution numérique que nous verrons un peu plus tard. On appelle droite caractéristique de u issue de x_0 la droite d'équation $x(t) = ct + x_0$, illustré sur la figure suivante.

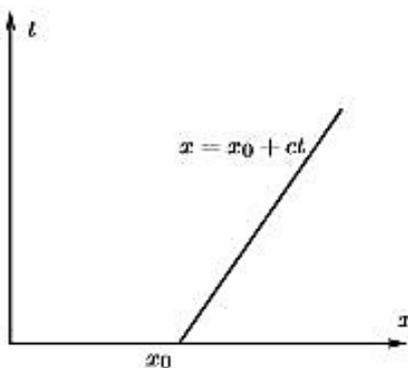


Figure 1 : $c > 0$

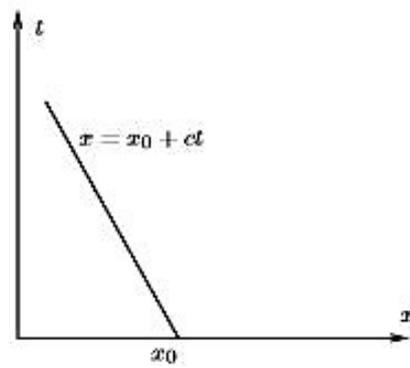


Figure 2 : $c < 0$

Montrons que si u est solution du problème de Cauchy, alors u est constante sur la droite caractéristique, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et $\varphi_{x_0} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\varphi_{x_0}(t) = u(x_0 + ct, t)$.

On dérive φ_{x_0} par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned}\varphi_{x_0}'(t) &= c\partial_x u(x_0 + ct, t) + \partial_t u(x_0 + ct, t) \\ &= (\partial_t u + c\partial_x)(x_0 + ct, t) \\ &= 0 \text{ car } u \text{ solution du problème de Cauchy précédent}\end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$\varphi_{x_0}(t) = \varphi_{x_0}(0) = u_0(x_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

On a donc $u(x_0 + ct, t) = u_0(x_0)$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, donc u est constante sur la droite caractéristique, et en posant $x = x_0 + ct$, on obtient bien l'existence et l'unicité de la solution du problème introduit. ★

Remarque : .

Cette introduction de droites caractéristiques est très utile en pratique pour obtenir des solutions fortes d'un problème de Cauchy, nous en reverrons quelques exemples dans la section 2.3 sur l'équation de Burgers.

Définition : .

On dit qu'une fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une **solution faible** du problème de Cauchy, si $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} [u(x, t)\partial_t \varphi(x, t) + cu(x, t)\partial_x \varphi(x, t)] dt dx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(x, 0) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

Dans cette définition, C_C^1 fait référence aux fonctions C^1 à support compact.

Proposition : .

Si u est une solution classique du problème de Cauchy, alors u est une solution faible. Réciproquement, si $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) \cap C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ est une solution faible du problème de Cauchy, alors c'est une solution forte.

Preuve :

Celle-ci sera faite dans un cadre plus générale dans la section suivante, dans le cas des équations non linéaires. ★

Remarque : .

Il est essentiel que $\varphi \in C_C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ dans cette définition et pas juste $C_C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ car sinon nous ne récupérons pas la condition initiale du problème de Cauchy.

Lemme : . (Résultat d'existence)

Soit $f \in C_C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, alors :

$$\exists \varphi \in C_C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \quad \text{tq} \quad \partial_t \varphi(x, t) + c \partial_x \varphi(x, t) = f$$

Preuve :

Soit $f \in C_C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $T > 0$ tel que $f(x, t) = 0$ si $t \geq T$.

On considère le problème :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(x, t) + c \partial_x \varphi(x, t) = f \\ \varphi(x, T) = 0 \end{cases}$$

On vérifie facilement que le problème précédent admet une solution classique de la forme :

$$\varphi(x, t) = - \int_t^T f(x - c(x - t), s) ds$$

En effet, avec ce choix de φ , on a effectivement :

$$\varphi \in C_C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \quad \text{tq} \quad \partial_t \varphi(x, t) + c \partial_x \varphi(x, t) = f$$

De plus, comme f est à support compact, alors φ est à support compact. ★

Théorème : .

Si $u_0 \in L_{loc}^\infty$ (intégrable sur tout compact), alors il existe une unique fonction u solution faible du problème de Cauchy.

Preuve :

On va montrer que $u(x, t) = u_0(x - ct)$ est une solution faible.

Comme $u_0 \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$, on a : $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$.

Soit $\varphi \in C_C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on veut montrer que :

$$\int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dx dt + \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} cu(x, t) \partial_x \varphi(x, t) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0$$

Posons $A = \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dx dt + \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} cu(x, t) \partial_x \varphi(x, t) dx dt$.

Si $u(x, t) = u_0(x - ct)$, on a alors :

$$\begin{aligned} A &= \int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} [u_0(x - ct) \partial_t \varphi(x, t) + cu_0(x - ct) \partial_x \varphi(x, t)] dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \int_{\mathbb{R}_+} [\partial_t \varphi(y + ct, t) + c \partial_x \varphi(y + ct, t)] dt dy \quad \text{par changement de variable } y = x - ct \text{ puis Fubini} \end{aligned}$$

Si on pose $\psi_y(t) = \varphi(y + ct, t)$, on a alors :

$$A = \int_{\mathbb{R}} \left(u_0(y) \int_0^{+\infty} \psi_y'(t) dt \right) dy$$

Comme ψ est à support compact sur $[0, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} A &= - \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \psi_y(0) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \varphi(y, 0) dy \end{aligned}$$

On a ainsi démontré que la fonction $u(x, t) = u_0(x - ct)$ est solution faible du problème de Cauchy. On a donc existence d'une solution faible. Pour montrer l'unicité, prenons deux solutions faibles u, v du problème de Cauchy et posons $w = u - v$ et montrons que $w = 0$.

Par définition, w satisfait :

$$\int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} w(x, t) (\partial_t \varphi(x, t) + c \partial_x \varphi(x, t)) dx dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

Par le lemme précédent, on a donc :

$$\int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} w(x, t) f(x, t) dx dt = 0 \quad \forall f \in C_C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

Cela entraîne que $w = 0$ presque partout. ★

Remarque : .

La solution faible du problème de Cauchy possède les propriétés suivantes :

- Si $u_0 \geq 0$ pp, alors $u \geq 0$ pp.
- $\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|u_0(x)\|_{L^p(\mathbb{R})}$, $\forall p \in \llbracket p, +\infty \rrbracket$.

2.2 Problème de transport non linéaire

Données deux fonctions $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u_0 \in C(\mathbb{R})$, on considère maintenant l'équation hyperbolique non linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t)) = 0 & \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

Définition : .

Supposant $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ et $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on dit qu'une fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une **solution classique** (ou solution forte) du problème (1), si $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et vérifie ce problème.

Remarque : .

Cette définition n'a pas grand intérêt car, comme nous le verrons par après, le problème précédent n'a en général pas de solution forte.

Définition : .

On appelle **courbe caractéristique** issue de $x_0 \in \mathbb{R}$ la courbe définie par le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f'(u(x(t), t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Théorème : .

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f' supposée non constante. Alors, il existe $u_0 \in C_C^\infty(\mathbb{R})$ telle que le problème non linéaire n'admette pas de solution classique.

Preuve :

Comme $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on a $f' \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Il existe donc une solution maximale $x(t)$ définie sur $[0, T_{max}]$ vérifiant : $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow T_{max}]{} +\infty$ si $T_{max} < +\infty$.

Soit $\varphi : t \mapsto u(x(t), t)$. Par dérivation et définition de x , on obtient :

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \partial_t u(x(t), t) + \partial_x u(x(t), t)x'(t) \\ &= \partial_t u(x(t), t) + f'(u(x(t), t)) \partial_x u(x(t), t) \\ &= (\partial_t u + \partial_x f(u))(x(t), t) \\ &= 0\end{aligned}$$

La fonction φ est donc constante et on a :

$$u(x(t), t) = \varphi(t) = \varphi(0) = u(x(0), 0) = u_0(x_0) \quad \forall t \in [0, T_{max}]$$

Comme $u(x(t), t) = u_0(x_0)$, $\forall t \in [0, T_{max}]$, on a donc $x'(t) = f'(u_0(x_0))$.

Par intégration, la courbe caractéristique (définition précédente) décrit la droite d'équation :

$$x(t) = f'(u_0(x_0))t + x_0$$

On obtient alors que $\lim_{t \rightarrow T_{max}} |x(t)| < +\infty$, et alors $T = T_{max}$.

Comme f' est non constante, il existe v_0, v_1 tq $f'(v_0) > f'(v_1)$ et on peut construire $u_0 \in C_C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tq $u_0(x_0) = v_0$ et $u_0(x_1) = v_1$, où $x_0 < x_1$.

Supposons que u soit solution classique avec cette donnée initiale. Alors :

$$\begin{aligned}u(x_0 + f'(u_0(x_0))t, t) &= u_0(x_0) = v_0 \\ u(x_1 + f'(u_0(x_1))t, t) &= u_0(x_1) = v_1\end{aligned}$$

Soit T tel que $x_0 + f'(v_0)T = x_1 + f'(v_1)T = \bar{x}$. C'est à dire que :

$$T = \frac{x_1 - x_0}{f'(v_0) - f'(v_1)}$$

On a alors $u(\bar{x}, T) = u_0(x_0) = v_0 = u_0(x_1) = v_1$, ce qui est impossible.

On en conclut alors que le problème non linéaire n'admet pas de solution classique pour cette donnée initiale. ★

Définition : .

Supposant $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on dit qu'une fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une **solution faible** du problème non linéaire, si $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ telle que :

$$\int \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} [u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) + f(u(x, t)) \partial_x \varphi(x, t)] dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

Proposition : .

Si u est solution classique du problème non linéaire, alors u est solution faible. Réciproquement, si $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) \cap C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ est solution faible du problème non linéaire, alors u est solution classique.

Preuve :

1. Supposons que u est solution classique de l'équation hyperbolique non linéaire.

Soit $\varphi \in C_C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Multiplions le système d'équation du problème et intégrons sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

On obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \partial_t u(x, t) \varphi(x, t) dt dx + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \partial_x f(u(x, t)) \varphi(x, t) dt dx = 0$$

L'application du théorème de Fubini et une intégration par parties donnent alors :

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u(x, t) \partial_t u(x, t) dt dx - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} f(u(x, t)) \partial_x \varphi(x, t) dx dt = 0$$

Ce calcul est appuyé par le fait que $\text{Supp}(\varphi)$ soit compact. Nous obtenons alors la relation de la définition précédente grâce à la condition initiale $u(x, 0) = u_0(x)$.

2. Soit u une solution faible du problème hyperbolique non linéaire, vérifiant de plus $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) \cap C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. On a donc suffisamment de régularité pour intégrer par parties la relation définie dans la définition de solution faible. Cela donne :

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \partial_t u(x, t) \varphi(x, t) dt dx - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \partial_x f(u(x, t)) \varphi(x, t) dt dx &= 0 \quad \forall \varphi \in C_C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \\ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (\partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t))) \varphi(x, t) dt dx &= 0 \quad \forall \varphi \in C_C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

Comme $\partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t))$ est continue, alors cette fonction est nulle. En effet, on rappelle que si $\int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx = 0$ pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors $f = 0$ pp. Si de plus f est continue, alors $f = 0$ partout.

On prend alors $\varphi \in C_C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. Dans ce cas, une nouvelle intégration par parties de l'équation donnée dans la définition de solution faible donne :

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (\partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t))) \varphi(x, t) dt dx - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0$$

Puisqu'on a montré que $\partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t)) = 0$, on déduit que :

$$\int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - u(x, 0)) \varphi(x, 0) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$$

Comme u est continue, ceci entraîne que $u(x, 0) = u_0(x)$, et donc u solution classique. ★

Notons qu'il existe souvent plusieurs solutions faibles. On a donc besoin d'une notion supplémentaire pour les distinguer. C'est la notion de solution entropique, qui nous permettra d'obtenir l'unicité. Donnons un exemple simple, sur le modèle de l'équation de Burgers, de non unicité de la solution faible.

Exemple : .

Considérons l'équation de Burgers, que nous reverrons dans la section suivantes, définie comme suit :

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x (u(x, t)^2) = 0$$

Pour calculer les solutions du problème de Cauchy associé à cette équation, on considère une donnée initiale de la forme :

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0 \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ces données initiales définissent un problème de Cauchy particulier, qu'on appelle problème de Riemann, que nous reverrons par la suite, de la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \partial_x (u(x, t)^2) = 0 \\ u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0 \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Considérons alors un problème de Riemann particulier avec $u_g = -1$ et $u_d = 1$.

On cherche une solution faible de la forme :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \sigma t \\ u_d & \text{si } x > \sigma t \end{cases}$$

Notons que cette éventuelle solution est discontinue au travers de la droite d'équation $x = \sigma t$. On remplace $u(x, t)$ par ces valeurs dans la formule de la définition de solution faible précédente, on conclut alors que u est solution faible si la condition suivante, dite condition de **Rankine et Hugoniot** est vérifiée :

$$\sigma (u_d - u_g) = (f(u_d) - f(u_g))$$

Dans notre cas particulier, cette équation nous donne : $2\sigma = 1^2 - (-1)^2 = 0$.

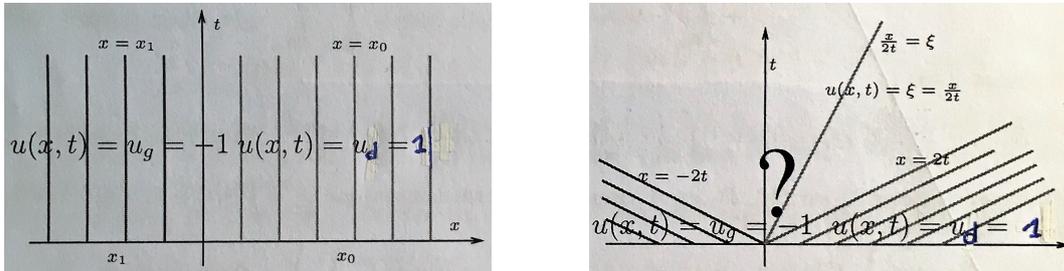
On déduit alors qu'une solution faible du problème de Cauchy pour l'équation de Burgers s'écrit alors :

$$u(x, t) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Mais on peut trouver d'autres solutions faibles. En effet, on sait que sur les caractéristiques d'équation $x = x_0 + f'(u_0(x_0))t$, la fonction u est constante.

Comme $f'(u) = 2u$, les caractéristiques sont des droites de pente -2 si $x_0 < 0$ et de pente 2 si $x_0 > 0$.

Nous obtenons alors les droites caractéristiques suivantes :



Caractéristiques du problème de Riemann particulier avec l'équation de Burgers.

Dans la zone du milieu, avec le point d'interrogation, on cherche u continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ sous la forme $u(x, t) = \varphi\left(\frac{x}{t}\right)$. La fonction u suivante convient clairement :

$$u(x, t) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -2t \\ \frac{x}{2t} & \text{si } -2t < x < 2t \\ 1 & \text{si } x > 2t \end{cases}$$

Comment choisir la "bonne" solution faible entre toutes ? Comme les problèmes hyperboliques sont souvent obtenus en négligeant les termes de diffusion des équations paraboliques, une technique pour choisir la solution est de chercher la limite du problème de diffusion associé lorsque le terme de diffusion devient négligeable ($\varepsilon \rightarrow 0$) :

$$\partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t)) - \varepsilon \partial_{xx} u(x, t) = 0$$

La famille de solutions $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ tend, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, vers une unique solution u appelée solution faible entropique.

