

Travail Encadré de Recherche

**Etude théorique et simulations numériques des  
équations de Navier-Stokes**

NAYET Aymeric  
CLENET Maxime

**Encadrants :**

CALGARO Caterina  
TRAN Viet Chi

Version du 28/05/2017



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Etablissement des équations de Navier-Stokes incompressibles</b>	<b>4</b>
I.	Les différentes descriptions pour un écoulement d'un fluide . . . . .	4
a.	Description Lagrangienne . . . . .	4
b.	Description Eulérienne . . . . .	5
II.	Quantités conservées et tenseurs . . . . .	5
a.	Conservation de la masse (équation de continuité) . . . . .	5
b.	Tenseur des contraintes . . . . .	6
c.	Tenseur de déformation . . . . .	9
III.	Principe fondamental de la dynamique . . . . .	10
a.	Dans le cas général . . . . .	10
b.	Equations de Navier-Stokes incompressibles . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Equation de la chaleur</b>	<b>12</b>
I.	Positionnement du problème . . . . .	12
II.	Équation de la chaleur en dimension 1 . . . . .	12
a.	Solution classique sur $\mathbb{R}$ . . . . .	12
b.	Résolution sur $(0,1)$ - Séries de Fourier . . . . .	15
III.	Equation de la chaleur en dimension $n$ . . . . .	17
a.	Formulation faible . . . . .	17
b.	Application de la transformée de Fourier . . . . .	18
c.	Résolution exacte . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Etude théorique des équations de Navier-Stokes incompressibles</b>	<b>21</b>
I.	Reformulation des équations . . . . .	21
a.	Formulation variationnelle . . . . .	21
b.	Application de la transformée de Fourier . . . . .	23
II.	Introduction de nouveaux ensembles . . . . .	31
a.	Rappel sur les relations coordonnées sphériques/cartésiennes . . . . .	31
b.	Introduction de l'ensemble $D$ . . . . .	31
c.	Similitude . . . . .	34
d.	Introduction de l'ensemble $A$ . . . . .	34
e.	Introduction du noyau $K$ . . . . .	34
III.	Étude du noyau $K$ . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Processus de branchement</b>	<b>42</b>
I.	Problématique . . . . .	42
II.	Résultats préliminaires . . . . .	42
a.	Structure discrète: Galton Watson . . . . .	42

b.	Galton Watson en temps continu . . . . .	45
III.	Définition de l'arbre . . . . .	47
IV.	Opération dans l'arbre . . . . .	48
V.	Étude de l'arbre . . . . .	50
VI.	Simulation . . . . .	52
a.	Préliminaire . . . . .	53
b.	Méthode de programmation . . . . .	53
c.	Résultats . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Simulation Numérique en 2D</b>	<b>55</b>
I.	Etude rapide du problème . . . . .	55
II.	Discrétisation en temps du problème . . . . .	58
a.	Adimensionnement . . . . .	58
b.	Schéma numérique pour l'évolution en temps. . . . .	60
III.	Discrétisation en espace du problème . . . . .	63
a.	Maillage et conditions de bord . . . . .	63
b.	Discrétisation des opérateurs différentiels . . . . .	65
c.	Obtention de $u^*$ et résolution du problème de Poisson . . . . .	66
d.	Résolution informatique des systèmes linéaires . . . . .	68
IV.	Simulations . . . . .	69
a.	Visualisation des résultats . . . . .	69
b.	Tourbillons . . . . .	70
c.	Instabilité de Kelvin-Helmoltz . . . . .	78
d.	Flux avec obstacle circulaire . . . . .	80
<b>A</b>	<b>Fonctionnement du programme de simulation 2D</b>	<b>84</b>
I.	Généralités . . . . .	84
II.	Construction du fichier de configuration . . . . .	84
a.	Paramètres généraux de la simulation . . . . .	85
b.	Paramétrer la solution initiale . . . . .	86
c.	Ajouter un traceur . . . . .	87
d.	Ajouter des obstacles . . . . .	87
e.	Ajouter une force extérieure . . . . .	88
	<b>Bibliographie</b>	<b>89</b>



## Remerciements

Nous avons à coeur de remercier nos encadrants de stage : Madame Caterina CALGARO et Monsieur Viet Chi TRAN qui ont su nous écouter quant à notre volonté de réaliser un travail sur un sujet pluridisciplinaire, ce faisant nous ont construit un sujet personnalisé.

Leur bienveillance à notre égard et leur volonté de rencontres hebdomadaires nous a permis de progresser dans deux domaines relativement éloignés à première vue, d'apprendre à aborder un article de recherche et donc de réaliser de grand progrès en Mathématiques. Ils nous ont aiguillé dans la mise en œuvre d'un projet de recherche pour nous permettre de mener nos travaux à bout.

Nous nous remercions également mutuellement pour notre patience l'un envers l'autre durant nos folles soirées T.E.R, et Chloé pour son courage face à nos 51024 virgules.

# Introduction

*"Le livre de la nature est écrit dans un langage mathématique."*

**Galilée**

Prévoir la météo, décrire le mouvement des vagues ou encore optimiser l'aérodynamisme des voitures... Ces phénomènes naturels créent des problématiques que les scientifiques essaient de comprendre quotidiennement. Elles relèvent de la résolution d'une seule énigme : les équations de Navier-Stokes.

Ces équations font partie des plus importantes de la physique. Bien qu'ayant été établies il y a plus de deux siècles, l'existence et l'unicité de celles-ci dans le cas des fluides incompressibles n'a toujours pas été démontrée, du moins en trois dimensions.

La complexité de ces équations est particulièrement due à l'existence d'un terme convectif qui rend ces équations non linéaires.

Actuellement, il n'existe pas de solution analytique. Les progrès réalisés dans le domaine informatique permettent aujourd'hui leurs résolutions approchées en des temps de calcul acceptables.

Y. Le Jan et A.S. Sznitman [5] interprètent ces équations - pourtant d'aspect déterministe - de manière probabiliste, en mettant en évidence un processus de branchement lié à ces équations. Leur analyse a permis de trouver pour certaines classes de fonctions l'existence et l'unicité des équations de Navier Stokes incompressibles.

L'objectif principal de ce travail encadré de recherche (T.E.R) a donc été d'établir ces équations, de comprendre leur complexité, puis d'étudier cette publication scientifique en démontrant les résultats. Des simulations numériques ont été réalisées à partir du livre mais aussi à partir du processus de branchement obtenu.

L'explication des principes de bases de la mécanique des fluides [1] ouvre notre document, pour conclure sur l'établissement des équations de Navier-Stokes sous l'hypothèse d'incompressibilité du fluide.

Notre étude nécessite la mise en place d'outils mathématiques adaptés (espaces de Sobolev, transformées de Fourier [8] [2]...). Ainsi, nous travaillons dans un premier temps sur les équations de la chaleur nous permettant d'énoncer des propositions et théorèmes cruciaux pour la suite.

Nous commençons alors notre étude sur la publication scientifique. Nous analysons le passage de notre équation dans l'espace de Fourier puis nous introduisons le noyau Markovien générant le processus de branchement. Nous réalisons alors une étude des processus probabilistes [6] [7] dans

l'objectif de mieux comprendre leur fonctionnement ainsi que des simulations de cascades stochastiques. Nous débouchons alors sur l'existence et l'unicité de solutions pour nos équations en ce qui concernent une certaine classe de fonctions.

Dans la dernière partie, nous simulons les équations de Navier Stokes en 2D par la méthode des différences finies [4] [3].

Ce travail a été effectué à l'issue de notre second semestre en Master 1 Mathématiques Appliquées, Statistiques à l'Université Lille 1. Notre volonté était de réaliser un travail pluridisciplinaire grâce à la différence de nos parcours (Calcul Scientifique / Statistiques).



# Chapitre 1

## Etablissement des équations de Navier-Stokes incompressibles

Les équations de Navier-Stokes incompressibles décrivent l'écoulement d'un fluide, d'une certaine densité volumique  $\rho$ , et d'une certaine viscosité  $\nu$ , dans un domaine  $V$ .

Pour établir ces équations, on s'intéresse à un élément infinitésimal de fluide, de volume  $dV$ .

Nous avons deux choix pour décrire le mouvement de cet élément :

- Soit on suit le mouvement de chaque particules au cours du temps. On fixe alors le référentiel sur la particule (**description dite Lagrangienne**)
- Soit on fixe un référentiel en un point (position et temps donné), et on considère le champs des vitesse à cet instant sur  $V$ . (**description dite Eulérienne**)

### I. Les différentes descriptions pour un écoulement d'un fluide

#### a. Description Lagrangienne

On positionne notre référentiel sur notre particule élémentaire. Avec cette description, on connaît la trajectoire de la particule au cours du temps, on note alors  $X(t) \in \mathbb{R}^3$  la position de la particule au temps  $t$ . Notons  $R$  une propriété intrinsèque à la particule (masse, vitesse...). La variation de cette grandeur au cours du temps s'écrit donc, avec  $\Delta t$ , un pas de temps infinitésimal :

$$R(t + \Delta t, X(t + \Delta t)) - R(t, X(t)) = \frac{dR}{dt}(t, X(t)) + O(\Delta t)$$

La variation de notre grandeur  $R$  ne dépend donc que du temps, et est valable pour une particule donnée. On peut donc réécrire l'expression :

$$R_X(t + \Delta t) - R_X(t) = \frac{dR_X}{dt}(t) + O(\Delta t)$$

On remarque que cette formulation n'est pas pratique. En effet, on a pas d'informations concernant les autres particules. Ainsi, comme le nombre de particules est important, on ne peut pas avoir une description précise du mouvement.

## b. Description Eulérienne

Au lieu de suivre sa trajectoire au cours du temps, on suppose que l'on connaît la vitesse des particules en tout points et à tout instant.

Supposons toujours que l'on veut établir la variation d'une certaine grandeur  $R$  de cette particule fluide au cours du temps (par exemple : température, volume, masse etc..). Sachant que l'on connaît la vitesse des particules pour tout temps  $t$ ,  $u(t, x, y, z) = (u_1(t, x, y, z), u_2(t, x, y, z), u_3(t, x, y, z))^T$ , on connaît la position des particules à l'instant infinitésimal suivant. On peut écrire, avec  $\Delta t$ , un pas de temps infinitésimal:

$$\begin{aligned} R(t + \Delta t, x + u_1\Delta t, y + u_2\Delta t, u_3\Delta t) &\approx R(t, x, y, z) + \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial t} & \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta t \\ u_1\Delta t \\ u_2\Delta t \\ u_3\Delta t \end{pmatrix} \\ &\approx R(t, x, y, z) + \Delta t \frac{\partial R}{\partial t} + u_1\Delta t \frac{\partial R}{\partial x} + u_2\Delta t \frac{\partial R}{\partial y} + u_3\Delta t \frac{\partial R}{\partial z} \\ &\approx R(t, x, y, z) + \Delta t \left( \frac{\partial R}{\partial t} + u_1 \frac{\partial R}{\partial x} + u_2 \frac{\partial R}{\partial y} + u_3 \frac{\partial R}{\partial z} \right) \\ &\approx R(t, x, y, z) + \Delta t \left( \frac{\partial R}{\partial t} + u \cdot \nabla R \right) \end{aligned}$$

La dérivée qui apparaît s'appelle dérivée particulaire.

**Définition 1.1** (Dérivée particulaire). *Soit  $R$  une grandeur quelconque,  $u(t, x, y, z)$  la vitesse du fluide, alors on défini la dérivée particulaire de la grandeur par :*

$$\frac{DR}{Dt} = \frac{\partial R}{\partial t} + u \cdot \nabla R$$

On utilisera cette formulation dans la suite . En effet, on peut retrouver l'expression de cette dérivée même avec la description Lagrangienne.

## II. Quantités conservées et tenseurs

### a. Conservation de la masse (équation de continuité)

On utilise la description eulérienne pour caractériser notre fluide. On cherche  $u(t, x) \in \mathbb{R}^3$  le champs de vitesse de notre fluide.

Au cours du temps, la masse totale du fluide ne varie pas. On rappelle que cette masse correspond, en notant  $m$  la masse totale du fluide, à :

$$m = \int_V \rho dV$$

En d'autres termes, on a que :

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

Cette dernière équation permet d'exprimer l'équation dite de continuité, qui exprime la conservation de la masse du système.

**Proposition 1.1** (Conservation de la masse).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0$$

De plus, on fait l'hypothèse que notre fluide est incompressible. En d'autres termes,  $\rho$  ne varie pas au cours du temps, ni en espace. Cela implique que  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  et  $\nabla \rho = 0$ .

**Proposition 1.2** (Conservation de la masse et incompressibilité).

$$\operatorname{div}(u) = 0$$

*Preuve.* La conservation de la masse et l'hypothèse d'incompressibilité permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \rho &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) &= 0 \end{aligned}$$

Cette dernière formule peut se réécrire différemment :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial u_2}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \nabla \rho \cdot u &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(u) + \nabla \rho \cdot u &= 0 \end{aligned}$$

On obtient par l'incompressibilité que :

$$\rho \operatorname{div}(u) = 0$$

or  $\rho$  n'est pas nul. Cela donne :

$$\operatorname{div}(u) = 0$$

□

## b. Tenseur des contraintes

Maintenant, nous allons étudier les forces qui s'appliquent à chaque élément infinitésimal de fluide. Ces forces sont dû aux mouvements des autres particules fluides aux alentours.

On recherche alors à exprimer la contrainte qui s'applique sur notre particule fluide ; contrainte générée par les particules aux alentours, plus particulièrement aux mouvements relatifs des particules.

On note  $\Sigma_n$  la contrainte exercée sur une surface de normale  $n$ , à la position  $(x, y, z)$  sur notre surface  $S$ , avec :

$$\Sigma_n : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Cette contrainte correspond à une force sur une unité de surface (Newton/m<sup>2</sup>). Autrement dit, pour obtenir une valeur scalaire de l'intensité de cette contrainte en un point de la surface (le flux), on écrit :

$$\Theta(x, y, z) = \int_S \Sigma_n(x, y, z) \cdot n \, dS$$

Pour obtenir la force engendrée par la contrainte, on écrit donc :

$$F(x, y, z) = \int_S \Sigma_n(x, y, z) \, dS$$

Nous allons maintenant construire ce tenseur. Pour cela, on prend un cube infinitésimal de fluide, et on regarde 3 contraintes s'exerçant sur les faces du cube.

On numérote les faces de notre cube infinitésimal par les indices  $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$  (le signe - correspond à la face opposée ex: -1 est opposé à 1 etc..).

Prenons une surface du cube arbitraire, d'aire  $dS$ , par exemple d'indice 1. Sans perte de généralité, on suppose que cette surface est dans le plan engendré par les vecteurs  $e_2$  et  $e_3$  de la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Dans ce cas de figure, la normale à cette surface est le vecteur  $e_1$ .

On peut décomposer  $\Sigma_{e_1}$  en :

$$\Sigma_{e_1}(x, y, z) = \Sigma_{e_1}^1(x, y, z)e_1 + \Sigma_{e_1}^2(x, y, z)e_2 + \Sigma_{e_1}^3(x, y, z)e_3$$

La composante  $\Sigma_{e_1}^1$  correspond donc à la composante normale de la force, et les deux autres aux composantes tangentielles. On attribue la composante normale à la pression exercée par la particule voisine, et la composante tangentielle à la force de viscosité. En effet, cette dernière résulte du frottement avec une particule voisine.

Pour les autres faces -2,2 et -3,3 on obtient :

$$\Sigma_{e_2}(x, y, z) = \Sigma_{e_2}^1(x, y, z)e_1 + \Sigma_{e_2}^2(x, y, z)e_2 + \Sigma_{e_2}^3(x, y, z)e_3$$

Avec dans ce cas, la composante  $\Sigma_{e_2}^2$  désignant la composante normale.

$$\Sigma_{e_3}(x, y, z) = \Sigma_{e_3}^1(x, y, z)e_1 + \Sigma_{e_3}^2(x, y, z)e_2 + \Sigma_{e_3}^3(x, y, z)e_3$$

Avec dans ce cas, la composante  $\Sigma_{e_3}^3$  désignant la composante normale.

**Théorème 1.1 (Cauchy).** *Pour une surface  $S$  de normale  $n$  quelconque, on peut écrire son tenseur de contrainte comme combinaison linéaire des tenseurs  $\Sigma_{e_1}$ ,  $\Sigma_{e_2}$  et  $\Sigma_{e_3}$*

Avec une écriture matrice/vecteur, cela donne , pour toute surface orienté par un vecteur normal  $n$  :

$$\Sigma_n = \Sigma \cdot n = \begin{pmatrix} \Sigma_{e_1}^1 & \Sigma_{e_1}^2 & \Sigma_{e_1}^3 \\ \Sigma_{e_2}^1 & \Sigma_{e_2}^2 & \Sigma_{e_2}^3 \\ \Sigma_{e_3}^1 & \Sigma_{e_3}^2 & \Sigma_{e_3}^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Avec  $\cdot$  le produit matrice/vecteur.

On peut alléger la notation en notant par  $\sigma_{ii}$  les composantes normales et par  $\tau_{ij}$  les composantes tangentielles. Ainsi :

$$\Sigma_n = \Sigma \cdot n = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

**Théorème 1.2.** *Un tenseur d'ordre 2 peut se décomposer en une somme d'un tenseur de trace nulle et d'un tenseur sphérique.*

On applique ce théorème à notre tenseur  $\Sigma$ . Choisissons  $\alpha \in \mathbb{R}$  et posons :

$$\Sigma = \alpha I + T$$

$$\text{avec : } T = \begin{pmatrix} \sigma'_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma'_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma'_{33} \end{pmatrix}$$

$$Tr(T) = 0 \iff \sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33} = 0$$

On peut obtenir la valeur de  $\alpha$ . En effet, on a que :

$$\Sigma \cdot n = \alpha I \cdot n + T \cdot n$$

$$\iff \begin{cases} \sigma_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 &= (\alpha + \sigma'_{11})n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 \\ \tau_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \tau_{23}n_3 &= \tau_{21}n_1 + (\alpha + \sigma'_{22})n_2 + \tau_{23}n_3 \\ \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 &= \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + (\alpha + \sigma'_{33})n_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sigma_{11} &= (\alpha + \sigma'_{11}) \\ \sigma_{22} &= (\alpha + \sigma'_{22}) \\ \sigma_{33} &= (\alpha + \sigma'_{33}) \end{cases}$$

On a donc que :

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3\alpha + \sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33}$$

Or par hypothèse,  $\sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33} = 0$

Ainsi,

$$\alpha = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}Tr(\Sigma)$$

On écrit pour terminer que :

$$dF = \Sigma \cdot ndS = \frac{1}{3}Tr(\Sigma)n + T \cdot n$$

Physiquement,  $\alpha$  correspond à l'opposé de la pression règnant dans le fluide. Soit  $p(t, x, y, z)$  cette pression. On obtient :

$$\frac{dF}{dS} = \Sigma \cdot n = -pn + T \cdot n$$

### c. Tenseur de déformation

Au cours de son mouvement, la particule fluide va se retrouver déformée. Elle va subir des rotations, des élongations et des translations.

Pour représenter ces déformations, prenons comme précédemment un volume élémentaire de fluide. Le centre de cette particule est en  $(x, y, z) \in V$ . La déformation se traduit en une différence de vitesse relative entre ce centre et les faces du cube. Par exemple, la différence de vitesse entre la face de normale  $e_1$  et le centre s'écrit :

$$u(x + dx, y, z) - u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + O(dx) = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} e_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x} e_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x} e_3 \right) dx + O(dx)$$

De la même manière pour les autres directions :

$$u(x, y + dy, z) - u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial y} dy + O(dy) = \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} e_1 + \frac{\partial u_2}{\partial y} e_2 + \frac{\partial u_3}{\partial y} e_3 \right) dy + O(dy)$$

$$u(x, y, z + dz) - u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial z} dz + O(dz) = \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} e_1 + \frac{\partial u_2}{\partial z} e_2 + \frac{\partial u_3}{\partial z} e_3 \right) dz + O(dz)$$

On utilise de nouveau un tenseur pour représenter cela. On nomme ce tenseur  $D$ . Matriciellement, cela donne :

$$\begin{aligned} u(x + dx, y + dy, z + dz) &= u(x, y, z) + D \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \\ &= u(x, y, z) + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce tenseur  $G$  représente géométriquement les transformations affines subies par notre volume infinitésimal. Or, on sait qu'une homothétie de rapport  $\alpha$  selon  $e_1$ ,  $\beta$  selon  $e_2$ ,  $\gamma$  selon  $e_3$  par :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Et une rotation par une matrice antisymétrique. On va donc décomposer notre tenseur en un tenseur symétrique noté  $E$  et un tenseur antisymétrique noté  $A$ . De ce fait,  $E$  représente l'élongation / la contraction de notre élément, et la matrice  $A$  les rotations. La seule solution est d'écrire :

$$\begin{aligned} D &= E + A \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On appelle alors  $E$  le tenseur des taux de déformations pures, et  $A$  le tenseur des taux de rotations pures.

### III. Principe fondamental de la dynamique

#### a. Dans le cas général

Le principe fondamental de la dynamique donne, pour un élément fluide donné, de masse  $dm$ , de volume  $dV$ , de vitesse  $u(t,x,y,z)$ :

$$dm \frac{Du}{Dt} = \sum dF_{ext}$$

Avec  $dF_{ext}$  les forces extérieures qui agissent sur la particule de fluide.

De plus, on a que  $dm = \rho dV$ , on écrit donc :

$$\rho \frac{Du}{Dt} dV = \sum dF_{ext} \quad (1.1)$$

Nous connaissons les forces extérieures en jeu à l'aide de notre tenseur de contrainte. Il y a 3 contraintes pour les 3 directions de notre volume infinitésimal de fluide :  $\Sigma_{e_1}$ ,  $\Sigma_{e_2}$  et  $\Sigma_{e_3}$ . ce qui nous donne comme 3 forces :

$$\begin{aligned} dF_1 &= \Sigma \cdot e_1 dS_1 \\ dF_2 &= \Sigma \cdot e_2 dS_2 \\ dF_3 &= \Sigma \cdot e_3 dS_3 \end{aligned}$$

Avec  $dS_i$  la surface des faces -i et i. On remarque que ce sont des forces surfaciques et non volumiques. On obtient en intégrant (1.1) et en ajoutant ces forces :

$$\int_V \rho \frac{Du}{Dt} dV = \int_{S_1} \Sigma \cdot e_1 dS_1 + \int_{S_2} \Sigma \cdot e_2 dS_2 + \int_{S_3} \Sigma \cdot e_3 dS_3 \quad (1.2)$$

**Théorème 1.3** (Green-Ostrogradski). *Soit  $F(x, y, z) \in \mathbb{R}$ , un champs vectoriel sur un volume  $V$ . Alors on a que :*

$$\int_V \nabla \cdot F dV = \int_{\partial V} F \cdot n dS$$

Le théorème précédent va nous permettre de réécrire (1.2). En effet :

$$\int_{S_1} \Sigma \cdot e_1 dS_1 + \int_{S_2} \Sigma \cdot e_2 dS_2 + \int_{S_3} \Sigma \cdot e_3 dS_3 = \int_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \Sigma \cdot (e_1 + e_2 + e_3) dS$$

Dans ce cas, on a que  $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \partial V$ , et donc par Green-Ostrogradski :

$$\begin{aligned} \int_V \rho \frac{Du}{Dt} dV &= \int_V \nabla \cdot \Sigma dV \\ &= \int_V -\nabla p + \nabla \cdot T dV \end{aligned}$$

On obtient donc la relation locale :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \nabla \cdot T$$

Bien entendu, on peut adjoindre au principe fondamental de la dynamique une force extérieure  $f \in \mathbb{R}^3$ , et on a :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \nabla \cdot T + f$$

On appelle cette dernière équation l'équation fondamentale de la dynamique des fluides.

## b. Equations de Navier-Stokes incompressibles

On rappelle que dans le cas des équations de Navier-Stokes incompressibles, on a la conservation de la masse qui donne :

$$\operatorname{div}(u) = 0$$

De plus, on fait l'hypothèse que notre fluide est un fluide Newtonien, c'est à dire que les contraintes subies par les particules fluides sont proportionnelles aux déformations pures. Mathématiquement et physiquement, cela s'écrit :

$$\exists \nu \in \mathbb{R} \mid T = 2\nu E$$

Le scalaire  $\nu$  s'appelle la viscosité dynamique du fluide. On peut transformer l'équation fondamentale de la dynamique des fluides grâce à cette condition. Par le calcul, on a que :

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{2} \nabla (\operatorname{div}(u)) + \Delta u$$

Or,  $\operatorname{div}(u) = 0$ , on a que :

$$\nabla \cdot T = 2\nu \nabla \cdot E = \nu \Delta u$$

Les équations de Navier-Stokes incompressibles sont donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \nu \Delta u + f \\ \operatorname{div}(u) = 0 \end{cases}$$



# Chapitre 2

## Equation de la chaleur

Dans le chapitre précédent, nous avons établis les équations de Navier Stokes avec l'hypothèse d'incompressibilité. Avant d'aller plus loin, nous avons besoin de définir plusieurs outils mathématiques, en particulier pour mettre sous une autre forme les équations de Navier Stokes et y associer notre modèle probabiliste. Ainsi, nous travaillons d'abord sur les équations de la chaleur car nous les avons déjà abordées en cours.

### I. Positionnement du problème

Dans un premier temps, on introduit notre objet d'étude: les équations de la chaleur en dimension quelconque.

Soit  $T \in \mathbb{R}_+$ ,  $\kappa > 0$ ,  $f : [0, T[ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  fixé.

On cherche  $u(t, x) \in \mathbb{R}$  où  $u : [0, T[ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u + f \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (2.1)$$

La fonction  $u$  représente la température dans  $\mathbb{R}^n$ , au temps  $t$ . La fonction  $f$  donne les éventuelles sources de chaleur et le scalaire  $\kappa$  représente le coefficient de diffusion de la chaleur dans le matériau.

### II. Équation de la chaleur en dimension 1

#### a. Solution classique sur $\mathbb{R}$

Dans une première partie l'équation de la chaleur en dimension 1 est étudié.