Définition :

Supposant $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on dit qu'une fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une **solution entropique** du problème non linéaire, si $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ et pour toute fonction $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ convexe (appelée entropie) et pour toute fonction $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ (appelée flux d'entropie) telle que $\phi' = f' \eta'$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (\eta(u) \partial_t \varphi + \phi(u) \partial_x \varphi) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$$

Remarque :

Notons que dans la définition précédente, on prend une fois de plus $\varphi \in C_C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$

de manière à bien prendre en compte la condition initiale. Ceci n'est pas toujours fait de cette manière dans les travaux plus anciens sur le sujet mais entraîne des difficultés lorsqu'on s'intéresse à la convergence des schémas numériques.

Théorème : . (de Kruskov)

Soient $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R})$. Il existe une unique solution entropique du problème de transport non linéaire au sens de la définition précédente.

Preuve :

Admise. ★

Proposition : .

Si u est une solution forte du problème non linéaire, alors u est solution entropique.

Preuve :

Soient $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ une entropie convexe et ϕ le flux associé tels que $\phi' = f' \eta'$. Multiplions le problème non linéaire de départ par $\eta'(u)$. On obtient :

$$\begin{aligned} \eta'(u) \partial_t u + f'(u) \partial_x u \eta'(u) &= 0 \\ \partial_t \eta(u) + \phi'(u) \partial_x u &= 0 \\ \partial_t \eta(u) + \partial_x \phi(u) &= 0 \end{aligned}$$

De plus, comme $u(x, 0) = u_0(x)$, on a aussi : $\eta(u(x, 0)) = \eta(u_0(x))$.

Soit $\varphi \in C_C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. Multipliant l'équation précédente par φ et par intégration sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. On obtient alors, par intégration par parties, la formule de la définition de solution entropique avec égalité. ★

Proposition : .

Si u est une solution faible entropique du problème non linéaire, alors u est solution faible.

Preuve :

Il suffit de prendre $\eta(u) = u$ et $\eta(u) = -u$ dans la définition de solution entropique pour se convaincre du résultat. ★

On peut alors déduire de la première des deux propositions ainsi que du théorème de Kruskov, que si on a plusieurs solutions faibles du problème de Cauchy non linéaire, et que l'une d'entre elle est régulière, alors cette dernière est forcément la solution entropique.

Proposition : .

Soient $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, $A, B \in \mathbb{R}$ tq $A \leq u_0 \leq B$ pp et $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Alors la solution entropique $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ du problème hyperbolique non linéaire vérifie :

$$A \leq u(x) \leq B \quad \text{pp dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

Preuve :

Admise. ★

Cette propriété est essentielle dans les phénomènes de transport, et il est souhaitable qu'elle soit préservée pour la solution approchée par un schéma numérique.

Nous allons, pour finir, aborder un résultat sur les solutions des problèmes de Riemann.

Définition : .

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On appelle **problème de Riemann** avec données $u_g, u_d \in \mathbb{R}$ le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t)) = 0 & \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u(0, x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0 \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Lorsque la fonction f est convexe ou concave, les solutions du problème de Riemann se calculent facilement, par la proposition qui va suivre.

Lemme : .

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$, $f, \eta \in C^1(\mathbb{R})$ convexes et $\phi \in C^1$ tq $\phi' = \eta' f'$. Alors :

$$(b - a) \int_a^b \phi'(s) ds \geq \left(\int_a^b f'(s) ds \right) \left(\int_a^b \eta'(s) dx \right)$$

Preuve :

On a :

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi'(x) dx &= \int_a^b f'(x) \eta'(x) dx \\ &= \int_a^b f'(x) (\eta'(x) - \eta'(y)) dx + \int_a^b f'(x) \eta'(y) dx \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à y entre a et b , on obtient :

$$(b - a) \int_a^b \phi'(x) dx = \int_a^b \int_a^b f'(x) (\eta'(x) - \eta'(y)) dx dy + \int_a^b f'(x) dx \int_a^b \eta'(y) dy$$

Or :

$$\int_a^b \int_a^b f'(x) (\eta'(x) - \eta'(y)) dx dy = \int_a^b \int_a^b f'(y) (\eta'(x) - \eta'(y)) dx dy$$

On déduit alors que :

$$(b - a) \int_a^b \phi'(x) dx = \int_a^b \int_a^b (f'(x) - f'(y)) (\eta'(x) - \eta'(y)) dx dy + \left(\int_a^b f'(x) dx \right) \left(\int_a^b \eta'(y) dy \right)$$

Comme f' et η' sont croissantes, la première intégrale du second membre est nulle et on a bien le résultat attendu. ★

Lemme : .

Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $u_0 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions données, $\sigma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$D_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \text{ tq } x < \sigma t\}$$

$$D_2 = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \text{ tq } x > \sigma t\}$$

Alors, si $u \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ est telle que $u|_{D_i} \in C^1(D_i, \mathbb{R})$ et que le problème hyperbolique non linéaire de départ est vérifié pour tout $(x, y) \in D_i$, où $i = 1, 2$, alors u est solution faible de ce problème.

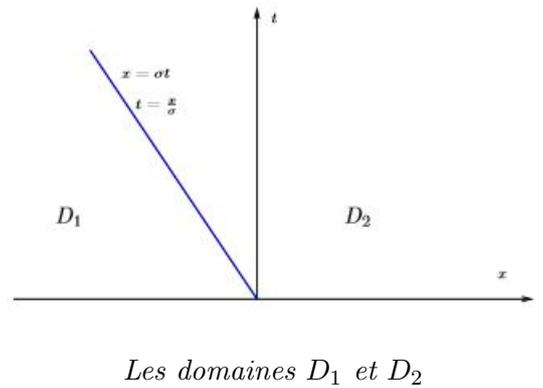
Preuve :

Soit $u \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ tq $u|_{D_i}$ vérifie le problème de départ pour tout $(x, t) \in D_i$.

Montrons que u est solution faible. Pour cela, calculons :

$$X = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dt dx}_{X_1} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} f(u(x, t)) \partial_x \varphi(x, t) dt dx}_{X_2}$$

Calculons X_1 . Comme u est de classe C^1 sur chacun des domaines D_i , on n'a pas le droit d'intégrer par parties sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ entier. On va donc décomposer l'intégrale sur D_1, D_2 .
Supposons par exemple que $\sigma < 0$ (cf figure ci-contre), le cas $\sigma > 0$ se traite de façon similaire.



Les domaines s'écrivent alors :

$$D_1 = \{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+\} \cup \{(x, t) \text{ tq } x \in \mathbb{R}_- \text{ et } \frac{x}{\sigma} < t < +\infty\}$$

$$D_2 = \{(x, t) \text{ tq } x \in \mathbb{R}_- \text{ et } 0 < t < \frac{x}{\sigma}\}$$

On a donc :

$$X_1 = \int_{\mathbb{R}_-} \int_0^{\frac{x}{\sigma}} u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dt dx + \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\frac{x}{\sigma}}^{+\infty} u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dt dx + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dt dx$$

Comme u est de classe C^1 sur chacun des domaines, on peut intégrer par parties, ce qui donne :

$$\begin{aligned} X_1 &= \int_{\mathbb{R}_-} u(x, \frac{x}{\sigma}) \varphi(x, \frac{x}{\sigma}) dx - \int_{\mathbb{R}_-} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}_-} \int_0^{\frac{x}{\sigma}} \partial_t u(x, t) \varphi(x, t) dt dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}_-} u(x, \frac{x}{\sigma}) \varphi(x, \frac{x}{\sigma}) dx - \int_{\mathbb{R}_-} \int_{\frac{x}{\sigma}}^{+\infty} \partial_t u(x, t) \varphi(x, t) dt dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}_+} -u(x, 0) \varphi(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} \partial_t u(x, t) \varphi(x, t) dt dx \end{aligned}$$

En simplifiant, il vient alors que :

$$X_1 = - \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\varphi(x,0)dx - \int \int_{D_1} \partial_t u(x,t)\varphi(x,t)dtdx - \int \int_{D_2} \partial_t u(x,t)\varphi(x,t)dtdx$$

On fait de même pour X_2 sur $D_1 \cup D_2$, en remarquant maintenant que $D_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \text{ tq } x < \sigma t\}$ et $D_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \text{ tq } x > \sigma t\}$ et on obtient :

$$X_2 = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{-\infty}^{\sigma t} f(u(x,t))\partial_x \varphi(x,t)dxdt + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\sigma t}^{+\infty} f(u(x,t))\partial_x \varphi(x,t)dxdt$$

La fonction i étant de classe C^1 sur chacun des domaines, on peut encore une fois intégrer par parties et puisque φ est à support compact sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, on obtient après simplification :

$$X_2 = - \int \int_{D_1} \partial_x f(u(x,t))\varphi(x,t)dxdt - \int \int_{D_2} \partial_x f(u(x,t))\varphi(x,t)dxdt$$

Comme $\partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) = 0$ sur D_1 et D_2 , alors :

$$X = X_1 + X_2 = - \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\varphi(x,0)dx$$

Cela prouve donc que u est solution faible du problème de départ. ★

Proposition : .

Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ strictement convexe et $u_g, u_d \in \mathbb{R}$.

1. Si $u_g > u_d$, on pose $\sigma = \frac{[f(u)]}{[u]}$ tq
$$\begin{cases} [f(u)] &= f(u_d) - f(u_g) \\ [u] &= u_d - u_g \end{cases}$$

Alors la fonction u suivante, appelée **onde de "choc"**, est l'unique solution entropique du problème de Riemann :

$$u(x,t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \sigma t \\ u_d & \text{si } x > \sigma t \end{cases}$$

2. Si $u_g < u_d$, alors la fonction u suivante, appelée **onde de "détente"**, est l'unique solution entropique du problème de Riemann :

$$u(x,t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < f'(u_g)t \\ u_d & \text{si } x > f'(u_d)t \\ \xi & \text{si } x = f'(\xi)t \text{ où } u_g < \xi < u_d \end{cases}$$

Notons que dans ce cas, la solution entropique est continue.

Preuve :

1. Cherchons u sous la forme d'une onde de "choc" évoquée ci-dessus. Commençons par déterminer σ pour que u soit une solution faible. On suppose, pour fixer les idées, que $\sigma > 0$

(mais le même raisonnement est correct pour $\sigma < 0$).

Soit $\varphi \in C_C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et on veut montrer que :

$$X = X_1 + X_2 = - \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx$$

$$tq \quad X_1 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dt dx \quad \text{et} \quad X_2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} f(u(x, t)) \partial_x \varphi(x, t) dt dx$$

Calculons donc X_1 et X_2 :

$$\begin{aligned} X_1 &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{+\infty} u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dt dx + \int_0^{+\infty} \int_0^{\frac{x}{\sigma}} u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dt dx + \int_0^{+\infty} \int_{\frac{x}{\sigma}}^{+\infty} u(x, t) \partial_t \varphi(x, t) dt dx \\ &= - \int_{-\infty}^0 u_g \varphi(x, 0) dx + \int_0^{+\infty} u_d \left(\varphi(x, \frac{x}{\sigma}) - \varphi(x, 0) \right) dx + \int_0^{+\infty} u_g \left(-\varphi(x, \frac{x}{\sigma}) \right) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx + \int_0^{+\infty} (u_d - u_g) \varphi(x, \frac{x}{\sigma}) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{\sigma t} f(u) \partial_x \varphi(x, t) dx dt + \int_0^{+\infty} \left(\int_{\sigma t}^{+\infty} f(u(x, t)) \partial_x \varphi(x, t) \right) dx dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(u_g) \varphi(\sigma t, t) dt - \int_0^{+\infty} f(u_d) \varphi(\sigma t, t) dt \end{aligned}$$

En posant $[u] = u_d - u_g$ et $[f(u)] = f(u_d) - f(u_g)$, on obtient :

$$\begin{aligned} X + \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx &= \int_0^{+\infty} [u] \varphi(x, \frac{x}{\sigma}) dx - \int_0^{+\infty} [f(u)] \varphi(\sigma t, t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} [u] \varphi(\sigma t, t) dt - \int_0^{+\infty} [f(u)] \varphi(\sigma t, t) dt \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

$$X + \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx = 0 \quad \text{si} \quad \sigma [u] - [f(u)] = 0$$

Nous aurons trivialement ce résultat si la condition, précédemment citée, de Rankine et Hugoniot est vérifiée.

Voyons maintenant si u est bien solution entropique. Pour cela, on considère $\eta \in C^1$ une "entropie" et $\phi \in C^1$ le flux d'entropie associé tels que $\phi' = \eta' f'$. Le même calcul que précédemment, en remplaçant u par $\eta(u)$ et $f(u)$ par $\phi(u)$ nous donne que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \eta(u(x, t)) \partial_t \varphi(x, t) dt dx + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \phi(u(x, t)) \partial_x \varphi(x, t) dx dt \\ + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) dx = \int_0^{+\infty} (\sigma [\eta(u)] - [\phi(u)]) \varphi(\sigma t, t) dt \end{aligned}$$

Pour que u soit solution entropique, il faut et il suffit donc que :

$$\sigma [\eta(u)] \geq [\phi(u)]$$

Il reste donc à vérifier que cette inégalité est vérifiée pour le σ choisi précédemment via la condition de Rankine et Hugoniot. C'est à dire que :

$$\frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} (\eta(u_d) - \eta(u_g)) \geq \phi(u_d) - \phi(u_g)$$

Cette inégalité se réécrit encore :

$$(f(u_d) - f(u_g)) (\eta(u_d) - \eta(u_g)) \leq (\phi(u_d) - \phi(u_g)) (u_d - u_g)$$

Cette inégalité est alors triviale via le premier lemme précédent, avec $b = u_g > u_d = a$.

2. On vérifie facilement que la fonction u définie comme onde de détente est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et vérifie $\partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t)) = 0$ dans chacun des domaines D_1, D_2, D_3 définis par :

$$D_1 = \{(x, t) \mid t > 0 \text{ et } x < f'(u_g)t\}$$

$$D_2 = \{(x, t) \mid t > 0 \text{ et } f'(u_g)t < x < f'(u_d)t\}$$

$$D_3 = \{(x, t) \mid t > 0 \text{ et } x > f'(u_d)t\}$$

Par le lemme précédent, on sait que u est solution faible (mais attention, ce n'est pas une solution classique car u n'est pas forcément C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ tout entier).

Soient $\eta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une entropie (convexe) et ϕ le flux d'entropie associé.

Comme $\partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t)) = 0$ dans les trois domaines, en multipliant par $\eta'(u)$, on a également $\partial_t \eta(u(x, t)) + \partial_x \phi(u(x, t)) = 0$ dans les trois domaines.

Soit maintenant $\varphi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et montrons que :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \eta(u(x, t)) \partial_t \varphi(x, t) dt dx + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \phi(u(x, t)) \partial_x \varphi(x, t) dt dx + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx = 0$$

En effet, en intégrant par parties les trois termes précédents sur D_1, D_2, D_3 , comme la fonction est continue, les fonctions sur le bord des domaines s'annulent deux à deux et il ne reste que la condition initiale. On montre ainsi que :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \eta(u(x, t)) \partial_t \varphi(x, t) dt dx + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} \phi(u(x, t)) \partial_x \varphi(x, t) dt dx = - \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(x, 0) dx$$

Cela prouve donc que la solution est entropique. ★

Remarque : .

Des illustrations des situations de choc et de détente apparaissent dans la section 2.3, lorsque nous les rencontrons lors de la résolution de l'équation de Burgers.

On considère maintenant un cas particulier, qui nous permettra de pousser plus loin notre étude, celui de l'équation de Burgers.