On reprend l'équation (2.1) que l'on réadapte en 1 dimension:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) & (t, x) \in ]0, T[ \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (2.2)$$

On définit l'espace fonctionnel suivant :

**Définition 2.1.** Soit  $u \in L^2(0, T, H^k(\mathbb{R}))$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ fixé } u : t \rightarrow u(t, x), \in L^2(0, T)$$

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ fixé } u : x \rightarrow u(t, x), \in H^k(\mathbb{R})$$

Supposons ici que  $u, u_0 \in H^2(\mathbb{R})$  afin que (2.2) ait un sens. On réécrit l'équation de départ pour éliminer la dérivée en temps. Pour cela, on fait appel à la proposition suivante :

**Proposition 2.1.** *Soit  $f, g \in H^1([0, T])$  tel que  $g' = f$  (au sens faible). Alors, on a :*

$$\forall t \in [0, T] \quad g(t) = g(0) + \int_0^t f(s) ds$$

Appliquons cette proposition à notre équation de départ.(2.2)  
Pour simplifier nos équations, on utilise par la suite la notation suivante:  $u(t, x) = u_t(x)$ .

$$u_t(x) = u_0(x) + \int_0^t \left( \kappa \frac{\partial^2 u_s(x)}{\partial x^2} + f_s(x) \right) ds \quad (2.3)$$

**Définition 2.2** (Transformée de Fourier, cas en dimension n quelconque).  
*Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . La transformée de Fourier de  $f$  est défini par:*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx$$

**Définition 2.3** (Transformée de Fourier inverse en dimension n).  
*On définit la transformée de Fourier inverse d'une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  par :*

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

**Théorème 2.1** (Plancherel). *La transformée de Fourier s'étend aux fonctions  $L^2(\mathbb{R}^n)$  :*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ \tilde{\mathcal{F}}(f) &= \hat{f} \end{aligned}$$

De plus, on a l'égalité suivante:

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$$

**Théorème 2.2** (Formule de Parseval). *Soient  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  alors:*

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \quad (2.4)$$

Appliquons la transformée de Fourier à notre équation(2.3). On obtient par interversion des intégrales:

$$\hat{u}_t(\xi) = \hat{u}_0(\xi) + \int_0^t \left( \kappa \frac{\widehat{\partial^2 u_s}}{\partial x^2}(\xi) + \hat{f}_s(\xi) \right) ds \quad (2.5)$$

**Proposition 2.2.** *Soit  $f \in H^2(\mathbb{R})$ , alors :*

$$\frac{\widehat{\partial f}}{\partial x}(\xi) = i\xi \hat{f}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

De même :

$$\frac{\widehat{\partial^2 f}}{\partial x^2}(\xi) = -\xi^2 \hat{f}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

*Preuve.*

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x}(x) e^{-i\xi x} dx$$

Comme  $f \in H^2(\mathbb{R})$ , elle possède des dérivées faibles. Ainsi par définition:

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial f}{\partial x}}(\xi) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\partial e^{-i\xi x}}{\partial x} dx \\ &= -(-i\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= i\xi \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

De la même manière, on a:

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= (i\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x}(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= (i\xi)(i\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= -\xi^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= -\xi^2 \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

□

La proposition (1.2) nous permet de réécrire le problème original en une équation différentielle ordinaire.

**Proposition 2.3.** *Soit  $u \in L^2(0, T, H^2(\mathbb{R}))$  solution du problème (2.1). Alors  $u$  est solution de l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 1 :*

$$\frac{\partial \hat{u}_t}{\partial t}(\xi) = -\xi^2 \kappa \hat{u}_s(\xi) + \hat{f}_s(\xi)$$

*Preuve.* On peut éliminer la dérivée de la (2.5) :

$$\hat{u}_t(\xi) = \hat{u}_0(\xi) + \int_0^t \left( -\xi^2 \kappa \hat{u}_s(\xi) + \hat{f}_s(\xi) \right) ds$$

Par la proposition (1.1), on retrouve l'expression d'une équation différentielle ordinaire, linéaire d'ordre 1. □

La résolution de cette EDO est possible, on peut exhiber la solution du problème original. Cette équation a pour solution homogène :

$$\hat{u}_t(\xi)_h = C e^{-\kappa \xi^2 t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

On utilise la méthode de la variation de la constante pour obtenir une solution particulière :

$$\hat{u}_t(\xi)_p = \int_0^t \hat{f}_s(\xi) e^{\kappa \xi^2 s} ds e^{-\kappa \xi^2 t}$$

Ainsi, en prenant en compte la condition initiale du problème, la solution globale de (2.3) est :

$$\hat{u}_t(\xi) = \hat{u}_0(\xi) e^{-\kappa \xi^2 t} + \int_0^t \hat{f}_s(\xi) e^{\kappa \xi^2 s} ds e^{-\kappa \xi^2 t} \quad (2.6)$$

$$\hat{u}_t(\xi) = (\hat{u}_0(\xi) + \int_0^t \hat{f}_s(\xi) e^{\kappa \xi^2 s} ds) e^{-\kappa \xi^2 t} \quad (2.7)$$

$$\hat{u}_t(\xi) = (\hat{u}_0(\xi) + \hat{\Phi}_t(\xi)) e^{-\kappa \xi^2 t} \quad (2.8)$$

avec  $\hat{\Phi}_t(\xi) = \int_0^t \hat{f}_s(\xi) e^{\kappa \xi^2 s} ds$

On applique la transformée de Fourier inverse à la solution obtenue :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_t(\xi) e^{i\xi x} d\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\hat{u}_0(\xi) + \hat{\Phi}_t(\xi)) e^{-\kappa \xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi \\ u_t(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} u_0(y) e^{-i\xi y} dy + \int_{\mathbb{R}} \Phi_t(y) e^{-i\xi y} dy \right) e^{-\kappa \xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} (u_0(y) + \Phi_t(y)) e^{-i\xi y} dy \right) e^{-\kappa \xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (u_0(y) + \Phi_t(y)) \int_{\mathbb{R}} e^{-\kappa \xi^2 t} e^{i\xi(x-y)} d\xi dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (u_0(y) + \Phi_t(y)) \left( \frac{\pi}{\kappa t} \right)^{1/2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy \\ u_t(x) &= \int_{\mathbb{R}} (u_0(y) + \Phi_t(y)) \left( \frac{1}{4\kappa t} \right)^{1/2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy \end{aligned}$$

On retrouve l'expression d'un produit de convolution (noté \* ci-après). On note:

$$H(t, z) = \left( \frac{1}{4\kappa t} \right)^{1/2} e^{-\frac{z^2}{4t}}$$

le noyau de Green. On a:

$$u_t(x) = (H * (u_0 + \Phi_t))(t, x) \quad (2.9)$$

## b. Résolution sur (0,1) - Séries de Fourier

On se restreint maintenant au domaine ouvert borné (0,1). Cette restriction va nous permettre d'utiliser les séries de Fourier. Auparavant, il nous faut rajouter des conditions aux limites à notre problème qui soient périodiques.

Soit  $u : [0, T] \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u + f \\ u(0, x) = u_0(x) \\ u(1) = u(0) = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

On prolonge  $u(t, x)$  par imparité sur  $[-1, 1]$  (en espace,  $\forall t \in [0, T]$ ).  $u(t, \cdot)$  est donc 2-périodique sur cet intervalle.

On suppose tout d'abord que  $u \in L^2(0, T; H_0^1((0, 1)))$ .

La plupart des résultats obtenus dans la partie précédente sont valables sur  $(0, 1)$ . En effet, dans la partie précédente, pour justifier les intégrations par parties, on utilisait la définition de la dérivée faible, car nous étions sur  $\mathbb{R}$  tout entier. Ici, comme nous sommes restreint à  $(0, 1)$ , nous utiliserons la proposition suivante :

**Proposition 2.4.** *Soit  $f, g \in H_0^2(0, 1)$ .*

$$\int_0^1 f g' = - \int_0^1 f' g$$

et

$$\int_0^1 f g'' = \int_0^1 f'' g$$

**Définition 2.4** (Série de Fourier). *Soit  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction 2-périodique. Alors, soit la série de Fourier  $S(f)$  associée à  $f$  :*

$$S(f)(x) = f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f) e^{2\pi i \frac{m}{2} x}$$

avec les coefficients de Fourier :

$$c_m(f) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i \frac{m}{2} x}$$

L'expression (2.6) obtenue précédemment est donc valide dans notre cas. Si on multiplie l'expression par  $\frac{1}{2}$  et qu'on l'intègre, on obtient une E.D.O mettant en jeu les coefficients de Fourier de  $u$  :

$$c_m(u) = (c_m(u_0) + c_m(\Phi_t)) e^{-\kappa \xi^2 t} \quad (2.11)$$

### III. Equation de la chaleur en dimension n

Nous travaillons maintenant en dimension n quelconque. Il s'agit de réaliser une démarche similaire à celle que nous allons appliquer aux équations de Navier-Stokes dans le chapitre suivant.

#### a. Formulation faible

On suppose tout d'abord que  $u \in L^2(0, T; H^2(\mathbb{R}^n))$  et  $f \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ . Soit  $h(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  indépendante du temps.

**Définition 2.5.** On définit le produit scalaire hermitien sur  $L^2(\mathbb{C}^n)$  :  $\forall f, g \in L^2(\mathbb{C}^n)$

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{C}^n} f \cdot \bar{g}$$

Cette intégrale est bien définie par Hölder. On a que  $\forall f, g \in L^2(\mathbb{C}^n)$ :

$$\int_{\mathbb{C}^n} f \cdot \bar{g} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{C}^n)} \|g\|_{L^2(\mathbb{C}^n)} < \infty$$

Pour obtenir la formulation faible du problème (2.1), on multiplie (2.1) par h et on intègre sur  $\mathbb{R}^n$ . Cherchons alors  $u \in L^2(0, T; H^2(\mathbb{R}^n))$  tel que :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot h = \int_{\mathbb{R}^n} \kappa \Delta u \cdot h + \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot h \quad (2.12)$$

Ainsi, on peut passer du problème initial (2.1) au problème (2.12) et inversement grâce à la proposition suivante :

**Proposition 2.5.** Si  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , et  $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  alors on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot h = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ presque partout avec } x \in \mathbb{R}^n$$

Or,  $L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ . Ainsi, si on choisit  $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  (ce que l'on peut faire car  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset H^2(\mathbb{R}^n)$ ), on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u + f \text{ p.p } \forall x \in \mathbb{R}^n$$

On pose maintenant  $u_t(x) = u(t, x)$ . Par le théorème fondamental de l'analyse pour (2.12), on a:

$$\int_0^t \frac{\partial u_s}{\partial t} ds = u_t(x) - u_0(x) \forall t \in [0, T[$$

Alors, par l'application à (2.12) :

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_t \cdot h dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_0 \cdot h dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \kappa \Delta u_s \cdot h + f_s \cdot h dx ds \quad \forall t \in [0, T[ \quad (2.13)$$

Comme  $u, h \in H^2(\mathbb{R}^n)$  (en fixant le temps), elles admettent des dérivées faibles en espace, on peut écrire :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u_s \cdot h dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_s \cdot \nabla h dx$$

On a donc :

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_t \cdot h dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_0 \cdot h dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} -\kappa \nabla u_s \cdot \nabla h ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f_s \cdot h dx ds \quad \forall t \in [0, T[ \quad (2.14)$$

C'est une formulation variationnelle du problème de départ.

## b. Application de la transformée de Fourier

On revient à la formulation variationnelle du problème (2.1). On utilise une nouvelle fois la formule de Green :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla h = - \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \Delta h \quad (2.15)$$

Par conséquent, on obtient la formulation :

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_t \cdot h = \int_{\mathbb{R}^n} u_0 \cdot h + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \kappa u_s \cdot \Delta h ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f_s \cdot h dx ds \quad \forall t \in [0, T[ \quad (2.16)$$

Cette formulation peut être réécrite à l'aide du produit scalaire :

$$\langle u_t, h \rangle = \langle u_0, h \rangle + \int_0^t \kappa \langle u_s, \Delta h \rangle + \langle f_s, h \rangle ds \quad \forall t \in [0, T[ \quad (2.17)$$

Ainsi, grâce à (2.4), on peut transformer (2.17) en :

$$\langle \hat{u}_t, \hat{h} \rangle = \langle \hat{u}_0, \hat{h} \rangle + \int_0^t \kappa \langle \hat{u}_s, \hat{\Delta} h \rangle + \langle \hat{f}_s, \hat{h} \rangle ds \quad \forall t \in [0, T[ \quad (2.18)$$

Or, on a que :

$$\begin{aligned} \langle \hat{u}_s, \hat{\Delta} h \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_s(\xi) \sum_{k=1}^n \frac{\widehat{\partial^2 h}}{\partial x_k^2}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_s \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_k^2}(x) e^{-i\xi \cdot x} dx d\xi \end{aligned}$$

$\forall k \in \{1, \dots, n\}$ , par intégration par parties successives :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_k^2}(x) e^{-i\xi \cdot x} dx &= - \int_{\mathbb{R}^n} -i\xi_k \frac{\partial h}{\partial x_k}(x) \cdot e^{-i\xi \cdot x} dx \\ &= i\xi_k \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial h}{\partial x_k}(x) \cdot e^{-i\xi \cdot x} dx \\ &= i\xi_k \left( -i\xi_k \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \cdot e^{-i\xi \cdot x} dx \right) \\ &= -\xi_k^2 \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \cdot e^{-i\xi \cdot x} dx \\ &= -\sqrt{2\pi}^n \xi_k^2 \hat{h}(\xi) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\langle \hat{u}_s, \hat{\Delta} h \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_s(\xi) \sum_{k=1}^n -\xi_k^2 \hat{h}(\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_s(\xi) \hat{h}(\xi) \sum_{k=1}^n -\xi_k^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} -|\xi|^2 \hat{u}_s(\xi) \hat{h}(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

$$\langle \hat{u}_s, \hat{\Delta} h \rangle = \langle -|\xi|^2 \hat{u}_s, \hat{h} \rangle = \langle \hat{u}_s, -|\xi|^2 \hat{h} \rangle$$