2.3 Résolution de l'équation de Burgers

On se donne ici le problème non linéaire de Burgers :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}u^2(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Dans ce problème, u_0 est une fonction donnée de classe $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on cherche une solution de classe C^1 en temps et en espace. Remarquons ici que puisque le problème n'est plus linéaire, il est illusoire d'espérer utiliser la méthode de la transformation de Fourier qui nous donnerait un terme ne pouvant être exprimé en fonction de \hat{u} .

Étant donné un réel ξ , soit la courbe caractéristique C_ξ définie par :

$$(C_\xi) = \{(x(t), t) \text{ tq } x'(t) = u(x(t), t) \text{ et } x(0) = \xi\}$$

Puisque la fonction u régulière est supposée connue, nous allons montrer qu'elle reste donc constante sur (C_ξ) .

En effet, la fonction $f(t) = u(x(t), t)$ définie pour tout $t \geq 0$ est de classe C^1 et on a :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt}u(x(t), t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + x'(t)\frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + \frac{1}{2} \times \underbrace{2x'(t)\frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t)}_{= \frac{\partial}{\partial x}u^2(x(t), t)} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}u(x, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}u^2(x, t) \\ &= 0 \text{ car } u \text{ supposée solution de l'équation de Burgers} \end{aligned}$$

Puisque u reste constante le long des caractéristiques, on a :

$$x'(t) = u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u_0(x(0)) = u_0(\xi)$$

On déduit alors que $x(t)$ est une droite, définie par une équation que l'on peut intégrer par rapport au temps pour donner :

$$x(t) = u_0(\xi)t + \xi \quad \forall t \geq 0$$

Maintenant, nous souhaitons calculer la valeur de la solution en un couple $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Il nous faut donc trouver ξ tq $(x, t) \in C_\xi$. On doit alors avoir :

$$F(x, t, \xi) := u_0(\xi)t + \xi - x = 0$$

Cette équation étant non linéaire, ξ ne peut en général pas être calculé explicitement. Toutefois, nous pouvons faire usage du théorème des fonctions implicites qui affirme que si la

fonction F , de classe C^1 par rapport à x , t et ξ , est telle que $\frac{\partial}{\partial \xi} F(x, t, \xi) \neq 0$, alors il existe une unique fonction $\xi = \xi(x, t)$ de classe C^1 qui vérifie $F(x, t, \xi) = 0$, pour tout (x, t) .

Dans notre cas de figure, on a :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} F(x, t, \xi) = u_0'(\xi)t + 1$$

Ceci nous permet de donner des conditions suffisantes qui assurent existence et unicité de ξ :

- Si u_0 est une fonction de classe C^1 croissante sur \mathbb{R} , alors la condition est trivialement vérifiée car $\frac{\partial}{\partial \xi} F(x, t, \xi) \geq 1$, si $t \geq 0$.

La solution unique du problème de Burgers est alors donnée par :

$$u(x, t) = u_0(\xi(x, t)) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

- Si u_0 est une fonction de classe C^1 non croissante, alors l'existence de ξ n'est plus garantie dès que t est tel que : $u_0'(\xi_0)t + 1 = 0$, pour un certain ξ_0 .

Cela suggère l'existence d'un temps maximal T^* pour lequel la méthode des caractéristiques est valable sur $\mathbb{R} \times [0, T^*]$. En particulier, si t est plus petit que la valeur minimale de $\frac{-1}{u_0'(y)}$, où $y \in \mathbb{R}$, alors l'équation précédente n'admet pas de solution ξ_0 et on trouvera un unique $\xi = \xi(x, t)$. Cela implique alors que la méthode des caractéristiques n'est valable que lorsque $t < T^*$, où :

$$T^* = \inf_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{-1}{u_0'(y)} \right\} = -\frac{1}{\inf_{y \in \mathbb{R}} u_0'(y)} > 0$$

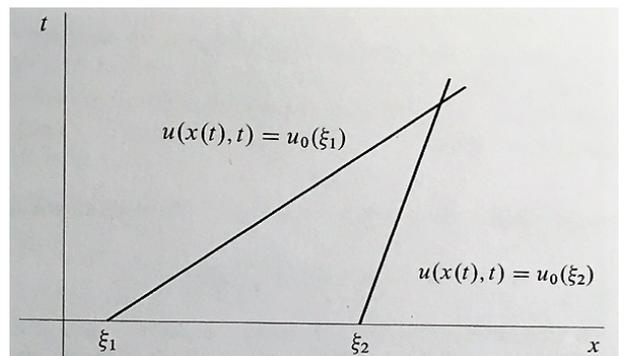
On peut résumer tout cela sous une même proposition, que nous énonçons ci-après.

Proposition : .

Soit $T^* = \infty$ si u_0 est croissante et $-\frac{1}{\inf_{y \in \mathbb{R}} u_0'(y)}$ sinon. Alors, le problème de Cauchy défini par l'équation de Burgers admet une unique solution u donnée par :

$$u(x, t) = u_0(\xi(x, t)) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T^*[$$

Au temps $t = T^*$, les courbes caractéristiques peuvent se couper et il devient impossible en ces points d'intersection de calculer la valeur de la solution (cf figure ci-contre). La méthode des caractéristique tombe alors en défaut car la solution tend à devenir discontinue et il n'y a plus équivalence entre la forme conservative et non conservative de l'équation de Burgers.



Cela justifie alors la nécessité d'affaiblir la notion de solution afin de pouvoir tolérer la présence de discontinuité, c'est le concept de solution faible dont le problème d'unicité est corrigé par le concept d'entropie, le tout ayant été présenté un peu plus tôt dans cet article.

Nous allons maintenant donner 3 exemples et un contre-exemple de résolution explicite pour l'équation de Burgers, avec des choix différents de données de Cauchy. Ce sont les mêmes exemples que nous reprendrons, dans la section suivante, pour la résolution par schémas numériques.

Exemple : .

On considère le problème hyperbolique non linéaire relatif à l'équation de Burgers avec pour condition initiale :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x^2 & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ -2x^2 + 4x - 1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Puisque u_0 est croissante, alors la solution du problème de Burgers s'écrit :

$$u(x, t) = u_0(\xi(x, t)) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

- Si $\xi \leq 0$:

Alors $\xi - x = 0 \Rightarrow \xi = x$. On a alors :

$$u(x, t) = 0 \text{ si } x \leq 0$$

- Si $\xi > 1$:

Alors $t + \xi - x = 0 \Rightarrow \xi = x - t$. On a alors :

$$u(x, t) = 1 \text{ si } x - t > 1$$

- Si $0 < \xi \leq \frac{1}{2}$:

Alors $2\xi^2 t + \xi - x = 0 \Rightarrow \xi = \frac{1}{4t} (-1 \pm \sqrt{1 + 8tx})$.

Or : $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$, donc $\xi = \frac{1}{4t} (-1 + \sqrt{1 + 8tx})$.

On a alors :

$$u(x, t) = \frac{1}{4t^2} (1 + 4tx - \sqrt{1 + 8tx})$$

- Si $\frac{1}{2} < \xi \leq 1$:

Alors $-2t\xi^2 + (4t + 1)\xi - (x - t) = 0 \Rightarrow \xi = 1 + \frac{1}{4t} (1 \pm \sqrt{1 + 8t(t + 1 - x)})$.

Or : $\xi \in [\frac{1}{2}, 1]$, donc $\xi = 1 + \frac{1}{4t} (1 - \sqrt{1 + 8t(t + 1 - x)})$.

On a alors :

$$u(x, t) = -2 \left[1 + \frac{1}{4t} (1 - \sqrt{1 + 8t(t + 1 - x)}) \right]^2 + 4 \left[1 + \frac{1}{4t} (1 - \sqrt{1 + 8t(t + 1 - x)}) \right] - 1$$

Le recollement avec la formule précédente se fait alors lorsque :

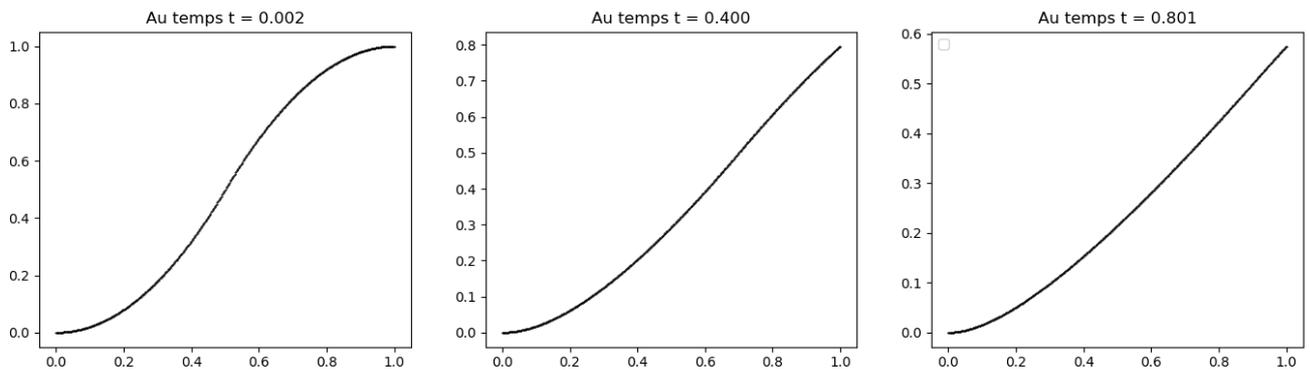
$$\sqrt{1 + 8tx} = \sqrt{1 + 8t(t + 1 - x)} \Rightarrow x = \frac{t + 1}{2}$$

On peut donc obtenir la forme finale de la solution :

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{4t^2} (1 + 4tx - \sqrt{1 + 8tx}) & \text{si } 0 < x \leq \frac{t+1}{2} \\ -2 \left[1 + \frac{1}{4t} (1 \pm \sqrt{1 + 8t(t + 1 - x)}) \right]^2 + 4 \left[1 + \frac{1}{4t} (1 - \sqrt{1 + 8t(t + 1 - x)}) \right] - 1 & \text{si } x > \frac{t+1}{2} \\ 1 & \text{si } x - t > 1 \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi une onde de "détente" que nous avons évoquée précédemment, que nous représentons ci-dessous :

Solution entropique de l'équation de Burgers à différents temps



Exemple :

On considère le problème hyperbolique non linéaire relatif à l'équation de Burgers avec pour condition initiale :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - 2x^2 & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ x^2 - 4x + 2 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Puisque u_0 est décroissante, on doit alors calculer le temps d'arrêt. Posons :

$$T^* = -\frac{1}{\inf_{y \in \mathbb{R}} u_0'(y)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

La solution du problème de Burgers s'écrit alors :

$$u(x, t) = u_0(\xi(x, t)) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \frac{1}{2}[$$

- Si $\xi \leq 0$:

Alors $\xi - x + t = 0 \Rightarrow \xi = x - t$. On a alors :

$$u(x, t) = 1 \text{ si } x - t \leq 0$$

- Si $\xi > 1$:

Alors $\xi - x = 0 \Rightarrow \xi = x$. On a alors :

$$u(x, t) = 0 \text{ si } x \geq 1$$

- Si $0 < \xi \leq \frac{1}{2}$:

Alors $-2t\xi^2 + \xi + (t - x) = 0 \Rightarrow \xi = \frac{1}{4t} (1 \pm \sqrt{1 - 8t(x - t)})$.

Or : $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$, donc $\xi = \frac{1}{4t} (1 - \sqrt{1 - 8t(x - t)})$.

On a alors :

$$u(x, t) = 1 - \frac{1}{8t^2} \left(1 - \sqrt{1 - 8t(x - t)}\right)^2 \quad \text{si } x - t > 0 \text{ et } x - \frac{1}{2}t < \frac{1}{2}$$

- Si $\frac{1}{2} < \xi \leq 1$:

Alors $2t\xi^2 + (1 - 4t)\xi + (2t - x) = 0 \Rightarrow \xi = 1 - \frac{1}{4t} (1 \pm \sqrt{1 - 8t(1 - x)})$.

Or : $\xi \in]\frac{1}{2}, 1]$, donc $\xi = 1 - \frac{1}{4t} (1 - \sqrt{1 - 8t(1 - x)})$.

On a alors :

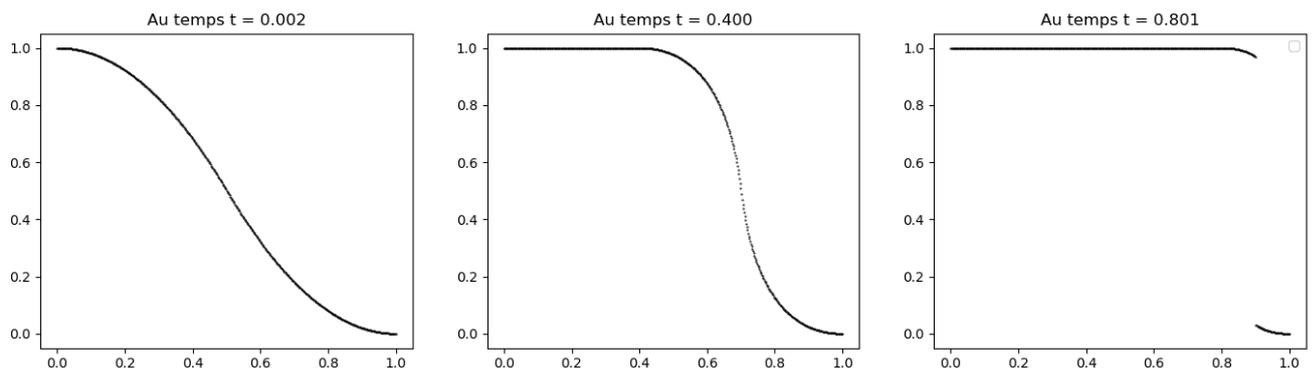
$$u(x, t) = -2 + \frac{1}{t} \left(1 - \sqrt{1 - 8t(x - t)}\right) + \frac{1}{8t^2} \left(4t - 1 + \sqrt{1 - 8t(x - t)}\right)^2 \quad \text{si } x < 1 \text{ et } x - \frac{1}{2}t \geq \frac{1}{2}$$

On peut donc obtenir la forme finale de la solution :

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x - t \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{8t^2} \left(1 - \sqrt{1 - 8t(x - t)}\right)^2 & \text{si } x - t > 0 \text{ et } x - \frac{1}{2}t < \frac{1}{2} \\ -2 + \frac{1}{t} \left(1 - \sqrt{1 - 8t(x - t)}\right) + \frac{1}{8t^2} \left(4t - 1 + \sqrt{1 - 8t(x - t)}\right)^2 & \text{si } x < 1 \text{ et } x - \frac{1}{2}t \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi une onde de "choc" que nous avons évoquée précédemment, que nous représentons ci-dessous :

Solution entropique de l'équation de Burgers à différents temps



Exemple : .

On considère le problème hyperbolique non linéaire relatif à l'équation de Burgers avec pour condition initiale la fonction de Heaviside :

$$u_0(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)x^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Puisque u_0 est croissante, alors la solution du problème de Burgers s'écrit :

$$u(x, t) = u_0(\xi(x, t)) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

Nous regardons alors uniquement le cas où $\xi > 0$, car la solution vaudra 0 dans l'autre cas.

On a : $-x + \xi^2 t + \xi = 0 \Rightarrow \xi = \frac{1}{2t} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4tx}} \right)$.

Or : $\xi \in \mathbb{R}_+$, donc $\xi = \frac{1}{2t} \left(-1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4tx}} \right)$.