On obtient :

$$\langle \hat{u}_t, \hat{h} \rangle = \langle \hat{u}_0, \hat{h} \rangle + \int_0^t -\kappa \langle |\xi|^2 \hat{u}_s, \hat{h} \rangle + \langle \hat{f}_s, \hat{h} \rangle ds \quad \forall t \in [0, T[$$

On applique maintenant la proposition 2.5 :

$$\hat{u}_t(\xi) = \hat{u}_0(\xi) + \int_0^t -\kappa |\xi|^2 \hat{u}_s(\xi) + \hat{f}_s(\xi) ds \quad \text{p.p } \xi \quad \forall t \in [0, T[$$

On relie cette équation à l'EDO linéaire du premier ordre :

$$\hat{u}'_t(\xi) = -\kappa |\xi|^2 \hat{u}_t(\xi) + \hat{f}_t(\xi) \quad \text{p.p } \xi \quad \forall t \in [0, T[$$

Cette EDO a pour équation homogène :

$$\hat{u}'_t(\xi) = -\kappa |\xi|^2 \hat{u}_t(\xi) \quad \text{p.p } \xi \quad \forall t \in [0, T[$$

Qui a pour solution :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\hat{u}'_t(\xi)}{\hat{u}_t(\xi)} dt &= \int -\kappa |\xi|^2 dt \quad \text{p.p } \xi \quad \forall t \in [0, T[ \\
\ln \hat{u}_t(\xi) &= -\kappa |\xi|^2 t + K_1, \quad K_1 \in \mathbb{R} \\
\hat{u}_t(\xi)_{\text{homo}} &= K e^{-\kappa |\xi|^2 t}, \quad K \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Par la méthode de variations des constantes on obtient la solution globale :

$$\hat{u}_t(\xi) = K e^{-\kappa |\xi|^2 t} + \int \hat{f}_t(\xi) e^{\kappa |\xi|^2 t} dt e^{-\kappa |\xi|^2 t} \quad \text{p.p } \xi \quad \forall t \in [0, T[$$

Or on connaît  $\hat{u}_t$  au temps  $t = 0$  donc en notant  $\hat{\Phi}_t(\xi) = \int \hat{f}_t(\xi) e^{\kappa |\xi|^2 t} dt$ :

$$\hat{u}_t(\xi) = \hat{u}_0(\xi) e^{-\kappa |\xi|^2 t} + \hat{\Phi}_t(\xi) e^{-\kappa |\xi|^2 t} \quad \text{p.p } \xi \quad \forall t \in [0, T[ \quad (2.19)$$

$$= (\hat{u}_0(\xi) + \hat{\Phi}_t(\xi)) e^{-\kappa |\xi|^2 t} \quad \text{p.p } \xi \quad \forall t \in [0, T[ \quad (2.20)$$



### c. Résolution exacte

On peut exhiber la solution de (2.19) :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_t(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{u}_0(\xi) + \hat{\Phi}_t(\xi)) e^{-\kappa|\xi|^2 t} e^{i\xi \cdot x} d\xi \\
u_t(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(z) + \Phi_t(z)) e^{-i\xi \cdot z} dz e^{-\kappa|\xi|^2 t} e^{i\xi \cdot x} d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(z) + \Phi_t(z)) e^{i\xi \cdot (x-z)} e^{-\kappa|\xi|^2 t} dz d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(z) + \Phi_t(z)) \left( \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\kappa|\xi|^2 t} e^{i\xi \cdot (x-z)} d\xi \right) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(z) + \Phi_t(z)) \left( \frac{\kappa}{4\pi t} \right)^{n/2} e^{-\frac{\kappa|x-z|^2}{4t}} dz \\
u_t(x) &= (H * (u_0 + \Phi_t))(t, x)
\end{aligned}$$

H désigne le noyau de Green définit comme suit :

$$H(t, x) = \left( \frac{\kappa}{4\pi t} \right)^{n/2} e^{-\frac{\kappa|x|^2}{4t}}$$

## Chapitre 3

# Etude théorique des équations de Navier-Stokes incompressibles

Après avoir fait l'étude des équations de la chaleur et en particulier la résolution en passant par la formulation variationnelle, on va dans ce chapitre effectuer la même démarche pour réussir à obtenir la forme d'équation voulue pour y associer les processus probabilistes.

### I. Reformulation des équations

#### a. Formulation variationnelle

On cherche à obtenir la formulation faible de l'E.D.P suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u - u \cdot \nabla u - \nabla p + f \quad \forall (t, x) \in [0, T[ \times \mathbb{R}^3 \\ u(0, x) = u_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

On introduit les espaces fonctionnels suivants:

**Définition 3.1.**

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \{g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)^3, \operatorname{div} g = 0\} \\ H &= \operatorname{adh}_{L^2(\mathbb{R}^3)^3}(\mathbf{V}) \\ V &= \operatorname{adh}_{H^1(\mathbb{R}^3)^3}(\mathbf{V}) \end{aligned}$$

On note  $u^l$ , la  $l$ -ième composante de  $u$ . Dans un premier temps, on suppose que  $u \in L^2(0, T; H^2(\mathbb{R}^3)^3)$ .

**Définition 3.2.**  $\mathbf{V}$ ,  $H$ ,  $V$  sont des espaces de Hilbert, munis du produit scalaire suivant.

$\forall f, g \in \mathbf{V} \cup H \cup V$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^3 \int f^i \bar{g}^i$$

On utilise cette notation pour l'utilisation de ce produit scalaire à des fonctions à valeurs complexes.

**Définition 3.3.** Soit  $(f, g) \in (\mathbb{C}^3)^2$ , on définit le produit scalaire par:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^3 f_i \bar{g}_i$$

**Définition 3.4** (Convention de sommation d'Einstein).

La convention de Einstein permet de simplifier les notations. On a :

$$u_i v^i = \sum_{i=1}^3 u_i v^i$$

**Proposition 3.1** (Formulation variationnelle).

Soit  $u$  solution de (3.1), alors  $u$  est solution de l'équation :

$$\langle u_t, g \rangle = \langle u_0, g \rangle + \int_0^t \nu \langle u_s, \Delta g \rangle + \langle u_s, u_s \nabla g \rangle + \langle f_s, g \rangle ds \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall g \in \mathbf{V}$$

*Preuve.* On décompose notre équation (3.1) en trois sous équations. Pour tout  $l \in \{1, 2, 3\}$ :

$$\frac{\partial u^l}{\partial t} = \nu \Delta u^l - (u \cdot \nabla u)^l - (\nabla p)^l + f^l$$

Soit  $g \in \mathbf{V}$ , indépendante du temps. On multiplie par  $g$ , puis on intègre sur  $\mathbb{R}^3$  :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u^l}{\partial t} g^l = \int_{\mathbb{R}^3} \nu \Delta u^l g^l - \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla u)^l g^l - \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla p)^l g^l + \int_{\mathbb{R}^3} f^l g^l$$

Avec les hypothèses sur  $u$  et  $g$ , on applique la dérivée faible sur chacun des termes à droite de l'égalité contenant un opérateur dérivé :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u^l}{\partial t} g^l = \int_{\mathbb{R}^3} \nu u^l \Delta g^l + \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla u)^l g^l + \int_{\mathbb{R}^3} f^l g^l$$

**Théorème 3.1** (Formule de Green).

Soit  $u$  une fonction à valeurs scalaires, et  $v$  une fonction à valeurs vectorielles sur le domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$  et  $n(x)$  sa normale extérieure. On a :

$$\int_{\Omega} u(x) \operatorname{div}(v(x)) d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot v(x) d\Omega + \int_{\partial\Omega} v(x) \cdot n u(x) d\sigma$$

A partir de ce théorème, on peut montrer que le terme  $\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla p)^l g^l$  s'annule.  $p$  étant une fonction scalaire,  $g$  étant une fonction à continue à valeurs compactes, elle s'annule sur les bords. On a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla p)^l g^l &= - \int_{\mathbb{R}^3} p^l \operatorname{div} g^l \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le terme de droite étant nul car  $\operatorname{div} g = 0$ .

Regardons un peu plus en détail  $u \cdot \nabla u$ . On a par définition :

$$(u \cdot \nabla u)^l = \sum_{i=1}^3 u_i \left( \frac{\partial u^l}{\partial x_i} \right)$$

On applique la formule de Green:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} (u \cdot \nabla u)^l g^l dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^3 u_i \left( \frac{\partial u^l}{\partial x_i} \right) g^l dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^3 u_i u^l \frac{\partial g^l}{\partial x_i} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} u^l \cdot u^l \nabla g^l dx \end{aligned}$$

On applique la proposition ((??)) :

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_t^l g^l = \int_{\mathbb{R}^3} u_0^l g^l + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \nu u_s^l \Delta g^l + u_s^l \cdot u_s^l \nabla g^l + f_s^l g^l dx ds \quad \forall t \in [0, T]$$

En utilisant la définition du produit scalaire, on obtient le résultat. □

## b. Application de la transformée de Fourier

Dans cette partie on va à partir de la formulation variationnelle obtenir une nouvelle forme de l'équation. C'est à cette nouvelle forme que l'on associera par la suite un processus de branchement. Avant toute chose, on définit les opérations suivantes:

**Définition 3.5.** Soit  $w_1(\xi), w_2(\xi)$  deux applications de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  dans  $\mathbb{C}^3$ . L'opérateur  $\circ$  est défini par:

$$w_1 \circ w_2(\xi) = -\frac{i}{\pi^3} \int (w_1(\xi_1) \cdot e_\xi) p(\xi) w_2(\xi - \xi_1) \frac{|\xi| d\xi_1}{|\xi_1|^2 |\xi - \xi_1|^2}$$

Où:  $q, q' \in \mathbb{C}^3$ ,  $q \cdot q' = \sum_{i=1}^3 q_i \bar{q}'_i$ ;  $e_\xi = \xi / |\xi|$  et:

$$p(\xi)q = q - e_\xi(w \cdot e_\xi), \quad q \in \mathbb{C}^3$$

A partir de notre formulation variationnelle, on cherche à obtenir une équation équivalente en utilisant la transformée de Fourier. On s'appuie pour cela sur la proposition suivante:

**Proposition 3.2.** Soit  $f \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^3)^3)$ , alors on peut choisir  $\hat{f}_s(\xi)$  mesurable telle que:

$$\int_0^T \int (1 + |\xi|^2)^{-1} |\hat{f}_s(\xi)|^2 d\xi ds < \infty$$

$$\hat{f}_s(\xi) \cdot \xi = 0, \quad \hat{f}_s(-\xi) = \overline{\hat{f}_s(\xi)}, \quad 0 \leq s \leq T, \quad \xi \in \mathbb{R}^3$$

*Preuve.* Soit  $f$  dans les hypothèses de la proposition. Alors, on a :

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} < +\infty \iff \int_{\mathbb{R}^3} (f_s + \nabla f_s) dx < +\infty$$

Par passage avec la transformée de Fourier, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} (\widehat{f}_s + \widehat{\nabla f}_s) d\xi &< +\infty \\
\int_{\mathbb{R}^3} (\widehat{f}_s - i\xi \widehat{f}_s) d\xi &< +\infty \\
\int_{\mathbb{R}^3} (1 - i\xi) \widehat{f}_s d\xi &< +\infty
\end{aligned}$$

De ce fait, par passage à la norme, on a que :

$$\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2) \widehat{f}_s d\xi < +\infty$$

□

**Proposition 3.3.** *Soit  $u' \in L^1(0, T; V')$ , on peut trouver une fonction  $\hat{u}_s(\xi)$  continue tel que:*

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int (1 + |\xi|^2) |\hat{u}_s(\xi)|^2 d\xi ds &< \infty \\
\hat{u}_s(\xi) \cdot \xi &= 0, \quad \hat{u}_s(-\xi) = \overline{\hat{u}_s(\xi)}, \quad 0 \leq s \leq T, \quad \xi \in \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

**Proposition 3.4.** *Soit  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Alors,*

$$\widehat{fg}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} (\widehat{f} * \widehat{g})(\xi)$$

et  $\widehat{f}$  et  $\widehat{g}$  appartiennent à  $L^1(\mathbb{R}^n)$

**Proposition 3.5.** *Soit  $u \in L^2(0, T; H^2(\mathbb{R}^3)^3)$ , alors*

$$\int_0^t \langle \widehat{u}_s, \widehat{u}_s \widehat{\nabla g} \rangle ds = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \int \widehat{u}_s^l(\xi) \overline{\widehat{u}_s^k(\xi - \xi')} (-i\xi_k' \widehat{g}^l(\xi')) d\xi d\xi' ds \quad \forall g \in V$$

*Preuve.*

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_s \widehat{\nabla g}(\xi) &= \sum_{k=1}^3 \widehat{u}_s^k \cdot \widehat{\nabla g^k}(\xi) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{k=1}^3 \widehat{u}_s^k * \widehat{\nabla g^k}(\xi) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{k=1}^3 \widehat{u}_s^k(\xi - \xi') \widehat{\nabla g^k}(\xi') d\xi' \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{k=1}^3 \widehat{u}_s^k(\xi - \xi') (i\xi_k' \widehat{g}^k(\xi')) d\xi'
\end{aligned}$$

La dernière égalité étant du au fait que (voir partie équation de la chaleur pour la démonstration) :

$$\widehat{\nabla g^k}(\xi') = i\xi_k' \widehat{g}^k(\xi')$$

En développant le produit scalaire, on peut continuer par:

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{u}_s, \widehat{u}_s \nabla g \rangle &= \sum_{l=1}^3 \int \widehat{u}_s^l \overline{\widehat{u}_s \nabla g}^l d\xi \\
&= \sum_{l=1}^3 \int \widehat{u}_s^l \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \overline{\int \sum_{k=1}^3 \widehat{u}_s^k(\xi - \xi') (i\xi_k \widehat{g}^k(\xi')) d\xi'} d\xi \\
&= \sum_{l=1}^3 \int \widehat{u}_s^l \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{k=1}^3 \overline{\widehat{u}_s^k(\xi - \xi') (i\xi_k \widehat{g}^k(\xi'))} d\xi' d\xi \\
&= \sum_{l=1}^3 \int \widehat{u}_s^l \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{k=1}^3 \overline{\widehat{u}_s^k(\xi - \xi') (-i\xi_k \widehat{g}^k(\xi'))} d\xi' d\xi
\end{aligned}$$

Si on enlève les conventions d'Einstein (définition (cse)), on obtient ce que l'on cherche.  $\square$

Les propositions précédentes permettent d'énoncer la proposition suivante :

**Proposition 3.6.** *Soit  $u$  solution de la formulation faible du problème. Alors  $u$  est solution de l'équation :*

$$\langle \widehat{u}_t, \widehat{g} \rangle = \langle \widehat{u}_0, \widehat{g} \rangle + \int_0^t -\nu \langle |\xi|^2 \widehat{u}_s, \widehat{g} \rangle + \langle \widehat{f}_s, \widehat{g} \rangle ds + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \int \widehat{u}_s^l(\xi) \overline{\widehat{u}_s^k(\xi - \xi')} (-i\xi_k \widehat{g}^l(\xi')) d\xi d\xi' ds \quad \forall g \in V$$

Regardons un peu plus en détail l'équation obtenue, particulièrement les différents éléments présents sous l'intégrale. Le changement effectué sur le premier membre a déjà été effectué dans le cas de l'équation de la chaleur fait précédemment:

$$\nu \langle \widehat{u}_s, \widehat{\Delta} g \rangle = \nu \langle \widehat{u}_s, -|\xi|^2 \widehat{g} \rangle = \nu \langle -|\xi|^2 \widehat{u}_s, \widehat{g} \rangle$$

*Preuve.* Le cas de  $\langle \widehat{u}_s, \widehat{u}_s \nabla g \rangle$  est traité dans la proposition précédente.  $\square$

La proposition suivante donne une forme allégée de l'élément de droite de la proposition 5.

**Proposition 3.7.**

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \int \widehat{u}_s^l(\xi) \overline{\widehat{u}_s^k(\xi - \xi')} (-i\xi_k \widehat{g}^l(\xi')) d\xi d\xi' ds = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \langle \xi_k (\widehat{u}_s^k * \widehat{u}_s), \widehat{g} \rangle ds$$

*Preuve.* Partons de l'élément de droite pour prouver cette égalité. Dans un premier temps par soucis d'écriture (convention de Einstein), on écrit:

$$-\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \langle \xi_k (\widehat{u}_s^k * \widehat{u}_s), \widehat{g} \rangle ds = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \left\langle \sum_{k=1}^3 \xi_k (\widehat{u}_s^k * \widehat{u}_s), \widehat{g} \right\rangle ds$$

Pour éviter de conserver la somme dans la suite des calculs, on gardera la convention d'Einstein. En utilisant les propriétés de la proposition (3.3) :  $\widehat{u}_s(-\xi) = \overline{\widehat{u}_s(\xi)}$ . Et à partir de la définition du

produit de convolution et du produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \langle \xi_k (\widehat{u}_s^k * \widehat{u}_s), \widehat{g} \rangle ds &= -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \langle \xi_k \int \widehat{u}_s^k(\xi - \xi') \widehat{u}_s(\xi') d\xi', \widehat{g} \rangle ds \\
&= -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \sum_{l=1}^3 \int (\xi_k \int \widehat{u}_s^k(\xi - \xi') \widehat{u}_s(\xi') d\xi')^l \widehat{g}(\xi)^l d\xi ds \\
&= -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \sum_{l=1}^3 \int (\xi_k \int \widehat{u}_s^k(\xi' - \xi) \widehat{u}_s(\xi') d\xi')^l \widehat{g}(\xi)^l d\xi ds \\
&= -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \sum_{l=1}^3 \int \int \xi_k \widehat{u}_s^k(\xi' - \xi) \widehat{u}_s^l(\xi') \widehat{g}(\xi)^l d\xi' d\xi ds
\end{aligned}$$

Par soucis d'écriture, on peut inverser  $\xi$  et  $\xi'$  (meilleure compréhension du résultat). Détail: Ici on change uniquement de notation.

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \sum_{l=1}^3 \int \int \xi_k \widehat{u}_s^k(\xi' - \xi) \widehat{u}_s^l(\xi') \widehat{g}(\xi)^l d\xi' d\xi ds &= -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \sum_{l=1}^3 \int \int \xi_k \widehat{u}_s^k(\xi - \xi') \widehat{u}_s^l(\xi) \widehat{g}(\xi')^l d\xi d\xi' ds \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \int \widehat{u}_s^l(\xi) \widehat{u}_s^k(\xi - \xi') (-i \xi_k \widehat{g}^l(\xi')) d\xi d\xi' ds
\end{aligned}$$

On obtient bien ce qu'il fallait montrer. □

On a obtenu une forme plus allégée. On définit maintenant plusieurs nouvelles égalités:

**Définition 3.6.** On définit  $\chi_t(\xi)$  tel que  $t \in [0, T]$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^3$ , continue en  $t$  et mesurable en  $\xi$ :

$$\chi_t(\xi) = \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} |\xi|^2 \widehat{u}_t(\xi)$$

Les propriétés suivantes sont liées aux propriétés sur  $\widehat{u}_t$

$$\chi_t(\xi) \cdot \xi = 0 ; \quad \chi_t(-\xi) = \overline{\chi_t(\xi)}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

**Proposition 3.8.**

$$-\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \langle \xi_k (\widehat{u}_s^k * \widehat{u}_s), \widehat{g} \rangle = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{1}{2} \langle \chi_s \circ \chi_s, \widehat{g} \rangle ds$$

*Preuve.* Par définition, on a:

$$\chi_s \circ \chi_s(\xi) = -\frac{i}{\pi^3} \int (\chi_s(\xi_1) \cdot e_\xi) p(\xi) \chi_s(\xi - \xi_1) \frac{|\xi| d\xi_1}{|\xi_1|^2 |\xi - \xi_1|^2}$$

**Lemme 3.1.**

$$p(\xi) \chi_s(\xi - \xi_1) = \chi_s(\xi - \xi_1)$$

*Preuve.* Par définition, on sait que:

$$p(\xi)\chi_s(\xi - \xi_1) = \chi_s(\xi - \xi_1) - e_\xi(\chi_s(\xi - \xi_1) \cdot e_\xi)$$

On sait que:  $\widehat{u}_s(\xi) \cdot \xi = 0$ . On a donc:

$$\chi_s(\xi - \xi_1) \cdot e_\xi = \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} |\xi - \xi_1|^2 \widehat{u}_s(\xi - \xi_1) \cdot \frac{\xi}{|\xi|} = 0$$

□

On developpe en utilisant la définition de  $\chi_s$ .

$$\begin{aligned} \chi_s(\xi_1) \cdot e_\xi &= \chi_s(\xi_1) \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \\ &= \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} |\xi_1|^2 \widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \\ &= \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{|\xi_1|^2}{|\xi|} \widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_s(\xi_1) \cdot e_\xi \cdot \chi_s(\xi - \xi_1) &= \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} |\xi_1|^2 \left( \widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \right) \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} |\xi - \xi_1|^2 \widehat{u}_s(\xi - \xi_1) \\ &= \frac{\pi^3}{\nu^2 \cdot 2} |\xi_1|^2 |\xi - \xi_1|^2 \frac{1}{|\xi|} (\widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \xi) \cdot \widehat{u}_s(\xi - \xi_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_s \circ \chi_s(\xi) &= -\frac{i}{\pi^3} \int (\chi_s(\xi_1) \cdot e_\xi) \chi_s(\xi - \xi_1) \frac{|\xi| d\xi_1}{|\xi_1|^2 |\xi - \xi_1|^2} \\ &= -\frac{i}{2\nu^2} \int (\widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \xi) \cdot \widehat{u}_s(\xi - \xi_1) d\xi_1 \end{aligned}$$

De plus, par définition de  $\cdot$ :

$$\widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \xi = \sum_{k=1}^3 \widehat{u}_s(\xi_1)^k \xi_k$$

Cela donne:

$$\begin{aligned} \chi_s \circ \chi_s(\xi) &= -\frac{i}{2\nu^2} \int \sum_1^3 \widehat{u}_s(\xi_1)^k \xi_k \cdot \widehat{u}_s(\xi - \xi_1) d\xi \\ &= -\frac{i}{2\nu^2} \sum_1^3 \int \widehat{u}_s(\xi_1)^k \xi_k \cdot \widehat{u}_s(\xi - \xi_1) d\xi_1 \\ &= -\frac{i}{2\nu^2} \sum_1^3 \xi_k (\widehat{u}_s^k * \widehat{u}_s)(\xi) \end{aligned}$$



On a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{1}{2} \langle \chi_s \circ \chi_s, \widehat{g} \rangle ds &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{1}{2} \left\langle -\frac{i}{2\nu^2} \sum_1^3 \xi_k (\widehat{u}_s^k * \widehat{u}_s), \widehat{g} \right\rangle ds \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^t \langle \xi_k (\widehat{u}_s^k * \widehat{u}_s), \widehat{g} \rangle ds \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.9.**

$$\sup_{\xi} \int_0^T ds \int |\chi_s(\xi_1) \cdot e_{\xi}| |\chi_s(\xi - \xi_1)| \frac{|\xi| d\xi_1}{|\xi_1|^2 |\xi - \xi_1|^2} < \infty$$

*Preuve.* Remplaçons par la définition:  $\chi_s(\xi) = \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} |\xi|^2 \widehat{u}_s(\xi)$ .

$$\begin{aligned} \sup_{\xi} \int_0^T ds \int \left| \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} |\xi_1|^2 \widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \right| \left| \frac{2}{\nu} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} |\xi - \xi_1|^2 \widehat{u}_s(\xi - \xi_1) \right| \frac{|\xi| d\xi_1}{|\xi_1|^2 |\xi - \xi_1|^2} \\ \leq \sup_{\xi} \int_0^T ds \int \frac{2\pi^3}{\nu^2} |\widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \xi| |\widehat{u}_s(\xi - \xi_1)| d\xi_1 \end{aligned}$$

On utilise par la suite la propriété de  $u_s$  suivante:  $\widehat{u}_s(-\xi) = \overline{\widehat{u}_s(\xi)}$

$$= \sup_{\xi} \int_0^T ds \int \frac{2\pi^3}{\nu^2} |\widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \xi| |\overline{\widehat{u}_s(\xi_1 - \xi)}| d\xi_1$$

**Théorème 3.2** (Inégalité de Holder).

-Soit  $S$  un espace mesuré.

-Soient  $p, q > 0$  et  $r$  vérifiant la relation suivante:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions appartenant respectivement à  $L^p(S)$  et  $L^q(S)$ , on peut alors  $fg \in L^r(S)$  et on a:

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

En utilisant cette inégalité, on a alors:

$$\sup_{\xi} \int_0^T ds \int \frac{2\pi^3}{\nu^2} |\widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \xi| |\overline{\widehat{u}_s(\xi_1 - \xi)}| d\xi_1 \leq \frac{2\pi^3}{\nu^2} \sup_{\xi} \int_0^T ds \left( \int |\widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \xi|^2 d\xi_1 \right)^{1/2} \left( \int |\widehat{u}_s(\xi_1 - \xi)|^2 d\xi_1 \right)^{1/2}$$

**Lemme 3.2.**

$$\left( \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}_s(\xi_1 - \xi)|^2 d\xi_1 \right)^{1/2} < \infty$$

*Preuve.* En effet, posons:  $\Pi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3; \xi_1 \mapsto \xi_1 - \xi$  Réalisons un changement de variable,  $\Pi$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$ . De plus  $\det(Jac(\Pi)) = 1$ , on a donc:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}_s(\xi_1 - \xi)|^2 d\xi_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}_s(\Pi(\xi_1))|^2 \det(Jac(\Pi)) d\xi_1 \\ &= \int_{\Pi(\mathbb{R}^3)} |\widehat{u}_s(\xi_1)|^2 d\xi_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}_s(\xi_1)|^2 d\xi_1 < \infty \end{aligned}$$

On utilise la Proposition (0.4) □

Regardons la seconde inégalité:

**Lemme 3.3.**

$$\left( \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \xi|^2 d\xi_1 \right)^{1/2} < \infty$$

*Preuve.* On peut utiliser Cauchy Schwarz:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}_s(\xi_1) \cdot \xi|^2 d\xi_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^3} (|\widehat{u}_s(\xi_1)| |\xi|)^2 d\xi_1 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |\widehat{u}_s(\xi_1)|^2 |\xi|^2 d\xi_1 < \infty \end{aligned}$$

On utilise la Proposition (0.4) □

Ces deux lemmes terminent la preuve de la proposition (3.9). □

**Proposition 3.10.**

$$\chi_t(\xi) = \chi_0(\xi) + \int_0^t \nu |\xi|^2 \left[ -\chi_s(\xi) + \frac{1}{2} \chi_s \circ \chi_s(\xi) + \frac{1}{2} \varphi(s, \xi) \right] ds$$

*Preuve.* On a:

$$\langle \widehat{u}_t, \widehat{g} \rangle = \langle \widehat{u}_0, \widehat{g} \rangle + \int_0^t -\nu \langle |\xi|^2 \widehat{u}_s, \widehat{g} \rangle + \langle \widehat{f}_s, \widehat{g} \rangle ds + \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{1}{2} \langle \chi_s \circ \chi_s, \widehat{g} \rangle ds$$

Utilisons le théorème suivant:

**Théorème 3.3.** Soit  $f \in L^2(\Omega)$ . Si pour toute fonction  $g \in C_c^\infty(\Omega)$  on a:

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx = 0$$

alors:  $f(x)=0$  presque partout dans  $\Omega$ .