On a alors :

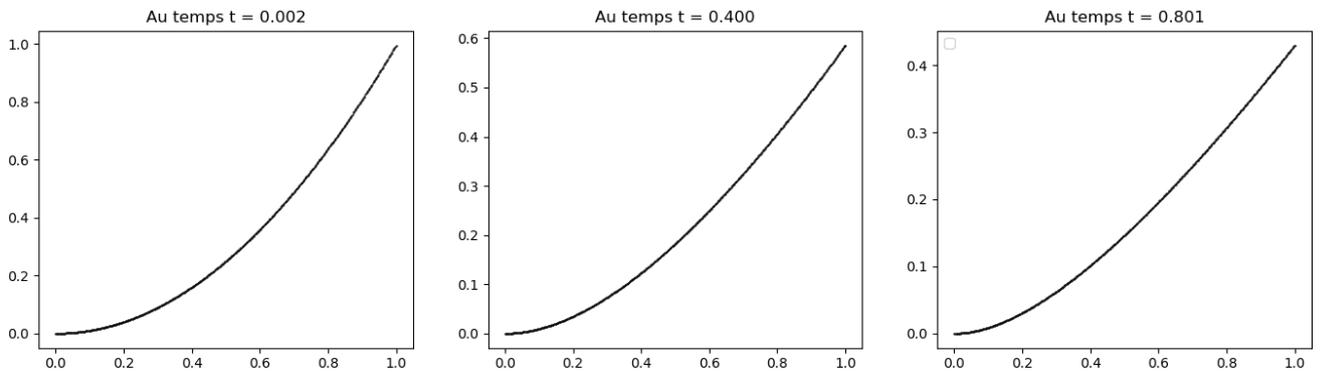
$$u(x, t) = \frac{1 + 2tx - \sqrt{1 + 4tx}}{2t^2} \quad \text{si } x > 0$$

On peut donc obtenir la forme finale de la solution :

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1 + 2tx - \sqrt{1 + 4tx}}{2t^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi une solution que nous représentons ci-dessous :

Solution entropique de l'équation de Burgers à différents temps



Exemple : .

On considère le problème hyperbolique non linéaire relatif à l'équation de Burgers avec pour condition initiale :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Puisque u_0 est décroissante, on doit alors calculer le temps d'arrêt. Posons :

$$T^* = -\frac{1}{\inf_{y \in \mathbb{R}} u_0'(y)} = 0$$

La solution du problème de Burgers n'est alors pas définie.

3 Schémas de volumes finis pour le problème non linéaire

3.1 Présentation générale de la méthode

Nous partons d'un problème de transport non linéaire de la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t)) = 0 & \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La méthode de volumes finis a pour objectif de garder au niveau discret les principales propriétés théoriques de l'équation, en particulier :

- $u_0 \geq 0 \Rightarrow u(t, x) \geq 0$;
- $\int_{\mathbb{R}} u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx, \quad \forall t > 0.$

Notation : .

Introduisons quelques notations qui nous seront utiles par la suite :

- $(x_{i+\frac{1}{2}})_{i \in \mathbb{Z}}$ les nœuds du maillage avec $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$.
- $h = \max_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x_i.$
- Δt le pas de temps et $t^n = n\Delta t.$
- $u_i^n = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(t^n, x) dx$ la moyenne de la solution sur une maille.
- v_i^n la valeur approchée par une méthode numérique.

Le principe général de la méthode consiste à écrire que la solution exacte vérifie une forme conservative discrète. On intègre alors l'équation de départ sur $[t^n, t^{n+1}] \times [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ et on obtient :

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left(\underbrace{\int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dt}_{u(x, t^{n+1}) - u(x, t^n)} \right) dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\underbrace{\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, t)) dx}_{f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t))} \right) dt = 0$$

On conclut alors que :

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} - u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n) &= 0 \\ f_{i+\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n + s)) ds \end{aligned}$$

Cette équation exacte s'approche par un schéma explicite à 3 points de la forme :

$$\begin{cases} v_i^{n+1} - v_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n) = 0 \\ f_{i+\frac{1}{2}}^n = \mathbb{F}(v_{i+1}^n, v_i^n) \end{cases}$$

La fonction \mathbb{F} est alors appelée le **flux numérique** et on pose le nombre de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) comme étant :

$$\max_{i \in \mathbb{Z}} a(v_i^n) \times \max_{i \in \mathbb{Z}} \frac{\Delta t}{\Delta x_i}$$

L'objectif maintenant consiste à trouver les flux numériques particuliers et stables capables de sélectionner la solution entropique de manière efficace.

3.2 Différents schémas à implémenter

La mise en œuvre des méthodes se décompose en deux étapes : le calcul des flux $F_{i \pm \frac{1}{2}}$ et la mise à jour de l'inconnue numérique qui prend simplement la forme $u - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_p - F_m) \mapsto u$, où u est un vecteur contenant les J coordonnées alors que F_p et F_m ont pour coordonnées les flux. La deuxième étape est donc générique, seule l'évaluation des flux est spécifique à la méthode. Nous allons donc regarder, pour l'équation de Burgers notamment, les comportements de plusieurs schémas :

Nom de la méthode	Flux numérique \mathbb{F} associé
Lax-Friedrichs	$\mathbb{F}(u, v) = \frac{1}{2} \left(f(u) + f(v) - \underbrace{\max_v f'(v) }_{=a_\infty} (v - u) \right)$
Rusanov (LF local)	$\mathbb{F}(u, v) = \frac{f(u)+f(v)}{2} - \max(f'(u) , f'(v)) (u - v)$
Enquist-Osher	$\mathbb{F}(u, v) = f(v)^+ - f(u)^-$
Murman-Roe	$\mathbb{F}(u, v) = \begin{cases} f(v) & \text{si } \frac{f(u)-f(v)}{u-v} \geq 0 \\ f(u) & \text{si } \frac{f(u)-f(v)}{u-v} < 0 \end{cases}$
Upwind conservatif	$\mathbb{F}(u, v) = \begin{cases} f(v) & \text{si } f' \left(\frac{u+v}{2} \right) \geq 0 \\ f(u) & \text{si } f' \left(\frac{u+v}{2} \right) < 0 \end{cases}$

Remarque :

Il existe une forme non conservative du schéma Upwind mais il produit une solution dont la vitesse de propagation de la singularité est fautive, déjà avec Burgers, c'est pourquoi nous avons fait le choix de ne pas le considérer dans cette étude.



Selon les différents travaux, nous avons remarqué que certains considèrent les flux où la première variable u se réfère à u_{i+1}^n et v à u_i^n et d'autres inversent, ce qui portera à confusion dans la section 3.3 pour l'étude théorique. Nous avons fait le choix dans cette étude de mettre u_{i+1}^n en première variable.

Remarque :

Dans le cadre de l'équation de Burgers, nous pouvons remarquer que les schémas d'Enquist-Osher, de Murman-Roe ainsi que le schéma Upwind conservatif sont identiques.

Preuve :

Il suffit de remarquer que les flux sont les mêmes.

En effet, dans le cadre de l'équation de Burgers, la fonction s'écrit $f(u) = u^2$ et $f'(u) = 2u$.

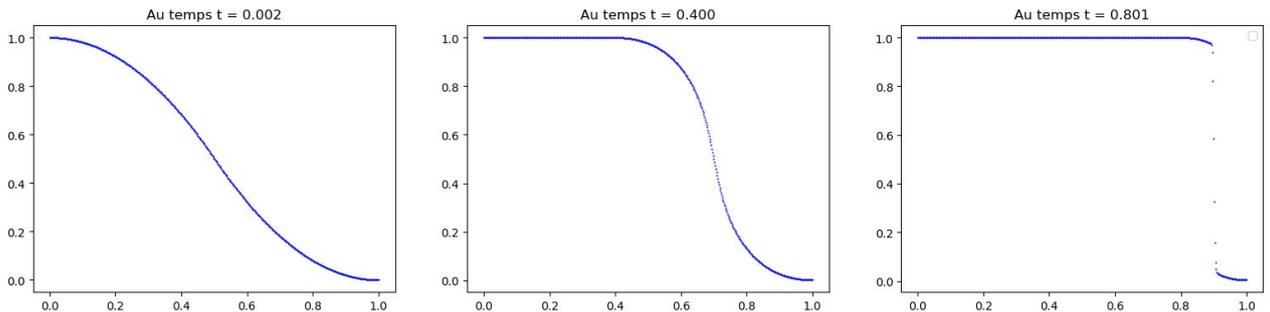
Les flux numériques s'écrivent alors :

- Enquist-Osher : $\mathbb{F}(u, v) = f(v)^+ - f(u)^- = v^2$.
- Murman-Roe : $\mathbb{F}(u, v) = \begin{cases} f(v) & \text{si } \frac{f(u)-f(v)}{u-v} \geq 0 \\ f(u) & \text{si } \frac{f(u)-f(v)}{u-v} < 0 \end{cases} = f(v) = v^2$
(Car $\frac{f(u)-f(v)}{u-v} = u + v \geq 0$ comme $u, v \in [0, 1]$)
- Upwind conservatif : $\mathbb{F}(u, v) = \begin{cases} f(v) & \text{si } f'(\frac{u+v}{2}) \geq 0 \\ f(u) & \text{si } f'(\frac{u+v}{2}) < 0 \end{cases} = f(v) = v^2$
(Car $f'(\frac{u+v}{2}) = u + v \geq 0$ comme $u, v \in [0, 1]$)

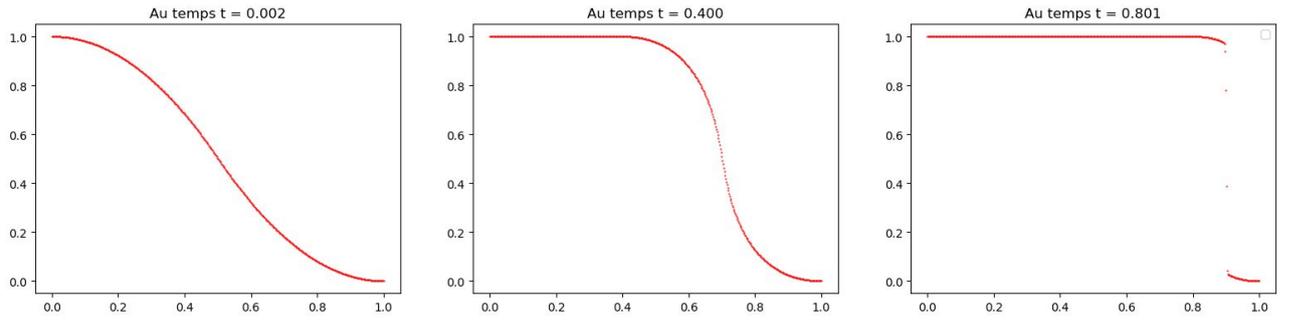
D'où l'égalité de ces trois schémas. ★

Connaissant la solution entropique théorique dans le cadre des trois exemples que nous avons précédemment cité, nous pouvons afficher ci-dessus les résultats obtenus à différents temps pour les différents schémas. Nous n'afficherons que l'exemple du choc qui est plus explicite et plus visuel que les autres.

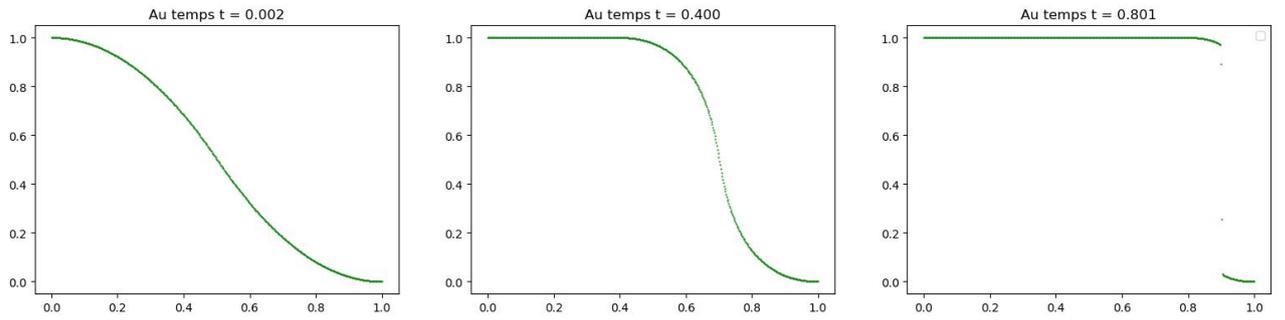
Solution entropique de l'équation de Burgers approchée par le schéma de Lax-Friedrichs



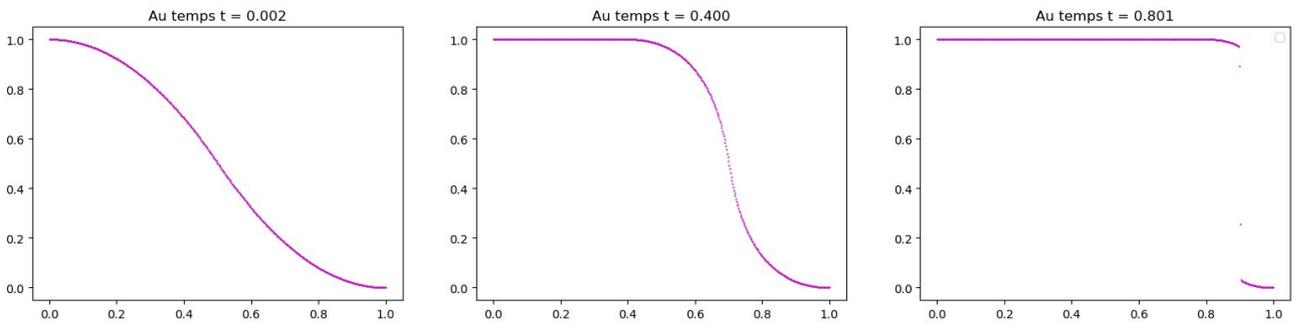
Solution entropique de l'équation de Burgers approchée par le schéma de Lax-Friedrichs modifié



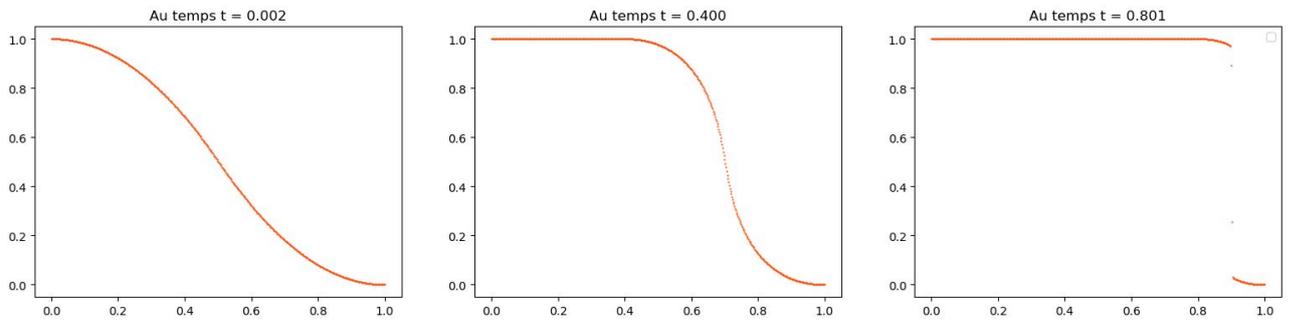
Solution entropique de l'équation de Burgers approchée par le schéma de Enquist-Osher



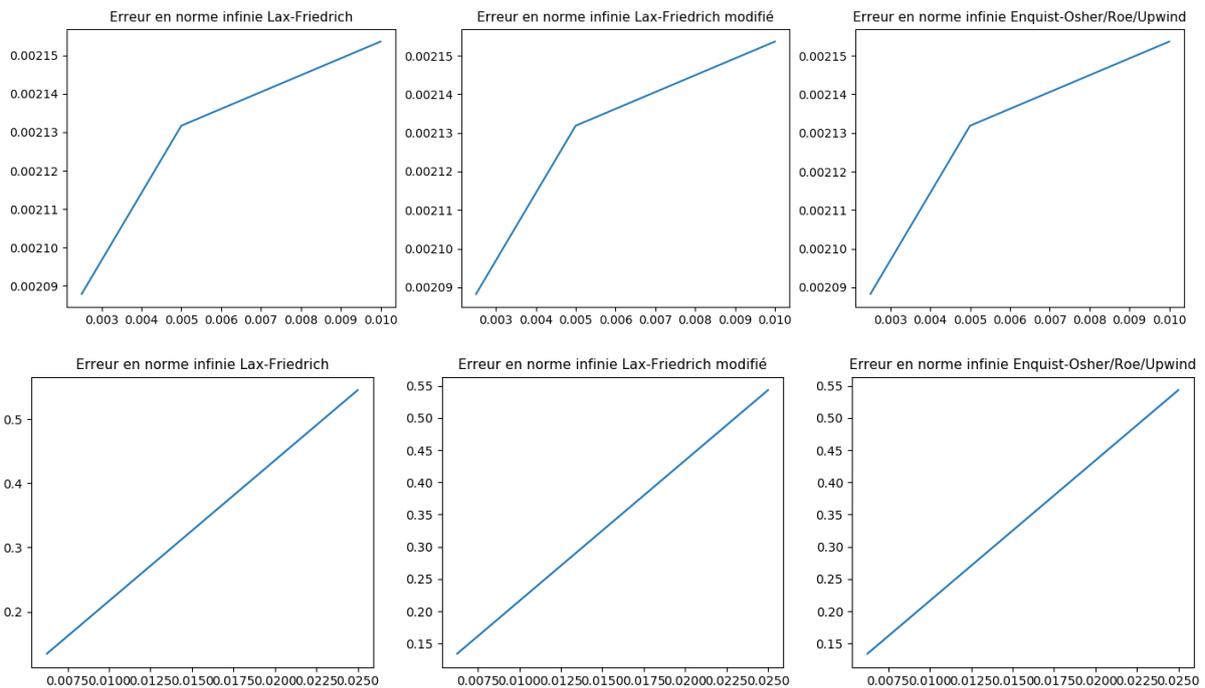
Solution entropique de l'équation de Burgers approchée par le schéma de Roe



Solution entropique de l'équation de Burgers approchée par le schéma Upwind



Nous pouvons également afficher les erreurs en temps et en espace des différentes méthodes. Les trois schémas égaux précédemment cités sont affichés sur le même graphique afin de ne pas surcharger inutilement l’affichage.



Nous remarquons alors que lorsque le pas de temps ou le pas d’espace (selon l’étude) diminue en abscisse, l’erreur entre la solution entropique théorique et la solution approchée par le schéma diminue dans tous les cas. Bien que la différence soit infime sur le graphique, nous remarquons en affichant les erreurs brutes que le schéma de Lax-Friedrichs est le plus faible des schémas car il présente l’erreur la plus importante. Le schéma de Rusanov, qui est simplement un schéma de Lax-Friedrichs où la viscosité numérique est définie localement, corrige un peu ce problème et présente une erreur moins importante. Il est enfin clair que les trois schémas égaux sont les plus performants.

3.3 Étude théorique des schémas

Définition :

On dit que la méthode volumes finis est **consistante** si le flux $\mathbb{F}(u, u) = f(u)$.

Théorème :

Les cinq schémas précédents sont consistants.

Preuve :

Il suffit juste de vérifier que $\mathbb{F}(u, u) = f(u)$, ce qui est trivial. ★

Définition :

On dit que le flux est **monotone** si :

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathbb{F}(u, v) \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial v} \mathbb{F}(u, v) \leq 0$$

On dit que le flux est **L^∞ -stable** si :

$$\exists M \text{ tq } \forall n, j \quad |u_j^n| \leq M$$

On dit que le flux est un **E-flux** (ou flux discret entropique) si :

$$\begin{cases} \mathbb{F}(u, v) \leq f(\xi) & \text{pour } v \leq \xi \leq u \\ \mathbb{F}(u, v) \geq f(\xi) & \text{pour } u \leq \xi \leq v \end{cases}$$

On dit que le flux est **ordonné** si :

$$\begin{cases} \mathbb{F}(u, v) \leq \min(f(u), f(v)) & \text{pour } v \leq u \\ \mathbb{F}(u, v) \geq \max(f(u), f(v)) & \text{pour } u \leq v \end{cases}$$

On dit que le flux est **Variation Totale Décroissante** (TVD) si :

$$\sum_j |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| \leq \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n|$$

Lemme : . (de Le Roux-Harten)

Considérons un schéma de la forme :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + C_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) - D_{j-\frac{1}{2}}^n (u_j^n - u_{j-1}^n)$$

Si $C_{j+\frac{1}{2}}^n \geq 0$, $D_{j-\frac{1}{2}}^n \geq 0$ et $C_{j+\frac{1}{2}}^n + D_{j-\frac{1}{2}}^n \leq 1$, alors le schéma est L^∞ -stable.

Si de plus $C_{j+\frac{1}{2}}^n + D_{j-\frac{1}{2}}^n \geq 0$, alors le schéma est TVD.

Preuve :

On reconnaît une combinaison convexe en écrivant :

$$u_j^{n+1} = \left(1 - C_{j+\frac{1}{2}}^n - D_{j-\frac{1}{2}}^n\right) u_j^n + C_{j+\frac{1}{2}}^n u_{j+1}^n + D_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-1}^n$$

Ceci garantit la préservation des bornes L^∞ . Ensuite, on doit évaluer :

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} &= u_{j+1}^n + C_{j+\frac{3}{2}}^n (u_{j+2}^n - u_{j+1}^n) - D_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) - u_j^n - C_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) + D_{j-\frac{1}{2}}^n (u_j^n - u_{j-1}^n) \\ &= (u_{j+1}^n - u_j^n) \left(1 - C_{j+\frac{1}{2}}^n - D_{j+\frac{1}{2}}^n\right) + C_{j+\frac{3}{2}}^n (u_{j+2}^n - u_{j+1}^n) + D_{j-\frac{1}{2}}^n (u_j^n - u_{j-1}^n) \end{aligned}$$

Tous les coefficients à droite de la dernière égalité sont positifs par hypothèse, on obtient donc après sommation par parties :

$$\begin{aligned} \sum_j |u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}| &\leq \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n| \left(1 - C_{j+\frac{1}{2}}^n - D_{j+\frac{1}{2}}^n + C_{j+\frac{1}{2}}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n\right) \\ &= \sum_j |u_{j+1}^n - u_j^n| \end{aligned}$$

D'où le résultat attendu. ★

Proposition : .

$$\text{Monotone} \implies E\text{-flux} \implies \text{Ordonné}$$

Preuve :

Commençons par montrer que $\text{Monotone} \implies E\text{-flux}$ en considérant le cas $v \leq \xi \leq u$.

On écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(u, v) &\leq \mathbb{F}(u, \xi) \quad \text{car } v \leq \xi \\ \mathbb{F}(u, \xi) &\leq \underbrace{\mathbb{F}(\xi, \xi)}_{=f(\xi)} \quad \text{car } \xi \leq v \end{aligned}$$

L'autre cas $u \leq \xi \leq v$ est similaire.

Pour montrer que $E\text{-flux} \implies \text{Ordonné}$, il suffit de choisir $\xi = u$ ou $\xi = v$ suivant le cas, dans la définition du $E\text{-flux}$. ★

Définition : .

Une méthode de volume fini semi-discrète est définie par :

$$\begin{cases} \Delta x_i \frac{d}{dt} v_i(t) + A_{i+\frac{1}{2}}(t) - A_{i-\frac{1}{2}}(t) = 0 \\ A_{i+\frac{1}{2}}(t) = \mathbb{F}(v_{i+1}(t), v_i(t)) \end{cases}$$

Remarque : .

Il est possible de montrer, dans ce cadre plus général de volumes finis semi-discrets, que :

$$\text{Ordonné} \iff \text{TVD}$$

Vérifions ces différentes propriétés pour le schéma de Lax-Friedrichs.

Proposition : .

Le schéma de Lax-Friedrichs est consistant, monotone, L^∞ -stable sous contrainte $CFL \leq \frac{1}{2}$ et TVD sous contrainte de CFL.

Preuve :

Rappelons que le flux numérique du schéma de Lax-Friedrichs s'écrit :

$$\mathbb{F}(u, v) = \frac{1}{2} (f(u) + f(v) - a_\infty (v - u)) \quad \text{tq } a_\infty = \max_\xi |f'(\xi)|$$

Le schéma, lorsqu'il n'est pas sous forme conservative, s'écrit alors :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(u_{i+1}^n) - f(u_{i-1}^n) - a_\infty (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n))$$

La consistance est trivialement vérifiée puisque $\mathbb{F}(u, u) = \frac{1}{2} (2f(u)) = f(u)$.

La monotonie se démontre en écrivant les dérivées partielles comme suit :

- $\partial_u \mathbb{F}(u, v) = \frac{1}{2} (f'(u) + a_\infty) \geq 0$ par définition de a_∞ .
- $\partial_v \mathbb{F}(u, v) = \frac{1}{2} (f'(v) - a_\infty) \leq 0$ par définition de a_∞ .

La stabilité L^∞ et le caractère TVD se montrent en appliquant le Lemme de Le Roux-Harten.

Pour se faire, on écrit le schéma sous forme non conservative, on obtient :

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n) + f(u_j^n) - f(u_{j-1}^n)) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} a_\infty (u_{j+1}^n - u_j^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a_\infty (u_j^n - u_{j-1}^n) \\
&= u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left((u_{j+1}^n - u_j^n) \underbrace{\int_0^1 f'(u_j^n + \tau(u_{j+1}^n - u_j^n)) d\tau}_{=a_{j+\frac{1}{2}}^n} + (u_j^n - u_{j-1}^n) \underbrace{\int_0^1 f'(u_{j-1}^n + \tau(u_j^n - u_{j-1}^n)) d\tau}_{=a_{j-\frac{1}{2}}^n} \right) \\
&\quad + \frac{\Delta t}{2\Delta x} a_\infty (u_{j+1}^n - u_j^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a_\infty (u_j^n - u_{j-1}^n) \\
&= u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (a_{j+\frac{1}{2}}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) + a_{j-\frac{1}{2}}^n (u_j^n - u_{j-1}^n)) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} a_\infty (u_{j+1}^n - u_j^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a_\infty (u_j^n - u_{j-1}^n) \\
&= u_j^n + \underbrace{\frac{\Delta t}{2\Delta x} (a_\infty - a_{j+\frac{1}{2}}^n)}_{=C_{j+\frac{1}{2}}^n} (u_{j+1}^n - u_j^n) - \underbrace{\frac{\Delta t}{2\Delta x} (a_\infty + a_{j-\frac{1}{2}}^n)}_{=D_{j-\frac{1}{2}}^n} (u_j^n - u_{j-1}^n)
\end{aligned}$$

On identifie les coefficients comme étant :

$$\begin{cases}
C_{j+\frac{1}{2}}^n &= \frac{\Delta t}{2\Delta x} (a_\infty - a_{j+\frac{1}{2}}^n) \\
D_{j+\frac{1}{2}}^n &= \frac{\Delta t}{2\Delta x} (a_\infty + a_{j+\frac{1}{2}}^n) \\
D_{j-\frac{1}{2}}^n &= \frac{\Delta t}{2\Delta x} (a_\infty + a_{j-\frac{1}{2}}^n)
\end{cases}$$

Clairement $C_{j+\frac{1}{2}}^n$ et $D_{j+\frac{1}{2}}^n$ sont positifs ou nul par définition de a_∞ . De plus :

$$\begin{aligned}
C_{j+\frac{1}{2}}^n + D_{j-\frac{1}{2}}^n &= \frac{\Delta t}{2\Delta x} (2a_\infty - a_{j+\frac{1}{2}}^n + a_{j-\frac{1}{2}}^n) \\
&= \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(2a_\infty + \underbrace{\left(-a_{j+\frac{1}{2}}^n + a_{j-\frac{1}{2}}^n \right)}_{\leq 2a_\infty} \right) \\
&\leq 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} a_\infty
\end{aligned}$$

La stabilité L^∞ est donc établie sous contrainte que $CFL \leq \frac{1}{2}$. Enfin, on écrit :

$$\begin{aligned}
C_{j+\frac{1}{2}}^n + D_{j+\frac{1}{2}}^n &= \frac{\Delta t}{2\Delta x} (2a_\infty - a_{j+\frac{1}{2}}^n + a_{j+\frac{1}{2}}^n) \\
&\leq \frac{\Delta t}{\Delta x} a_\infty
\end{aligned}$$

Et on obtient ainsi le caractère TVD sous contrainte que $CFL \leq 1$.

Ce qui prouve la proposition. ★

Remarque : .

La condition CFL énoncé pour la stabilité L^∞ du schéma de Lax-Friedrichs est suffisante mais pas nécessaire. Il est en effet possible de montrer que le schéma de Lax-Friedrichs est L^∞ -stable sous contrainte que $CFL \leq 1$.

Remarque : .

Parmi les autres schémas proposés, il est possible d'établir que les schémas de Lax-Friedrichs et d'Enquist-Osher sont monotones et à fortiori ordonnés par une proposition précédente.

Le schéma de Murman-Roe lui n'est pas ordonné et n'est donc pas monotone par contraposée.

Cette absence de monotonie va nous poser des problèmes pratiques avec ce schéma lors de l'étude du trafic routier dans la section 4.

4 Retour au trafic routier

4.1 Position du problème

Rappelons rapidement que nous étudions le problème suivant, obtenus dans la section 1.1 :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \chi(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(\chi(x, t)) = 0 & \forall (x, t) \in]0, L[\times]0, T[\\ \chi(x, 0) = \chi_0(x) & \forall x \in]0, L[\\ \chi(0, t) = \chi_{\text{entrée}}(t) & \forall t \in]0, T[\end{cases}$$

Nous avons à notre disposition plusieurs conditions initiales, et nous faisons le choix de vous en présenter deux :

$$u_0^{(1)}(x) = \begin{cases} 10 & \text{si } 0 \leq x < 30 \\ 30 & \text{si } 30 \leq x < 60 \\ 50 & \text{si } 60 \leq x \leq 100 \end{cases} \quad u_0^{(2)}(x) = \begin{cases} 50 & \text{si } 0 \leq x < 30 \\ 30 & \text{si } 30 \leq x < 60 \\ 10 & \text{si } 60 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

Pour les conditions d'entrées, nous avons implémenter diverses situations comme le flux d'entrée constant, décroissante et gaussien, que nous visualiserons plus en détails par la suite.

Nous verrons via nos simulations numériques que nous pouvons rencontrer deux situations, qui seront explicitées dans les sections 4.2 et 4.3 : les ondes de chocs et les onde de détente, comme c'était le cas pour l'équation de Burgers.

Une façon d'étudier le trafic, et particulièrement d'étudier les embouteillages, est d'étudier les chocs. En effet, un bouchon est par exemple modélisé par le passage d'une densité χ_1 faible et à une densité χ_2 élevée. A la limite, on s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle vérifiant $\chi = \chi_1$ avant une certaine abscisse et $\chi = \chi_2$ après. C'est ce que nous avons appelé précédemment le problème de Riemann.