Dans notre cas, on obtient presque partout:

$$\widehat{u}_t = \widehat{u}_0 + \int_0^t -\nu |\xi|^2 \widehat{u}_s + \widehat{f}_s ds + \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{1}{2} \chi_s \circ \chi_s ds$$

Si on multiplie des deux cotés par:  $\frac{2}{\nu}(\frac{\pi}{2})^{3/2} |\xi|^2$ , on peut introduire les fonctions  $\chi$ .  
Regardons de plus près terme par terme:

$$\begin{aligned}\chi_t(\xi) &= \frac{2}{\nu}(\frac{\pi}{2})^{3/2} |\xi|^2 \widehat{u}_t \\ \chi_0(\xi) &= \frac{2}{\nu}(\frac{\pi}{2})^{3/2} |\xi|^2 \widehat{u}_0 \\ \int_0^t -\nu |\xi|^2 \chi_s(\xi) &= \int_0^t -\nu |\xi|^2 \frac{2}{\nu}(\frac{\pi}{2})^{3/2} |\xi|^2 \widehat{u}_s ds\end{aligned}$$

Introduisons une nouvelle fonction.

**Définition 3.7.**

$$\begin{aligned}\varphi(s, \xi) &= \frac{4}{\nu^2}(\frac{\pi}{2})^{3/2} \widehat{f}_s(\xi) \\ \varphi(s, \xi) \cdot \xi &= 0, \quad \varphi(s, -\xi) = \overline{\varphi(s, \xi)}, \quad 0 \leq s \leq T, \quad \xi \in \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

Les propriétés sont vraies par définition de  $\widehat{f}_s$

Cela donne:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\nu}(\frac{\pi}{2})^{3/2} |\xi|^2 \widehat{f}_s(\xi) &= \nu |\xi|^2 \frac{1}{2} \frac{4}{\nu^2}(\frac{\pi}{2})^{3/2} \widehat{f}_s(\xi) \\ &= \nu |\xi|^2 \frac{1}{2} \varphi(s, \xi)\end{aligned}$$

Pour le dernier terme:

$$\frac{2}{\nu}(\frac{\pi}{2})^{3/2} |\xi|^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{1}{2} \chi_s \circ \chi_s ds = \nu |\xi|^2 \int_0^t \frac{1}{2} \chi_s \circ \chi_s ds$$

On obtient ce que l'on cherchait. On a presque partout:

$$\chi_t(\xi) = \chi_0(\xi) + \int_0^t \nu |\xi|^2 \left[ -\chi_s(\xi) + \frac{1}{2} \chi_s \circ \chi_s(\xi) + \frac{1}{2} \varphi(s, \xi) \right] ds$$

□

La finalité est de montrer la proposition suivante:

**Proposition 3.11.**

$$\chi_t(\xi) = e^{-\nu |\xi|^2 t} \chi_0(\xi) + \int_0^t \nu |\xi|^2 e^{-\nu |\xi|^2 (t-s)} \left[ \frac{1}{2} \chi_s \circ \chi_s(\xi) + \frac{1}{2} \varphi(s, \xi) \right] ds$$

*Preuve.* Par le principe fondamental de l'analyse, en partant de la proposition précédente.

$$\chi'_t(\xi) = \nu |\xi|^2 \left[ -\chi_t(\xi) + \frac{1}{2} \chi_t \circ \chi_t(\xi) + \frac{1}{2} \varphi(t, \xi) \right]$$

Cela est équivalent à:

$$\chi'_t(\xi) + \nu |\xi|^2 \chi_t(\xi) = \nu |\xi|^2 \left[ \frac{1}{2} \chi_t \circ \chi_t(\xi) + \frac{1}{2} \varphi(t, \xi) \right]$$

On obtient l'équivalence suivante: Soit  $z \in [0; T]$ :

$$\frac{d}{dt}(e^{-\nu|\xi|^2(z-t)}\chi_t(\xi)) = e^{-\nu|\xi|^2(z-t)} \left[ \nu|\xi|^2 \left[ \frac{1}{2}\chi_t \circ \chi_t(\xi) + \frac{1}{2}\varphi(t, \xi) \right] \right]$$

On intègre:

$$\int_0^z \frac{d}{dt}(e^{-\nu|\xi|^2(z-t)}\chi_t(\xi))dt = \int_0^z \nu|\xi|^2 e^{-\nu|\xi|^2(z-t)} \left[ \frac{1}{2}\chi_t \circ \chi_t(\xi) + \frac{1}{2}\varphi(t, \xi) \right] dt$$

On obtient en utilisant de nouveau le principe fondamental de l'analyse:

$$\begin{aligned} \int_0^z \frac{d}{dt}(e^{-\nu|\xi|^2(z-t)}\chi_t(\xi))dt &= e^{-\nu|\xi|^2(z-z)}\chi_z(\xi) - e^{-\nu|\xi|^2(z-0)}\chi_0(\xi) \\ &= \chi_z(\xi) - e^{-\nu|\xi|^2z}\chi_0(\xi) \end{aligned}$$

On obtient au final:

$$\chi_z(\xi) = e^{-\nu|\xi|^2z}\chi_0(\xi) + \int_0^z \nu|\xi|^2 e^{-\nu|\xi|^2(z-t)} \left[ \frac{1}{2}\chi_t \circ \chi_t(\xi) + \frac{1}{2}\varphi(t, \xi) \right] dt$$

Cela équivaut à écrire:

$$\chi_t(\xi) = e^{-\nu|\xi|^2t}\chi_0(\xi) + \int_0^t \nu|\xi|^2 e^{-\nu|\xi|^2(t-s)} \left[ \frac{1}{2}\chi_s \circ \chi_s(\xi) + \frac{1}{2}\varphi(s, \xi) \right] ds$$

□

## II. Introduction de nouveaux ensembles

On vient d'obtenir la formulation variationnelle des équations de Navier Stokes. Pour y associer un processus de branchement, on introduit un noyau de probabilité. L'étude de ce noyau est possible dans des ensembles bien précis. Cette partie y est consacrée.

### a. Rappel sur les relations coordonnées sphériques/cartésiennes

Avant de commencer, on rappelle les relations entre les coordonnées sphériques et les coordonnées cartésiennes, celles-ci seront utilisées plus tard.

Soit  $u(x, y, z)$  notre vecteur en coordonnées cartésiennes, on peut exprimer ces coordonnées en fonctions des coordonnées sphériques par les relations suivantes:

$$x = r\sin(\varphi)\cos(\theta) ; y = r\sin(\varphi)\sin(\theta) ; z = r\cos(\varphi)$$

où  $r$  est la norme,  $\varphi$  la colatitude,  $\theta$  la longitude de  $u$ .

On peut illustrer la représentation en coordonnées sphériques par le schéma suivant où  $u$  correspondrait au vecteur  $\overrightarrow{OP}$

### b. Introduction de l'ensemble D

Pour pouvoir mieux décrire le noyau  $K$ , on a besoin d'introduire de nouveaux ensembles. On utilisera en particulier les coordonnées sphériques pour exprimer les  $\xi$ .

**Définition 3.8.** On définit l'ensemble  $D$  par:

$$D = \{(\theta_1, \theta_2, \alpha) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \times [0, 2\pi]; \theta_1 + \theta_2 < \pi\}$$

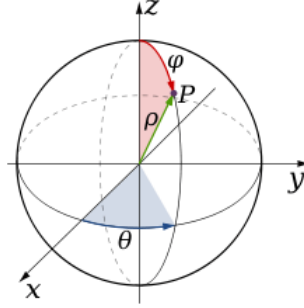


Figure 3.1: On a ici une illustration des coordonnées sphériques. Ici  $\varphi$  est la colatitude, et  $\theta$  est la longitude

Soit  $(\theta_1, \theta_2, \alpha) \in D$ , on introduit:  $\xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha)$  et  $\xi_2(\theta_1, \theta_2, \alpha)$  tels que:

**Proposition 3.12.**  $\xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha)$  et  $\xi_2(\theta_1, \theta_2, \alpha)$  sont les uniques vecteurs qui vérifient l'égalité suivante:

$$\xi_1 + \xi_2 = e_3$$

*Preuve.* (Unicité)

On est capable d'exprimer nos vecteurs  $\xi_1$  et  $\xi_2$  de la manière suivante:

- Soit  $\xi_1(x_1, y_1, z_1)$  notre vecteur en coordonnées cartésiennes, on peut exprimer ces coordonnées en fonctions des coordonnées sphériques par les relations suivantes:

$$x_1 = r_1 \sin(\theta_1) \cos(\alpha) ; y_1 = r_1 \sin(\theta_1) \sin(\alpha) ; z_1 = r_1 \cos(\theta_1)$$

où  $r_1$  est la norme,  $\theta_1$  la colatitude,  $\alpha$  la longitude de  $\xi_1$ .

- Soit  $\xi_2(x_2, y_2, z_2)$ , on a de même:

$$x_2 = r_2 \sin(\theta_2) \cos(\alpha + \pi[2\pi]) ; y_2 = r_2 \sin(\theta_2) \sin(\alpha + \pi[2\pi]) ; z_2 = r_2 \cos(\theta_2)$$

où  $r_2$  est la norme,  $\theta_2$  la colatitude,  $\alpha + \pi[2\pi]$  la longitude de  $\xi_2$ .

La longitude de  $\xi_2$  étant égale à la longitude de  $\xi_1 + \pi$ , le vecteur  $\xi_2$  appartient au plan formé par les vecteurs  $e_3$  et  $\xi_1$ .

Soit  $u$  le vecteur orthogonal à  $e_3$  de norme 1 et appartenant au plan  $(e_3, \xi_1)$ . Travaillons dans le repère orthonormé  $(e_3, u)$ . Graphiquement, cela donne:

On a les relations suivantes:

$$\begin{cases} \xi_1 = r_1 \sin(\theta_1) u + r_1 \cos(\theta_1) e_3 \\ \xi_2 = -r_2 \sin(\theta_2) u + r_2 \cos(\theta_2) e_3 \end{cases}$$

En projetant sur  $u$  et  $e_3$ , on obtient les équations suivantes:

$$\begin{cases} r_1 \sin(\theta_1) - r_2 \sin(\theta_2) = 0 \\ r_1 \cos(\theta_1) + r_2 \cos(\theta_2) = 1 \end{cases}$$

On cherche  $r_1$  et  $r_2$ . On veut montrer l'unicité de ces valeurs. On a un système linéaire de la forme:  $AR = b$  où:

$$A = \begin{pmatrix} \sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2) \\ \cos(\theta_1) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix} ; R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} ; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

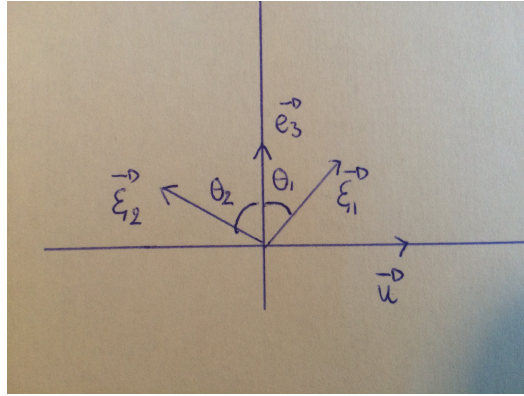


Figure 3.2: Interprétation graphique dans le repère  $(e_3, u)$

Ce système admet une unique solution si  $\det(A) \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) \\ &= \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

On a donc  $\det(A) = 0$  ssi  $\theta_1 + \theta_2 = 0$  car par définition de  $D$ :  $\theta_1 + \theta_2 < \pi$ .  
L'unicité est donc montrée. □

**Définition 3.9.** On définit  $\Psi$  l'application suivante:

$$\Psi : D \mapsto (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^2; (\theta_1, \theta_2, \alpha) \mapsto (\xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha), \xi_2(\theta_1, \theta_2, \alpha))$$

**Proposition 3.13.**  $\Psi$  est une application bijective de  $D \mapsto (\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}e_3)^2$

*Preuve.*

En effet, elle est injective dû à l'unicité de l'égalité  $\xi_1 + \xi_2 = e_3$ . (Proposition 1.1)

De même, la surjection est donnée par les propriétés du plan, tout couple  $\xi_1, \xi_2$  admet un antécédent. □

**Définition 3.10. Difféomorphisme**

Soit  $F : D \subset \mathbb{R}^n \mapsto D' \subset \mathbb{R}^n$  où  $D$  et  $D'$  sont des ouverts. La fonction  $F$  est appelée un difféomorphisme si c'est une bijection de classe  $C^1$  dont la bijection réciproque est aussi de classe  $C^1$ .