L'abscisse x_c pour laquelle s'effectue cette rupture est, en fonction du temps, une "onde de choc". Cette courbe se paramétrise de la façon suivante :

$$\Omega = \{(x_c(t), t) \mid t \in [0, T]\}$$

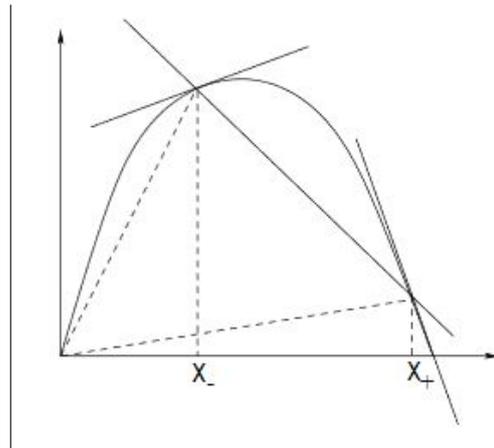
La loi de conservation du nombre de véhicules impose alors une condition de saut sur les limites à gauche et à droite de Ω de la forme :

$$\frac{f(\chi_+) - f(\chi_-)}{\chi_+ - \chi_-} = x_c'(t)$$

On comprend bien ici la dénomination d'onde de choc : à sa traversée, les conditions du trafic sont brutalement modifiées. L'onde de choc se propage à la vitesse $x_c'(t)$, vitesse que l'on

vient de relier à la quantification de la discontinuité de χ .

L'onde de choc, c'est à dire le bouchon, se propage à une vitesse égale à la pente reliant les points du diagramme fondamental ci-contre attachés aux valeurs limites à gauche et à droite. Ainsi, le diagramme permet de comprendre la vitesse à laquelle se propage le bouchon.



Prenons un exemple simple pour se fixer les idées. Si un trafic fluide, avec $\chi = 40$ rencontre à une certaine abscisse un bouchon, avec $\chi = 100$ par exemple, il y a un phénomène de recul du bouchon. On lit trois choses sur le diagramme :

- La vitesse de propagation des courbes caractéristiques :

$$f'(40) = 30 \text{ km/h} \quad \text{et} \quad f'(100) = -90 \text{ km/h}$$

- La vitesse de propagation de l'onde de choc :

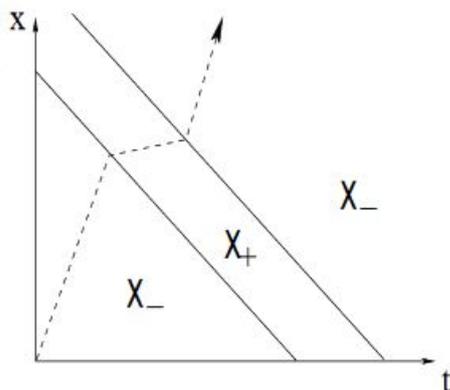
$$\frac{f(100) - f(40)}{100 - 40} = -30 \text{ km/h}$$

- La vitesse de déplacement d'un véhicule soumis à une densité de trafic $\chi = 40$ ou 100 :

$$\frac{f(40)}{40} = 70 \text{ km/h} \quad \text{et} \quad \frac{f(100)}{100} = 10 \text{ km/h}$$

Remarque : .

Obtenir une vitesse négative n'est en rien aberrant car cela signifie juste que la vitesse de propagation est en sens contraire.



On peut alors en déduire les courbes caractéristiques liées à cette situation, ainsi que le déplacement d'un véhicule, son temps de parcours, etc.

Nous allons maintenant observer numériquement et interpréter les deux phénomènes liés à la résolution de ce problème, assortis de différentes conditions initiales et d'entrée que nous expliciterons. Précisons que nous avons fait le choix, d'afficher la vitesse du trafic plutôt que la densité, car cela nous paraît plus explicite pour la compréhension et l'interprétation de nos résultats.

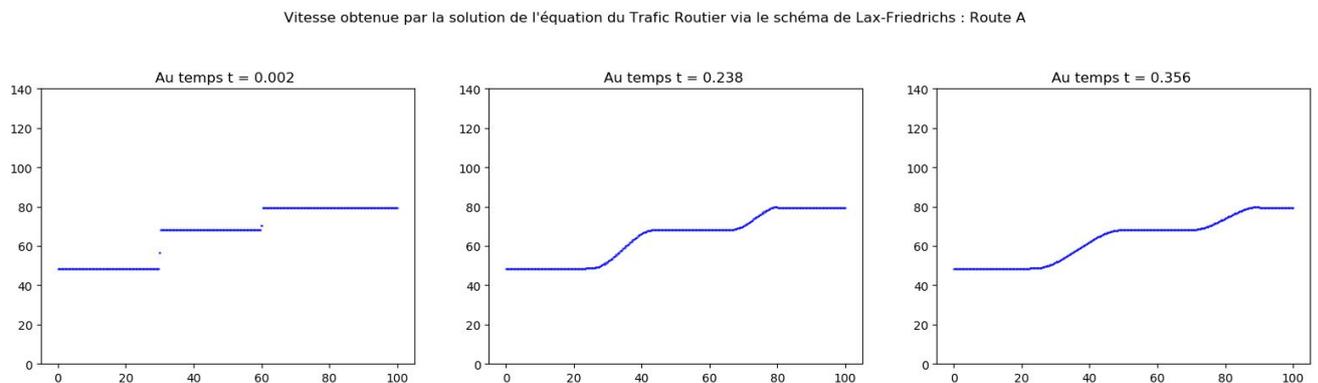
Remarque : .

Comme dans la section 2.3, nous avons 5 schémas à notre disposition et nous faisons le choix de montrer les résultats obtenus par le schéma de Lax-Friedrichs. Nous verrons néanmoins par la suite que le schéma de Roe, si précis dans le cadre de l'équation de Burgers, pose des difficultés lors des problèmes pratiques.

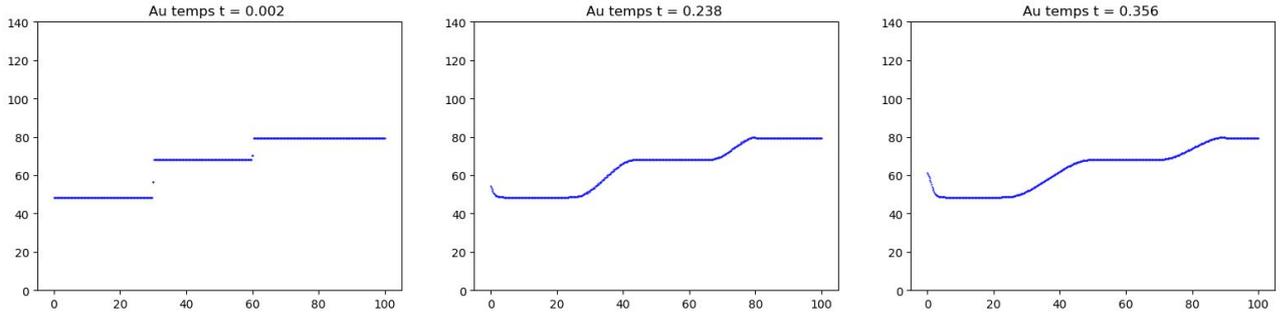
4.2 Simulation numérique : visualisation d'une détente

Pour visualiser la formation d'une détente, il faut et il suffit de se placer dans le cadre d'une condition initiale sous la forme d'un problème de Riemann décroissant pour la densité, la fonction $u_0^{(2)}$.

Assortis d'un flux d'entrée constant à $\chi(0, t) = 50$, nous obtenons les résultats suivants :



Assortis d'un flux d'entrée décroissant, nous obtenons les résultats suivants :



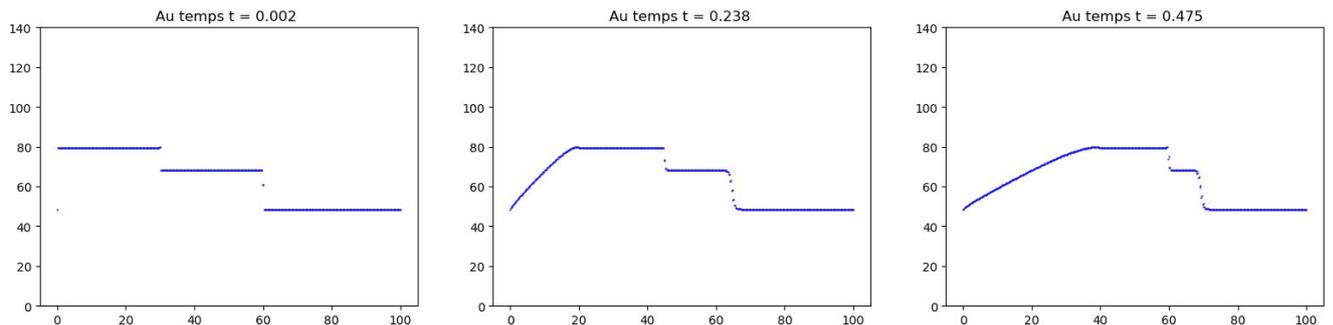
Dans les deux cas, nous observons bien la formation à l'aide de nos conditions initiales décroissante (donc notre vitesse est croissante) l'étalement de la vitesse. En effet, les voitures sont réparties de la façon suivante : beaucoup de voitures en début de routes puis de moins en moins au fur sur toute la route.

Nous remarquons bien que la formation de la détente est indépendante du flux d'entrée. Dans tous les cas, les voitures se recollent pour ne former qu'un groupe homogène dont la vitesse augmente progressivement au fil de la route. C'est le phénomène d'**accélération progressive**. Nous pouvons interpréter ce phénomène comme la sortie d'un feu rouge, les voitures pouvant désormais rouler à la vitesse souhaitée, les voitures en tête de file ne sont pas contraintes et vont donc accélérer et rouler à 80 km/h, les voitures qui suivent sont contraintes par celles de devant et doivent attendre un petit temps avant de pouvoir monter à 80 km/h et ainsi de suite pour toutes les voitures qui suivent.

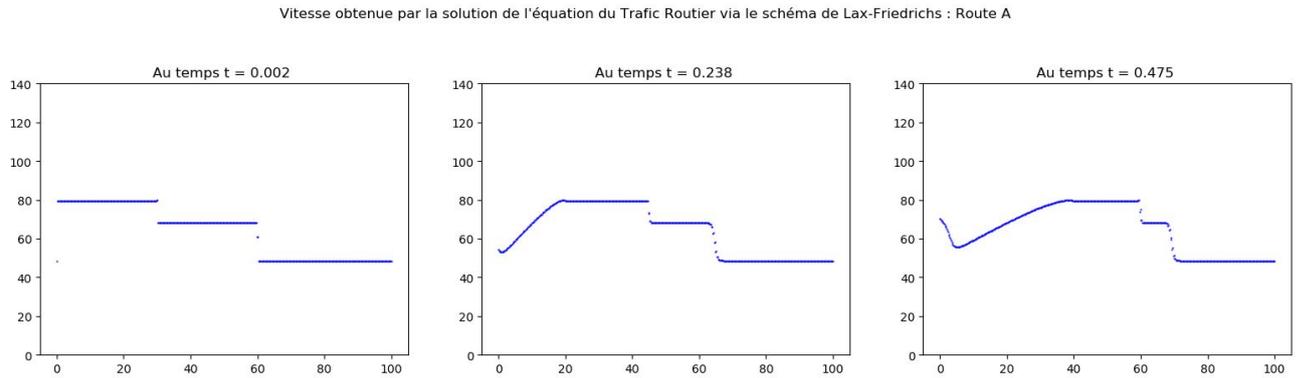
Il est évident que plus on est loin derrière les voitures de file, plus l'attente avant d'atteindre mes 80 km/h sera longue et c'est pourquoi les voitures n'accélèrent que progressivement.

Regardons cette fois-ci une condition d'entrée croissante, correspondant à $u_0^{(1)}$.

Assortis d'un flux d'entrée constant à $\chi(0, t) = 50$, nous obtenons les résultats suivants :



Assortis d'un flux d'entrée décroissant à $\chi(0, t) = 50$, nous obtenons les résultats suivants :

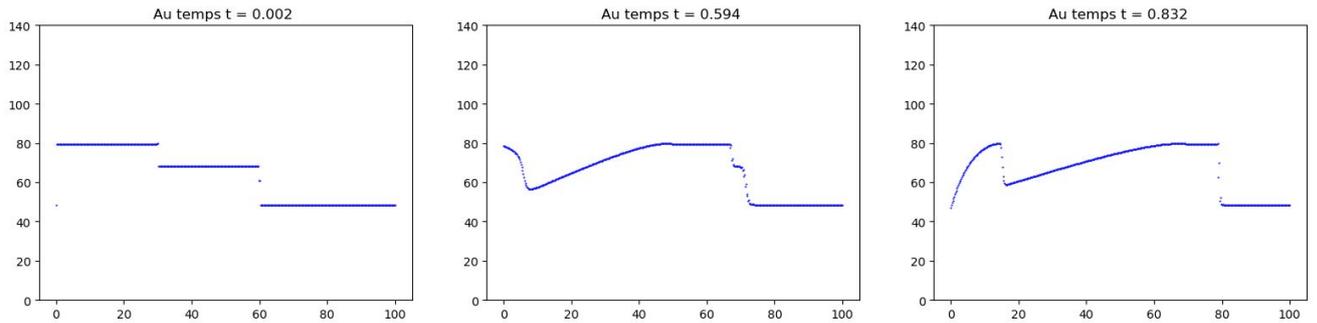


Indépendamment des flux d'entrées encore une fois, et donc de ce qu'il se passe au début de la route (que nous étudierons plus tard) nous observons un recollement de nos différentes vitesses. En effet, nous partons d'une densité croissante, il y a de plus en plus de voitures sur la route. La vitesse est donc très grande en début de route et de plus en plus petite au fil de la route. Nous pouvons alors voir, et c'est tout à fait compréhensible, que les premières voitures, plus rapides, recollent rapidement le groupe du milieu roulant à vitesse moyenne. Enfin, ce nouveau groupe ainsi formé roule à vitesse constante 80 k/h, pour "rattraper" progressivement le troisième groupe qui lui roule plus lentement. Ils ne formeront alors qu'un seul et unique groupe. C'est un phénomène de **lissage** de nos données, phénomène inverse de la détente. Plutôt qu'observer un groupe unique de voiture avec une vitesse croissante sur la route, nous observons un groupe de voiture homogène avec vitesse constante. Les premières voitures ont, en quelques sortes, rattrapées celles qui étaient devant elles pour les "entraîner" dans un trafic homogène.

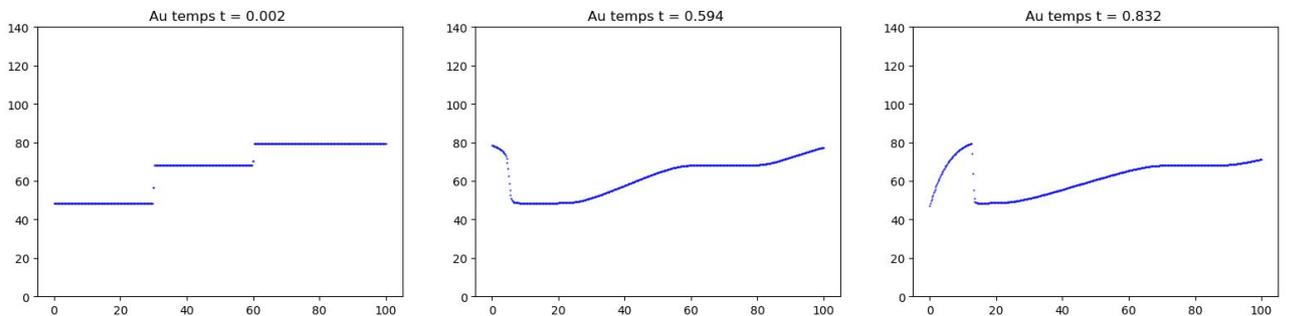
4.3 Simulation numérique : visualisation d'un choc

Là où, pour les visualisations précédentes, les conditions d'entrée importaient peu contrairement aux données initiales, nous rencontrons le phénomène inverse pour les chocs. En effet, il est nécessaire de donner un flux d'entrée décroissant (et donc une vitesse croissante) afin de visualiser la formation de "bouchons".

Assortis d'une condition initiale croissante $u_0^{(1)}$, nous obtenons les résultats suivants :



Assortis d'une condition initiale décroissante $u_0^{(2)}$, nous obtenons les résultats suivants :



Dans les deux cas, nous observons bien la formation du choc sur le début de la route. En effet, puisque nous mettons un flux d'entrée décroissant, la vitesse est croissante. Les voitures entrantes sont donc de plus en plus rapides. C'est pourquoi la vitesse fait un léger pic croissant sur l'image du milieu, néanmoins quelques secondes après la vitesse d'entrée devient trop important et entraîne un phénomène de **coup de frein** pour les voitures qui entrent. Leur vitesse chute brutalement, et tend vers 0. Nous pouvons conclure alors à un léger embouteillage, les voitures entrant de plus en plus vite, elles sont ralenties par la haute densité de véhicules devant elles, nous retrouvons alors le phénomène de diffusion du choc dont nous parlions plus tôt.

Remarque :

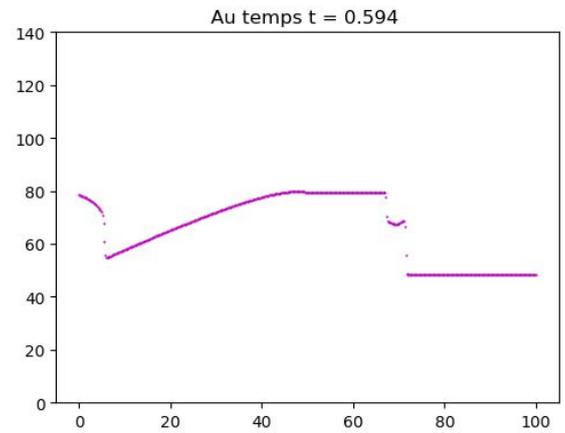
Nous avons expliqué au fil des simulations que la vitesse varie inversement de la densité. En effet, quand le nombre de voitures augmente, la vitesse du "groupe" est alors plus faible, ce qui est plutôt cohérent avec la réalité. Cela s'exprime en fait par la formule suivante :

$$V(x, t) = \frac{f(\chi(x, t))}{\chi(x, t)} = \beta_2 \chi(x, t) + \beta_1 + \frac{\beta_0}{\chi(x, t)}$$

Nous voyons alors qu'avec nos conditions d'entrées décroissante de limite nulle, le dernier terme à de grandes chances de mal se comporter. C'est le cas en pratique. La densité de véhicules

diminuant vers 0 à l'entrée de la route, la vitesse n'est alors plus définie. On peut dire qu'elle tend vers $-\infty$.

Nous pouvons conclure cette étude du trafic routier en montrant rapidement que le schéma de Murman-Roe, à cause de sa non-monotonie, engendre des erreurs d'approximation pouvant aller de ces incertitudes ci-contre, à une déformation complète et non réaliste de la solution.



Conclusion

En conclusion, nous dirons que l'analyse des problèmes hyperboliques non linéaires est très délicate. Pendant que la régularité est conservée dans les problèmes de transport linéaires, le cas non linéaire lui peut entraîner en temps fini une discontinuité de la solution, même si la donnée initiale est C^∞ . On remarque aussi la grande dépendance des conditions initiales.

Il faut néanmoins garder en mémoire que les résultats obtenus et les interprétations effectuées dépendent fortement du modèle choisi, et ont été faites dans le but de se rapprocher au mieux de la réalité. Nous avons programmé différents algorithmes de volumes finis pour voir si les différentes solutions théoriques pouvaient être captées par la résolution numérique et nous avons ainsi pu mesurer l'importance de certaines propriétés. Nous avons ainsi conclu que le manque de monotonie du schéma de Murman-Roe pouvait expliquer les mauvais résultats numériques.

La modélisation du trafic routier est un grand défi. L'utilisation d'une équation hyperbolique non linéaire dans notre modèle a quand même permis de retrouver des phénomènes connus (formation et absorption d'embouteillages, ...) et elle peut donc nous aider à comprendre et améliorer les conditions de trafic.

Pour conclure, nous souhaitons remercier notre référente pour ce travail de recherche, Mme Matos, pour nous avoir proposé ce sujet fort intéressant et pour son aide précieuse tout au long de la réalisation de celui-ci.

Bibliographie

- [1] Alain Lichnewsky, 2001, *Modélisation mathématiques : un autre regard*.
- [2] Laurent Di Menza, 2010, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*.
- [3] Raphaèle Herbin, 2010, *Analyse Numérique II – Chapitre 5 : Problèmes hyperboliques*.
- [4] Patrick Joly, *Schémas numériques pour les équations hyperboliques non linéaire 1D*.
- [5] Thierry Goudon, 2001, *Mathématiques pour le modélisation et le calcul scientifique*.
- [6] Benoît Perthame, 2003–2004, *Équations de transport non linéaires et systèmes hyperboliques*.

```

#####
### TER : Travaux Encadrés de Recherche      ###
### Modélisation du Trafic Routier          ###
### Par : Quentin FOURCHE et Benjamin KASPRZAK ###
### Professeur encadrant : Ana MATOS        ###
#####

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.animation as animation

#####
### Différentes conditions initiales ###
#####

def u0_trafic_0(x): #Condition nulle
    return 0*x

def u0_trafic_1(x): #Condition croissante (2 étapes)
    return 10*(0 <= x)*(x < 30) + 40*(30 <= x)*(x <= 100)

def u0_trafic_2(x): #Condition décroissante (2 étapes)
    return 40*(0 <= x)*(x < 30) + 10*(30 <= x)*(x <= 100)

def u0_trafic_3(x): #Condition croissante (3 étapes)
    return 10*(0 <= x)*(x < 30) + 30*(30 <= x)*(x <= 60) + 50*(60 <= x)*(x <= 100)

def u0_trafic_4(x): #Condition décroissante (3 étapes)
    return 50*(0 <= x)*(x < 30) + 30*(30 <= x)*(x <= 60) + 10*(60 <= x)*(x <= 100)

def u0_trafic_5(x): #Condition croissante puis décroissante (3 étapes)
    return 10*(0 <= x)*(x < 30) + 50*(30 <= x)*(x <= 60) + 30*(60 <= x)*(x <= 100)

def u0_trafic_6(x): #Condition décroissante puis croissante (3 étapes)
    return 50*(0 <= x)*(x < 30) + 10*(30 <= x)*(x <= 60) + 30*(60 <= x)*(x <= 100)

def u0_1(x):
    return 2*x**2*(x>0)*(x<=1/2)+(-2*x**2+4*x-1)*(x>1/2)*(x<1)+1*(x>=1)

def u0_2(x):
    return 1*(x<=0)+(1-2*x**2)*(0<x)*(x<=1/2)+(2-4*x+2*x**2)*(1/2<x)*(x<1)

def u0_3(x):
    return x**2*(x>0)

#####
### Différentes conditions entrées ###
#####

def u_entree_0(t, vmax): #Condition entrée de base
    return u0(0)

def u_entree_1(t, vmax): #Condition entrée constante faible
    return 0.2*vmax

def u_entree_2(t, vmax): #Condition entrée constante moyenne
    return 0.5*vmax

def u_entree_3(t, vmax): #Condition entrée constante forte
    return 1*vmax

```

```

def u_entree_4(t, vmax): #Condition entrée décroissante
    return ( 1*(t<=0)+(1-2*t**2)*(0<t)*(t<=1/2)+(2-4*t+2*t**2)*(1/2<t)*(t<1) )*vmax

def u_entree_5(t, vmax): #Condition entrée Loi normale
    sigma = 0.5
    return ( 1/(np.sqrt(2*np.pi)*sigma)*np.exp(-(t-(1))**2/(2*sigma)) )*vmax

#####
### Choix de L'équation à résoudre et de La condition initiale ###
#####

choix_equation = 2
u0 = u0_trafic_3
u_entree = u_entree_4
affichage = 1

#####
### Approximation polynomiale selon Le choix_equation ###
#####

if choix_equation == 1:
    # Equation de Burgers #
    beta = np.array([0, 0, 0.5])
    vmax = 1

elif (choix_equation > 0) and (choix_equation < 4):
    if choix_equation == 2:
        # Equation de Trafic routier : Route A #
        xi = np.loadtxt("I:/TER/valeurs_xi.txt", dtype = int)
        phi = np.loadtxt("I:/TER/valeurs_phi_A.txt", dtype = int)
        vmax = 50

    elif choix_equation == 3:
        # Equation de Trafic routier : Route B #
        xi = np.loadtxt("I:/TER/valeurs_xi.txt", dtype = int)
        phi = np.loadtxt("I:/TER/valeurs_phi_B.txt", dtype = int)
        vmax = 50

    A = np.zeros((3,3))
    A[0,0] = 3 ; A[0,1] = sum(xi) ; A[0,2] = sum(xi**2)
    A[1,0] = sum(xi) ; A[1,1] = sum(xi**2) ; A[1,2] = sum(xi**3)
    A[2,0] = sum(xi**2) ; A[2,1] = sum(xi**3) ; A[2,2] = sum(xi**4)

    b = np.zeros((3))
    b[0] = sum(phi) ; b[1] = np.dot(phi,xi) ; b[2] = np.dot(phi,xi**2)

    beta = np.linalg.solve(A, b)

elif choix_equation == 4:
    # Equation de Trafic routier : Route Théorique #
    beta = np.array([-1, 100, 0])

else:
    beta = np.array([0, 0, 0])

#####
### Choix de La fonction A dans L'équation de transport et de sa dérivée a ###
#####

```

```

def A(x):
    return (beta[0] + beta[1]*x + beta[2]*x**2)

def pos(A,u):
    return A(u)*(A(u)>=0)

def neg(A,u):
    return -A(u)*(A(u)<=0)

def der(f,x):
    h=1e-8
    return (f(x+h)-f(x-h))/(2*h)

#####
### Conditions aux limites utilisées dans Le schéma aux volumes finis ###
#####

def CL_0(f):
    return f(0)

def CL_L(f):
    return f(L)

#####
### Choix des paramètres ###
#####

# Temps maximal (en secondes)
if choix_equation == 1:
    T = 1
elif choix_equation == 2:
    T = 2.5
elif choix_equation == 3:
    T = 2.5
elif choix_equation == 4:
    T = 2.5

duree=4*T # La durée sera approximative en raison du temps de calcul et de La Légende de "animai

if choix_equation == 1:
    L = 1
elif choix_equation == 2:
    L = 100
elif choix_equation == 3:
    L = 100

CFL=1 # Condition CFL
Nx=500 # Nombre de point de La discrétisation en espace
x=np.linspace(0,L,Nx) # Intervalle [0,L] discrétisé en Nx points
dx=L/Nx # Pas d'espace

#####
### Vectorisation de la fonction u0 sur l'intervalle [0,L] en Nx points ###
#####

def vect(f,x):
    return np.real(f(x))

v=vect(u0,x)

#####

```

```

### Choix des paramètres (suite) ###
#####

a_inf=max(abs(der(A,v))) # Définition de a_inf
dt=CFL*dx/a_inf # Pas de temps déterminé à partir de La CFL
Nt=int(np.floor(T/dt)) # Nombre de points pour la discrétisation du temps
y=np.linspace(0,T,Nt) # Intervalle [0,T] discrétisé en Nt points
dt=T/Nt

#####
### Définitions des flux des différentes méthodes ###
#####

def flux_LF(u,v,A):
    return (A(u)+A(v)-a_inf*(v-u))/2

def flux_LFM(u,v,A):
    return (A(u)+A(v)-np.maximum(der(A,u),der(A,v))*(v-u))/2

def flux_EO(u,v,A):
    return pos(A,u)-neg(A,v)

def a(u,v,A):
    if type(u)!=np.ndarray:
        if (u==v):
            return der(A,u)
        else :
            return (A(v)-A(u))/(v-u)
    elif type(u)==np.ndarray:
        n=np.size(u)
        y=np.zeros(n)
        for k in range(0,n):
            if (u[k]==v[k]):
                y[k]=der(A,u[k])
            else :
                y[k]=(A(v[k])-A(u[k]))/(v[k]-u[k])
        return y

def flux_Roe(u,v,A):
    return A(v)*(a(u,v,A)<0)+A(u)*(a(u,v,A)>0)

def flux_UW(u,v,A):
    return A(u)*(der(A,((u+v)/2))>0)+A(v)*(der(A,((u+v)/2))<0)

#####
### Méthode des volumes finis ###
#####

def methode_volumes_finis(A,u0,flux) :
    v=vect(u0,x) # Vectorisation de la fonction u0 sur [0,L]
    U=np.zeros((Nx,Nt)) # Initialisation d'une matrice stockant les solutions à chaque temps
    U[:,0]=v
    # Méthode des volumes finis
    for k in np.arange(1,Nt):
        U[1:Nx-1,k]=U[1:Nx-1,k-1]-dt/dx*(flux(U[1:Nx-1,k-1],U[2:Nx,k-1],A)-flux(U[0:Nx-2,k-1],U
        U[0,k]=u_entree(k*dt,vmax)
        U[Nx-1,k] = U[Nx-2,k]
    return U

#####
### Solutions approchées de l'équation ###