**Définition 3.11. Théorème d'inversion globale**

Si  $f$  est une application injective de classe  $C^1$ , définie sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , si de plus la différentielle  $d_a f$  en chaque point  $a \in U$  est une bijection linéaire, alors  $f(U)$  est ouvert de  $f$  est un  $C^1$  difféomorphisme de  $U$  sur  $f(U)$ .

**Lemme 3.4.** Montrer que  $d_a(f)$  est une bijection linéaire revient à montrer que le déterminant du jacobien  $\det(d_a(f))$  est non nul.

**Définition 3.12.** On définit  $\Phi$  l'application suivante:

$$\Phi : D \mapsto \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; (\theta_1, \theta_2, \alpha) \mapsto \xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha)$$

**Proposition 3.14.**  $\Phi$  est un difféomorphisme

*Preuve.* En résolvant le système plus haut, on obtient:

$$r_1 = \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} ; \quad r_2 = \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

On a donc la relation suivante:

$$\xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha) = \left( \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \sin(\theta_1) \cos(\alpha) ; \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \sin(\theta_1) \sin(\alpha) ; \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \cos(\theta_1) \right)$$

$$J(\Phi) = \begin{pmatrix} \frac{\sin^2(\theta_2) \cos(\alpha)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} & \frac{\sin^2(\theta_1) \cos(\alpha)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} & -\frac{\sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \sin(\alpha)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \\ \frac{\sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\alpha)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} & \frac{\sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\alpha)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} & \frac{\sin(\theta_2) \sin(\theta_1) \cos(\alpha)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \\ -\frac{\cos(\theta_2) \sin(\theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} & \frac{\sin(\theta_1) \cos(\theta_1)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant est égale à:

$$\det(J(\Phi)) \neq 0$$

D'après le lemme (3.4), cela finit la preuve. □

### c. Similitude

Soit  $\xi(r, \theta, \phi)$  avec  $r$  sa norme,  $\theta$  sa colatitude et  $\phi$  sa longitude.

On définit  $\forall \xi \neq 0$   $S_\xi$  la similitude qui envoie par plusieurs applications  $e_3$  dans  $\xi$ .

On réalise dans un premier temps une rotation sur le plan  $(e_3, \xi)$ . Cela est équivalent à faire une rotation de  $\theta$  dans le plan.

Dans un second temps, on utilise une homothétie.

### d. Introduction de l'ensemble A

**Définition 3.13.** On définit l'ensemble  $A$  par:

$$A = \{(r, r_1, r_2) \in (0, \infty)^3, r_1 + r_2 > r, r_1 + r > r_2, r_2 + r > r_1\}$$

Remarques:

-  $A$  est symétrique par permutation des éléments dans  $(0, \infty)^3$ .

-  $A$  décrit le "postulat euclidien" selon lequel : " la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre".

Dans un triangle non dégénéré, la longueur de chaque coté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

### e. Introduction du noyau K

**Définition 3.14.** On introduit le noyau  $K$  suivant:

$$K_\xi(h) = \int h(\xi_1, \xi_2) K_\xi(d\xi_1, d\xi_2) = \frac{1}{\pi^3} \int h(\xi_1, \xi - \xi_1) \frac{|\xi| d\xi_1}{|\xi_1|^2 |\xi - \xi_1|^2}$$

avec  $h$  positive et mesurable sur  $((\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^2)$

Si on reprend les notations précédentes:

$$\begin{aligned} w_1 \circ w_2(\xi) &= -\frac{i}{\pi^3} \int (w_1(\xi_1) \cdot e_\xi) p(\xi) w_2(\xi - \xi_1) \frac{|\xi| d\xi_1}{|\xi_1|^2 |\xi - \xi_1|^2} \\ &= -i \int (w_1(\xi_1) \cdot e_\xi) p(\xi) w_2(\xi_2) K_\xi(d\xi_1, d\xi_2) \end{aligned}$$

### III. Étude du noyau K

Dans cette section, on essaie de déduire des propriétés importantes sur le noyau K qui seront plus tard appliquées aux processus de branchements.

**Définition 3.15** (Noyau Markovien).

Un noyau de Markov sur  $\Omega$  est la donnée, pour tout  $x \in \Omega$ , d'une probabilité  $K(x, dy)$  sur  $\Omega$  telle que

$$\forall A \in B, x \mapsto K(x, A) = \int_A K(x, dy) \text{ est mesurable}$$

Pour  $f \in L^\infty(\Omega)$ , on note  $K(f)$  la fonction sur  $\Omega$

$$K(f)(x) = \int f(y) K(x, dy)$$

**Proposition 3.15.**  $K$  est un noyau markovien.

**Proposition 3.16.** Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ,  $K_\xi(d\xi_1, d\xi_2)$  est l'image de la probabilité  $\frac{1}{\pi^3} 1_D d\theta_1 d\theta_2 d\alpha$  par l'application  $(S_\xi \otimes S_\xi) \circ \Psi$ .

*Preuve.*

On peut reformuler l'énoncé de la manière suivante:

Soit P la probabilité suivant la loi:  $\frac{1}{\pi^3} 1_D d\theta_1 d\theta_2 d\alpha$ , on a alors:

$$K_\xi(d\xi_1, d\xi_2) = P((S_\xi \otimes S_\xi) \circ \Psi)^{-1}(\xi_1, \xi_2)$$

Sans perte de généralité, on peut poser  $\xi = e_3$ , en effet on comblera cela en appliquant par la suite la similitude  $S_\xi$  qui envoie  $e_3$  sur  $\xi$ .

Soit  $r_1 \in (0, \infty)$  le module de  $\xi_1$  et  $r_2 \in (0, \infty)$  le module de  $\xi_2$ . Par la proposition 1.1 on a:

$$\xi_1 + \xi_2 = e_3$$

Projetons cette équation sur la droite  $\mathbb{R}^3 e_3$ . On a vu que pour passer en coordonnées cartésiennes, on a:  $z_1 = r_1 \cos(\theta_1)$ . Si on regarde les 3e composantes de  $\xi_1$  et  $\xi_2$  en coordonnées cartésiennes, on doit avoir:

$$z_1 + z_2 = 1$$

On obtient bien en passant en coordonnées sphériques:

$$r_1 \cos(\theta_1) + r_2 \cos(\theta_2) = 1$$



Projetons maintenant l'équation sur le plan  $e_1, e_2$ .  
On a dans un premier temps l'équation suivante pour la première composante en passant par les coordonnées cartésiennes.  $x_1 = r_1 \sin(\theta_1) \cos(\alpha)$ . La projection donne:

$$x_1 + x_2 = 0$$

En passant en coordonnées sphériques:

$$r_1 \sin(\theta_1) \cos(\alpha) + r_2 \sin(\theta_2) \cos(\alpha + \pi) = 0$$

Or  $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$ . On obtient alors:

$$\cos(\alpha)(r_1 \sin(\theta_1) - r_2 \sin(\theta_2)) = 0$$

On a donc deux possibilités:  $\begin{cases} \cos(\alpha) = 0 \\ r_1 \sin(\theta_1) - r_2 \sin(\theta_2) = 0 \end{cases}$

Regardons maintenant par rapport à la seconde composante, on sait que l'on a:  $y_1 = \rho_1 \sin(\theta_1) \sin(\alpha)$ .  
On obtient donc l'équation suivante:

$$r_1 \sin(\theta_1) \sin(\alpha) + r_2 \sin(\theta_2) \sin(\alpha + \pi) = 0$$

Or  $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$ , on obtient donc l'équation suivante:

$$\sin(\alpha)(r_1 \sin(\theta_1) - r_2 \sin(\theta_2)) = 0$$

On a donc deux possibilités:  $\begin{cases} \sin(\alpha) = 0 \\ r_1 \sin(\theta_1) - r_2 \sin(\theta_2) = 0 \end{cases}$

C'est impossible d'obtenir en même temps  $\sin(\alpha) = 0$  et  $\cos(\alpha) = 0$ . La seconde équation obtenue est la suivante:

$$r_1 \sin(\theta_1) - r_2 \sin(\theta_2) = 0$$

On a donc les deux égalités suivantes:

$$\begin{cases} r_1 \cos(\theta_1) + r_2 \cos(\theta_2) = 1 \\ r_1 \sin(\theta_1) - r_2 \sin(\theta_2) = 0 \end{cases}$$

Réolvons ce système pour  $(\theta_1, \theta_2, \alpha) \in D$ . On trouve pour solution:

$$r_1 = \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} ; r_2 = \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

Soit  $g$  positive et mesurable, sur  $((\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^2)$ . On a:

$$\begin{aligned} K_{e_3}(g) &= \int g(\xi_1, \xi_2) K_{e_3}(d\xi_1, d\xi_2) \\ &= \frac{1}{\pi^3} \int g(\xi_1, e_3 - \xi_1) \frac{|e_3| d\xi_1}{|\xi_1|^2 |e_3 - \xi_1|^2} \\ &= \frac{1}{\pi^3} \int g(\xi_1, e_3 - \xi_1) \frac{d\xi_1}{|\xi_1|^2 |e_3 - \xi_1|^2} \\ &= \frac{1}{\pi^3} \int_{(0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)} g(\xi_1(r_1, \theta_1, \alpha), e_3 - \xi_1(r_1, \theta_1, \alpha)) \sin(\theta_1) \frac{dr_1 d\theta_1 d\alpha}{|e_3 - \xi_1(r_1, \theta_1, \alpha)|^2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Pour montrer cette dernière égalité (3.2), on réalise un changement en coordonnées sphériques. Posons l'application suivante:

$$\Pi : (r_1, \theta_1, \alpha) \rightarrow (r_1 \sin(\theta_1) \cos(\alpha), r_1 \sin(\theta_1) \sin(\alpha), r_1 \cos(\theta_1))$$

$$\Phi : (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Rappelons le théorème de changement de variables pour des fonctions mesurables. C'est la deuxième partie du théorème qui nous intéresse particulièrement.

**Théorème 3.4.** *Soit  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$  et  $\phi : U \rightarrow V$  un difféomorphisme de classe  $C^1$ . Alors:*

(1) *Pour tout  $E \subset U$  mesurable,  $\phi(E)$  est mesurable et*

$$m(\phi(E)) = \int_E |J(x)| dx$$

(2) *Si  $f : V \mapsto [0, \infty]$  est mesurable, alors*

$$\int_{\phi(U)} f(y) dy = \int_U f(\phi(x)) |\det Jac(\phi(x))| dx$$

Ceux sont bien deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . et  $\Pi$  est un difféomorphisme bien connu. De plus  $g$  est une fonction mesurable de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \mapsto [0, \infty]$ . On peut donc appliquer la seconde propriété du théorème du changements de variables.

Calculons le déterminant de la jacobienne de  $\Pi$

$$\begin{aligned} \det Jac(\Pi) &= \begin{vmatrix} \sin(\theta_1) \cos(\alpha) & r_1 \cos(\alpha) \cos(\theta_1) & -r_1 \sin(\theta_1) \sin(\alpha) \\ \sin(\theta_1) \sin(\alpha) & r_1 \sin(\alpha) \cos(\theta_1) & r_1 \sin(\theta_1) \cos(\alpha) \\ \cos(\theta_1) & -r_1 \sin(\theta_1) & 0 \end{vmatrix} \\ &= r_1^2 \sin(\theta_1)^3 \sin(\alpha)^2 + r_1^2 \cos(\theta_1)^2 \cos(\alpha)^2 \sin(\theta_1) + r_1^2 \sin(\theta_1) \sin(\alpha)^2 \cos(\theta_1)^2 + r_1^2 \sin(\theta_1)^3 \cos(\alpha)^2 \\ &= r_1^2 \sin(\theta_1) [\sin(\theta_1)^2 \sin(\alpha)^2 + \cos(\theta_1)^2 \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 \cos(\theta_1)^2 + \sin(\theta_1)^2 \cos(\alpha)^2] \\ &= r_1^2 \sin(\theta_1) [\sin(\theta_1)^2 (\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2) + \cos(\theta_1)^2 (\cos(\alpha)^2 + \sin(\theta_1)^2)] \\ &= r_1^2 \sin(\theta_1) [\sin(\theta_1)^2 + \cos(\theta_1)^2] \\ &= r_1^2 \sin(\theta_1) \end{aligned}$$

Grâce au théorème de changements de variables, on a:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi^3} \int g(\xi_1, e_3 - \xi_1) \frac{d\xi_1}{|\xi_1|^2 |e_3 - \xi_1|^2} \\ &= \frac{1}{\pi^3} \int_{(0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)} g(\xi_1(r_1, \theta_1, \alpha), e_3 - \xi_1(r_1, \theta_1, \alpha)) \det Jac(\Pi) \frac{dr_1 d\theta_1 d\alpha}{|\xi_1(r_1, \theta_1, \alpha)|^2 |e_3 - \xi_1(r_1, \theta_1, \alpha)|^2} \\ &= \frac{1}{\pi^3} \int_{(0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)} g(\xi_1(r_1, \theta_1, \alpha), e_3 - \xi_1(r_1, \theta_1, \alpha)) r_1^2 \sin(\theta_1) \frac{dr_1 d\theta_1 d\alpha}{r_1^2 |e_3 - \xi_1(r_1, \theta_1, \alpha)|^2} \\ &= \frac{1}{\pi^3} \int_{(0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)} g(\xi_1(r_1, \theta_1, \alpha), e_3 - \xi_1(r_1, \theta_1, \alpha)) \sin(\theta_1) \frac{dr_1 d\theta_1 d\alpha}{|e_3 - \xi_1(r_1, \theta_1, \alpha)|^2} \end{aligned}$$

On obtient bien ce qui été recherché.