```

```
#####
```

```
U_LF=methode_volumes_finis(A,u0,flux_LF)
U_LFM=methode_volumes_finis(A,u0,flux_LFM)
U_EO=methode_volumes_finis(A,u0,flux_EO)
U_Roe=methode_volumes_finis(A,u0,flux_Roe)
U_UW=methode_volumes_finis(A,u0,flux_UW)
```

```
Phi_LF=A(U_LF)
Phi_LFM=A(U_LFM)
Phi_EO=A(U_EO)
Phi_Roe=A(U_Roe)
Phi_UW=A(U_UW)
```

```
V_LF=Phi_LF/U_LF
V_LFM=Phi_LFM/U_LFM
V_EO=Phi_EO/U_EO
V_Roe=Phi_Roe/U_Roe
V_UW=Phi_UW/U_UW
```

```
#####
```

```
### Solutions exactes de l'équation ###
```

```
#####
```

```
def u_1(x,t): # u0_1 donné
    y1=np.sqrt((1+8*t*x)*(1+8*t*x>0))
    y2=np.sqrt((1+8*t*(1-x+t))*(1+8*t*(1-x+t)>0))
    ksi=1+(1/(4*t))*(1-y2)
    return 1*(x-t>=1)+(1/(4*t**2))*(1+4*t*x-y1)*(x>0)*(x-t/2<1/2)+(-2*(ksi**2)+4*ksi-1)*(x-t<
```

```
def u_2(x,t): # Solution calculé à la main
    y1=np.sqrt((1-8*t*(x-t))*(1-8*t*(x-t)>0))
    y2=np.sqrt((1-8*t*(1-x))*(1-8*t*(1-x)>0))
    return 1*(x-t<=0)+(1-(1/(8*t**2))*(1-y1)**2)*(x-t>0)*(x-t/2<1/2)+(-2+(1/t)*(1-y2)+(1/(8*t**2)
```

```
def u_3(x,t):
    return (x>0)*((1+2*t*x-np.sqrt(1+4*t*x))/(2*t**2))
```

```
if u0==u0_1:
    u=u_1
elif u0==u0_2:
    u=u_2
elif u0==u0_3:
    u=u_3
```

```
#####
```

```
### Calcul des erreurs ###
```

```
#####
```

```
if choix_equation == 1:
    U_exacte=np.zeros((Nx,Nt))
    U_exacte[:,0]=u0(x[:])
    for k in np.arange(1,Nt):
        U_exacte[:,k]=u(x[:],k*dt)
```

```
ERR_LF=abs(U_LF-U_exacte)
ERR_LFM=abs(U_LFM-U_exacte)
ERR_EO=abs(U_EO-U_exacte)
ERR_Roe=abs(U_Roe-U_exacte)
ERR_UW=abs(U_UW-U_exacte)
```

```

### En espace ###
print("Erreurs en espace des différents schémas :")
print()

print("Erreur LF norme infinie : ", np.linalg.norm(ERR_LF[:, 1], ord=np.inf))
print("Erreur LF norme l2 : ", np.linalg.norm(ERR_LF[:, 1], ord=None))
print()

print("Erreur LFloc norme infinie : ", np.linalg.norm(ERR_LFM[:, 1], ord=np.inf))
print("Erreur LFloc norme l2 : ", np.linalg.norm(ERR_LFM[:, 1], ord=None))
print()

print("Erreur EO norme infinie : ", np.linalg.norm(ERR_EO[:, 1], ord=np.inf))
print("Erreur EO norme l2 : ", np.linalg.norm(ERR_EO[:, 1], ord=None))
print()

print("Erreur Roe norme infinie : ", np.linalg.norm(ERR_Roe[:, 1], ord=np.inf))
print("Erreur Roe norme l2 : ", np.linalg.norm(ERR_Roe[:, 1], ord=None))
print()

print("Erreur UW norme infinie : ", np.linalg.norm(ERR_UW[:, 1], ord=np.inf))
print("Erreur UW norme l2 : ", np.linalg.norm(ERR_UW[:, 1], ord=None))

print()
print("-----")
print()

### En temps ###
print("Erreurs en temps des différents schémas :")
print()

print("Erreur LF norme infinie : ", np.linalg.norm(ERR_LF[1, :], ord=np.inf))
print("Erreur LF norme l2 : ", np.linalg.norm(ERR_LF[1, :], ord=None))
print()

print("Erreur LFloc norme infinie : ", np.linalg.norm(ERR_LFM[1, :], ord=np.inf))
print("Erreur LFloc norme l2 : ", np.linalg.norm(ERR_LFM[1, :], ord=None))
print()

print("Erreur EO norme infinie : ", np.linalg.norm(ERR_EO[1, :], ord=np.inf))
print("Erreur EO norme l2 : ", np.linalg.norm(ERR_EO[1, :], ord=None))
print()

print("Erreur Roe norme infinie : ", np.linalg.norm(ERR_Roe[1, :], ord=np.inf))
print("Erreur Roe norme l2 : ", np.linalg.norm(ERR_Roe[1, :], ord=None))
print()

print("Erreur UW norme infinie : ", np.linalg.norm(ERR_UW[1, :], ord=np.inf))
print("Erreur UW norme l2 : ", np.linalg.norm(ERR_UW[1, :], ord=None))
print()

print("-----")

#####
### Affichage graphique : Vitesse / Densité / Flux ###
#####
if affichage == 1:

#####

```

```

### Animation de La Vitesse ###
#####

if choix_equation == 2:
    ymin=0
    ymax=150
elif choix_equation == 3:
    ymin=0
    ymax=150
elif choix_equation == 4:
    ymin=0
    ymax=150

if choix_equation == 2:
    f0 = plt.figure(num = 1, figsize = (12, 8))
    f0.suptitle("Vitesse de l'équation du Trafic Routier : Route A", fontsize=11)
elif choix_equation == 3:
    f0 = plt.figure(num = 1, figsize = (12, 8))
    f0.suptitle("Vitesse de l'équation du Trafic Routier : Route B", fontsize=11)
elif choix_equation == 4:
    f0 = plt.figure(num = 1, figsize = (12, 8))
    f0.suptitle("Vitesse de l'équation du Trafic Routier : Route Théorique", fontsize=11)
else:
    f0 = plt.figure(num = 1, figsize = (12, 8))
    f0.suptitle("Choix d'équation non compris", fontsize=11)

ax1 = plt.subplot(2,3,2)
ax2 = plt.subplot(2,3,3)
ax3 = plt.subplot(2,3,4)
ax4 = plt.subplot(2,3,5)
ax5 = plt.subplot(2,3,6)

ax1.set_title('Schéma de Lax-Friedrichs')
ax2.set_title('Schéma de Lax-Friedrichs Local')
ax3.set_title('Schéma de Enquist-Osher')
ax4.set_title('Schéma de Roe')
ax5.set_title('Schéma Upwind')

ax1.set_xlim(0,L)
ax2.set_xlim(0,L)
ax3.set_xlim(0,L)
ax4.set_xlim(0,L)
ax5.set_xlim(0,L)

ax1.set_ylim(ymin,ymax)
ax2.set_ylim(ymin,ymax)
ax3.set_ylim(ymin,ymax)
ax4.set_ylim(ymin,ymax)
ax5.set_ylim(ymin,ymax)

p1, = ax1.plot(x,u0(x), '.', markersize=1, color='b')
p2, = ax2.plot(x,u0(x), '.', markersize=1, color='r')
p3, = ax3.plot(x,u0(x), '.', markersize=1, color='g')
p4, = ax4.plot(x,u0(x), '.', markersize=1, color='m')
p5, = ax5.plot(x,u0(x), '.', markersize=1, color='orangered')

def animate(i):
    p1.set_data(x,V_LF[:,i])
    p2.set_data(x,V_LFM[:,i])
    p3.set_data(x,V_EO[:,i])
    p4.set_data(x,V_Roe[:,i])

```

```

p5.set_data(x,V_UW[:,i])
p5.set_label("u({0:0.2f},x)".format(i*dt))
legend = plt.legend()
return p1,p2,p3,p4,p5,legend

```

```
ani = animation.FuncAnimation(f0, animate, frames=Nt, blit=True, interval=500*duree*dt/T, re
```

```
elif affichage == 2:
```

```
#####
### Animation de La Densité ###
#####
```

```
if choix_equation == 1:
```

```
    ymin=0
    ymax=1
```

```
elif choix_equation == 2:
```

```
    ymin=0
    ymax=50
```

```
elif choix_equation == 3:
```

```
    ymin=0
    ymax=50
```

```
elif choix_equation == 4:
```

```
    ymin=0
    ymax=50
```

```
if (choix_equation == 1 and u_entree == u_entree_0):
```

```
    f0 = plt.figure(num = 1, figsize = (12, 8))
    f0.suptitle("Solutions de l'équation de Burgers", fontsize=11)
    ax0 = plt.subplot(2,3,1)
    ax0.set_title('Solution entropique')
    ax0.set_ylim(ymin,ymax)
    ax0.set_xlim(0,L)
    p0, = ax0.plot(x,u0(x),'.',markersize=1,color='k')
```

```
elif (choix_equation == 1 and u_entree != u_entree_0):
```

```
    f0 = plt.figure(num = 1, figsize = (12, 8))
    f0.suptitle("Solutions de l'équation de Burgers", fontsize=11)
```

```
elif choix_equation == 2:
```

```
    f0 = plt.figure(num = 1, figsize = (12, 8))
    f0.suptitle("Densité de l'équation du Trafic Routier : Route A", fontsize=11)
```

```
elif choix_equation == 3:
```

```
    f0 = plt.figure(num = 1, figsize = (12, 8))
    f0.suptitle("Densité de l'équation du Trafic Routier : Route B", fontsize=11)
```

```
elif choix_equation == 4:
```

```
    f0 = plt.figure(num = 1, figsize = (12, 8))
    f0.suptitle("Densité de l'équation du Trafic Routier : Route Théorique", fontsize=11)
```

```
else:
```

```
    f0 = plt.figure(num = 1, figsize = (12, 8))
    f0.suptitle("Choix d'équation non compris", fontsize=11)
```

```
ax1 = plt.subplot(2,3,2)
```

```
ax2 = plt.subplot(2,3,3)
```

```
ax3 = plt.subplot(2,3,4)
```

```
ax4 = plt.subplot(2,3,5)
```

```
ax5 = plt.subplot(2,3,6)
```

```
ax1.set_title('Schéma de Lax-Friedrichs')
```

```
ax2.set_title('Schéma de Lax-Friedrichs Local')
```

```
ax3.set_title('Schéma de Enquist-Osher')
```

```

ax4.set_title('Schéma de Roe')
ax5.set_title('Schéma Upwind')

ax1.set_xlim(0,L)
ax2.set_xlim(0,L)
ax3.set_xlim(0,L)
ax4.set_xlim(0,L)
ax5.set_xlim(0,L)

ax1.set_ylim(ymin,ymax)
ax2.set_ylim(ymin,ymax)
ax3.set_ylim(ymin,ymax)
ax4.set_ylim(ymin,ymax)
ax5.set_ylim(ymin,ymax)

p1, = ax1.plot(x,u0(x), '.', markersize=1, color='b')
p2, = ax2.plot(x,u0(x), '.', markersize=1, color='r')
p3, = ax3.plot(x,u0(x), '.', markersize=1, color='g')
p4, = ax4.plot(x,u0(x), '.', markersize=1, color='m')
p5, = ax5.plot(x,u0(x), '.', markersize=1, color='orangered')

if choix_equation == 1:
    def animate(i):
        t=(i+1)*dt
        p0.set_data(x,u(x,t))
        p1.set_data(x,U_LF[:,i])
        p2.set_data(x,U_LFM[:,i])
        p3.set_data(x,U_EO[:,i])
        p4.set_data(x,U_Roe[:,i])
        p5.set_data(x,U_UW[:,i])
        p5.set_label("u({0:0.2f},x)".format(i*dt))
        legend = plt.legend()
        return p0,p1,p2,p3,p4,p5,legend

else:
    def animate(i):
        p1.set_data(x,U_LF[:,i])
        p2.set_data(x,U_LFM[:,i])
        p3.set_data(x,U_EO[:,i])
        p4.set_data(x,U_Roe[:,i])
        p5.set_data(x,U_UW[:,i])
        p5.set_label("u({0:0.2f},x)".format(i*dt))
        legend = plt.legend()
        return p1,p2,p3,p4,p5,legend

ani = animation.FuncAnimation(f0, animate, frames=Nt, blit=True, interval=500*duree*dt/T, re

elif affichage == 3:

#####
### Animation du Flux ###
#####

if choix_equation == 2:
    ymin=0
    ymax=3000
elif choix_equation == 3:
    ymin=0
    ymax=3000

```

```

elif choix_equation == 4:
    ymin=0
    ymax=3000

if choix_equation == 2:
    f0 = plt.figure(num = 1, figsize = (12, 8))
    f0.suptitle("Flux de l'équation du Trafic Routier : Route A", fontsize=11)
elif choix_equation == 3:
    f0 = plt.figure(num = 1, figsize = (12, 8))
    f0.suptitle("Flux de l'équation du Trafic Routier : Route B", fontsize=11)
elif choix_equation == 4:
    f0 = plt.figure(num = 1, figsize = (12, 8))
    f0.suptitle("Flux de l'équation du Trafic Routier : Route Théorique", fontsize=11)
else:
    f0 = plt.figure(num = 1, figsize = (12, 8))
    f0.suptitle("Choix d'équation non compris", fontsize=11)

ax1 = plt.subplot(2,3,2)
ax2 = plt.subplot(2,3,3)
ax3 = plt.subplot(2,3,4)
ax4 = plt.subplot(2,3,5)
ax5 = plt.subplot(2,3,6)

ax1.set_title('Schéma de Lax-Friedrichs')
ax2.set_title('Schéma de Lax-Friedrichs Local')
ax3.set_title('Schéma de Enquist-Osher')
ax4.set_title('Schéma de Roe')
ax5.set_title('Schéma Upwind')

ax1.set_xlim(0,L)
ax2.set_xlim(0,L)
ax3.set_xlim(0,L)
ax4.set_xlim(0,L)
ax5.set_xlim(0,L)

ax1.set_ylim(ymin,ymax)
ax2.set_ylim(ymin,ymax)
ax3.set_ylim(ymin,ymax)
ax4.set_ylim(ymin,ymax)
ax5.set_ylim(ymin,ymax)

p1, = ax1.plot(x,u0(x), '.', markersize=1, color='b')
p2, = ax2.plot(x,u0(x), '.', markersize=1, color='r')
p3, = ax3.plot(x,u0(x), '.', markersize=1, color='g')
p4, = ax4.plot(x,u0(x), '.', markersize=1, color='m')
p5, = ax5.plot(x,u0(x), '.', markersize=1, color='orangered')

def animate(i):
    p1.set_data(x,Phi_LF[:,i])
    p2.set_data(x,Phi_LFM[:,i])
    p3.set_data(x,Phi_EO[:,i])
    p4.set_data(x,Phi_Roe[:,i])
    p5.set_data(x,Phi_UW[:,i])
    p5.set_label("u({0:0.2f},x)".format(i*dt))
    legend = plt.legend()
    return p1,p2,p3,p4,p5,legend

```

```
ani = animation.FuncAnimation(f0, animate, frames=Nt, blit=True, interval=500*duree*dt/T, repeat
```

```
#####  
#####
```

```
if choix_equation == 1:  
    # Equation de Trafic routier : Route A #  
    xi = np.loadtxt("/home/benjamin.kasprzak.etu/TER/valeurs_xi.txt", dtype = int)  
    phi = np.loadtxt("/home/benjamin.kasprzak.etu/TER/valeurs_phi_A.txt", dtype = int)  
  
    A = np.zeros((3,3))  
    A[0,0] = 3  
    A[0,1] = sum(xi)  
    A[0,2] = sum(xi**2)  
    A[1,0] = sum(xi)  
    A[1,1] = sum(xi**2)  
    A[1,2] = sum(xi**3)  
    A[2,0] = sum(xi**2)  
    A[2,1] = sum(xi**3)  
    A[2,2] = sum(xi**4)  
  
    b = np.zeros((3))  
    b[0] = sum(phi)  
    b[1] = np.dot(phi,xi)  
    b[2] = np.dot(phi,xi**2)  
  
    beta = np.linalg.solve(A, b)  
  
elif choix_equation == 2:  
    # Equation de Trafic routier : Route B #  
    xi = np.loadtxt("/home/benjamin.kasprzak.etu/TER/valeurs_xi.txt", dtype = int)  
    phi = np.loadtxt("/home/benjamin.kasprzak.etu/TER/valeurs_phi_B.txt", dtype = int)  
  
    A = np.zeros((3,3))  
    A[0,0] = 3  
    A[0,1] = sum(xi)  
    A[0,2] = sum(xi**2)  
    A[1,0] = sum(xi)  
    A[1,1] = sum(xi**2)  
    A[1,2] = sum(xi**3)  
    A[2,0] = sum(xi**2)  
    A[2,1] = sum(xi**3)  
    A[2,2] = sum(xi**4)  
  
    b = np.zeros((3))  
    b[0] = sum(phi)  
    b[1] = np.dot(phi,xi)  
    b[2] = np.dot(phi,xi**2)  
  
    beta = np.linalg.solve(A, b)  
  
def A(x):  
    return beta[0] + beta[1]*x + beta[2]*x**2  
  
if choix_equation == 1:  
    choix_eq = 'A'  
    ymax = 3000  
elif choix_equation == 2:  
    choix_eq = 'B'  
    ymax = 1200  
  
x = np.linspace(0, 100, 1000)
```

```
plt.figure()
plt.title('Données du trafic routier - Route ' + choix_eq)
plt.xlim(0,100)
plt.ylim(0,ymax)
plt.plot(xi,phi, '.')
plt.plot(x, A(x))
```