Réalisons un nouveau changements de variables. Définissons:

$$\Upsilon : D \mapsto (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi); (\theta_1, \theta_2, \alpha) \mapsto (r_1, \theta_1, \alpha)$$

**Proposition 3.17.** *L'application  $\Upsilon$  est un difféomorphisme.*

*Preuve.*  $\Upsilon$  est une application bijective. Calculons la jacobienne de celle-ci. On rappelle qu'on a les relations suivantes:

$$r_1 = \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad ; \quad r_2 = \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

Cela nous donne alors:

$$\begin{aligned} \text{Jac}(\Upsilon) &= \begin{pmatrix} \frac{-\sin(\theta_2)\cos(\theta_1+\theta_2)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)} & \frac{\cos(\theta_2)\sin(\theta_1+\theta_2)+\sin(\theta_2)\cos(\theta_1+\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \det(\text{Jac}(\Upsilon)) &= -\frac{\cos(\theta_2)\sin(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_2)\cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)^2} \\ &= \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)^2} \\ &= \frac{r_2^2}{\sin(\theta_1)} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Cela finit notre preuve. □

Appliquons le théorème 3.4 du changement de variables:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi^3} \int_{(0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi)} g(\xi_1(r_1, \theta_1, \alpha), e_3 - \xi_1(r_1, \theta_1, \alpha)) \sin(\theta_1) \frac{dr_1 d\theta_1 d\alpha}{|e_3 - \xi_1(r_1, \theta_1, \alpha)|^2} \\ &= \frac{1}{\pi^3} \int_D g(\xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha), e_3 - \xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha)) \sin(\theta_1) \det(\text{Jac}(\Upsilon)) \frac{d\theta_1 d\theta_2 d\alpha}{|e_3 - \xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha)|^2} \end{aligned}$$

De plus, par définition, on a:  $\xi_2(\theta_1, \theta_2, \alpha) = e_3 - \xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi^3} \int_D g(\xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha), \xi_2(\theta_1, \theta_2, \alpha)) \sin(\theta_1) \det(\text{Jac}(\Upsilon)) \frac{d\theta_1 d\theta_2 d\alpha}{|\xi_2(\theta_1, \theta_2, \alpha)|^2} \\ &= \frac{1}{\pi^3} \int_D g(\xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha), \xi_2(\theta_1, \theta_2, \alpha)) \sin(\theta_1) \det(\text{Jac}(\Upsilon)) \frac{d\theta_1 d\theta_2 d\alpha}{r_2^2} \\ &= \frac{1}{\pi^3} \int_D g(\xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha), \xi_2(\theta_1, \theta_2, \alpha)) \sin(\theta_1) \frac{r_2^2}{\sin(\theta_1)} \frac{d\theta_1 d\theta_2 d\alpha}{r_2^2} \\ &= \frac{1}{\pi^3} \int_D g(\xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha), \xi_2(\theta_1, \theta_2, \alpha)) d\theta_1 d\theta_2 d\alpha \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a:  $\Phi = \Upsilon \circ \Pi$ , de plus on rappelle que l'on a:

$$\Psi : D \mapsto (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}); (\theta_1, \theta_2, \alpha) \mapsto (\xi_1(\theta_1, \theta_2, \alpha), \xi_2(\theta_1, \theta_2, \alpha))$$

On obtient alors finalement:

$$\begin{aligned} K_{e_3}(g) &= \int g(\xi_1, \xi_2) K_{e_3}(d\xi_1, d\xi_2) \\ &= \frac{1}{\pi^3} \int_D g(\Psi(\theta_1, \theta_2, \alpha)) d\theta_1 d\theta_2 d\alpha \end{aligned}$$

Cela nous montre que  $K_{e_3}(d\xi_1, d\xi_2)$  est l'image de la probabilité  $\frac{1}{\pi^3} 1_D d\theta_1 d\theta_2 d\alpha$  par la fonction mesurable  $\Psi$ .

La deuxième étape est de généraliser les choses par rapport à  $K_\xi$ .

On avait posé au départ  $\xi = e_3$ . Pour retourner dans l'ensemble de départ, il faut donc passer par l'application :  $(S_\xi \otimes S_\xi)^{-1}$ .  $\square$

**Proposition 3.18.** *Sous  $K_\xi$ ,  $(|\xi_1|, |\xi_2|)$  suit la loi:*

$$\frac{2}{\pi^2} 1_A(r, r_1, r_2) \frac{dr_1}{r_1} \frac{dr_2}{r_2}$$

*Preuve.*

Par la suite, on notera  $r = |\xi| > 0$ .

Comme fait précédemment, on suppose sans perte de généralité que  $\xi = e_3$ . On a donc  $r=1$ .

Pour tout  $(\theta_1, \theta_2, \alpha) \in D$ ,  $(1, r_1, r_2) \in A$ . Cela est facilement expliqué par le fait que  $\xi_1 + \xi_2 = e_3$ .

Les 3 vecteurs forment alors un triangle car ils appartiennent au même plan. Comme vu précédemment,  $r_1$  et  $r_2$  ne dépendent pas de  $\alpha$  car on a:

$$r_1 = \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad ; \quad r_2 = \frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

**Définition 3.16.** *On définit l'application  $\Upsilon$  par:*

$$\Upsilon : (0, \pi) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi[ \mapsto (0, \infty) \times (0, \infty); (\theta_1, \theta_2, \alpha) \mapsto (r_1, r_2, \alpha)$$

avec  $(1, r_1, r_2) \in A$ .

**Proposition 3.19.**  *$\Upsilon$  est une bijection*

*Preuve.*

$\theta_1$  et  $\theta_2$  sont définies de façon unique par les deux inégalités suivantes. Cela montre l'injectivité.

La surjectivité est naturelle avec les propriétés de l'espace.  $\square$

**Lemme 3.5.** *On définit les deux égalités suivantes:*

$$\cos(\theta_2) = \frac{1 + r_2^2 - r_1^2}{2r_2} \quad ; \quad \cos(\theta_1) = \frac{1 + r_1^2 - r_2^2}{2r_1}$$

*Preuve.* Repartons du système suivant:

$$\begin{cases} r_1 \cos(\theta_1) + r_2 \cos(\theta_2) = 1 \\ r_1 \sin(\theta_1) - r_2 \sin(\theta_2) = 0 \end{cases}$$

Si l'on met au carré chaque égalité on obtient:

$$\begin{cases} r_1^2 \cos^2(\theta_1) + r_2^2 \cos^2(\theta_2) + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) = 1 \\ r_1^2 \sin^2(\theta_1) + r_2^2 \sin^2(\theta_2) - 2r_1 r_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) = 0 \end{cases}$$

Si on additionne la ligne 1 et la ligne 2, cela donne:

$$\begin{aligned} 1 &= r_1^2 (\cos^2(\theta_1) + \sin^2(\theta_1)) + r_2^2 (\cos^2(\theta_2) + \sin^2(\theta_2)) + 2r_1 r_2 (\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)) \\ &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

Notre problème ici devient alors le  $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ . Repartons de l'égalité suivante:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \\ r_1^2 \sin^2(\theta_1 + \theta_2) &= \sin^2(\theta_2) \\ r_1^2(1 - \cos^2(\theta_1 + \theta_2)) &= 1 - \cos(\theta_2) \\ \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \sqrt{\frac{r_1^2 - 1 + \cos^2(\theta_2)}{r_1^2}} \\ &= \frac{\sqrt{r_1^2 - 1 + \cos^2(\theta_2)}}{r_1} \end{aligned}$$

On peut remplacer dans l'équation obtenue précédemment.

$$\begin{aligned} 1 &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \frac{\sqrt{r_1^2 - 1 + \cos^2(\theta_2)}}{r_1} \\ &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_2 \sqrt{r_1^2 - 1 + \cos^2(\theta_2)} \end{aligned}$$

Cela est équivalent à:

$$\begin{aligned} \sqrt{r_1^2 - 1 + \cos^2(\theta_2)} &= \frac{1 - r_1^2 - r_2^2}{2r_2} \\ r_1^2 - 1 + \cos^2(\theta_2) &= \frac{(1 - r_1^2 - r_2^2)^2}{4r_2^2} \end{aligned}$$

On obtient finalement:

$$\cos(\theta_2) = \frac{\sqrt{(1 - r_1^2 - r_2^2)^2 - 4r_2^2r_1^2 + 4r_2^2}}{2r_2}$$

Il reste à montrer que:  $(1 - r_1^2 - r_2^2)^2 - 4r_2^2r_1^2 + 4r_2^2 = (1 + r_2^2 - r_1^2)^2$  On obtient bien l'égalité souhaitée:

$$\cos(\theta_2) = \frac{1 + r_2^2 - r_1^2}{2r_2}$$

Par symétrie, l'autre égalité est vraie. □

Continuons la preuve de la proposition, on peut définir l'application suivante:

**Définition 3.17.** On définit  $\Upsilon'$  l'application suivante:

$$\Upsilon' : (0, \pi)^2 \mapsto (0, \infty)^2; (\theta_1, \theta_2) \mapsto (r_1, r_2)$$

**Proposition 3.20.**  $\Upsilon'$  est un difféomorphisme.

*Preuve.* C'est une application bijective.

On calcule la jacobienne et le déterminant de celle ci:

$$\begin{aligned} J(\Upsilon') &= \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial r_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial r_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial r_2}{\partial \theta_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-\cos(\theta_1 + \theta_2)\sin(\theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} & \frac{\cos(\theta_2)\sin(\theta_1 + \theta_2) - \sin(\theta_2)\cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} \\ \frac{\cos(\theta_1)\sin(\theta_1 + \theta_2) - \sin(\theta_1)\cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} & \frac{-\cos(\theta_1 + \theta_2)\sin(\theta_1)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De plus, le déterminant est égale à:

$$\begin{aligned}
\det(J(\Upsilon')) &= \frac{\partial r_1}{\partial \theta_1} \frac{\partial r_2}{\partial \theta_2} - \frac{\partial r_1}{\partial \theta_2} \frac{\partial r_2}{\partial \theta_1} \\
&= -\frac{\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_2)} \\
&= -r_1 r_2 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

Par le lemme 3.4 cela termine la preuve. □

Soit  $g$  mesurable et positive sur  $(0, \infty)^3$  En utilisant la proposition (1.20) on a:

$$\int g(|\xi_1|, |\xi_2|) K_{e_3}(d\xi_1, d\xi_2) = \frac{1}{\pi^3} \int_D g(r_1, r_2) d\theta_1 d\theta_2 d\alpha$$

Utilisons maintenant le théorème 3.4 du changement de variables. Comme  $\Upsilon'$  est un difféomorphisme de classe  $C^1$ . De plus  $r_1$  et  $r_2$  ne dépendent pas de  $\alpha$ .

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi^3} \int_D g(r_1, r_2) d\theta_1 d\theta_2 d\alpha &= \frac{1}{\pi^3} \int_{(0, \pi)^2} g(r_1, r_2) d\theta_1 d\theta_2 \int_{(0, 2\pi)} d\alpha \\
&= \frac{2}{\pi^2} \int_{(0, \pi)^2} g(r_1, r_2) d\theta_1 d\theta_2 \\
&= \frac{2}{\pi^2} \int_{(0, \infty)^2} g(r_1, r_2) |\det(J(\Upsilon'^{-1}(r_1, r_2)))| dr_1 dr_2 \\
&= \frac{2}{\pi^2} \int_{(0, \infty)^2} g(r_1, r_2) \frac{dr_1}{r_1} \frac{dr_2}{r_2}
\end{aligned}$$

□

**Proposition 3.21.** *La loi de  $|\xi_1|$  ou  $|\xi_2|$  sous  $K_\xi$  est:*

$$\frac{2}{\pi^2} \log \left| \frac{r + r_1}{r - r_1} \right| \frac{dr_1}{r_1}$$

*Preuve.* Cherchons la loi de  $|\xi_1|$ .

On sait dans un premier temps que  $r + r_1 > r_2$  et  $r_2 > r - r_1$ . A partir de la proposition précédente:

$$\begin{aligned}
E(g(r_1)) &= \frac{2}{\pi^2} \int_A g(r_1) \frac{dr_1}{r_1} \frac{dr_2}{r_2} \\
&= \frac{2}{\pi^2} \int_{(0, \infty)^2} g(r_1) \int_{r-r_1}^{r+r_1} \frac{1}{r_2} dr_2 \frac{dr_1}{r_1} \\
&= \frac{2}{\pi^2} \int_{(0, \infty)^2} g(r_1) \log \left| \frac{r + r_1}{r - r_1} \right| \frac{dr_1}{r_1}
\end{aligned}$$

□

**Proposition 3.22.** *Soit  $h, g$  deux fonctions positives mesurables sur  $(0, \infty)$ ,  $i, j \in \{0, 1\}$ . Alors on a l'égalité suivante:*

$$\int \frac{d\xi}{|\xi|^3} h(|\xi|) \int g(|\xi_i|) K_\xi(d\xi_1, d\xi_2) = \int \frac{d\xi}{|\xi|^3} g(|\xi|) \int h(|\xi_j|) K_\xi(d\xi_1, d\xi_2)$$

# Chapitre 4

## Processus de branchement

On vient d'associer à notre formulation variationnelle un noyau markovien  $K_{xi}$ . On a pu définir quelques propriétés importantes de celui-ci. Le chapitre suivant découle de ces propriétés. On associe l'équation à un processus probabiliste complexe permettant de déduire des propriétés d'existence et d'unicité de notre solution. Ces deux théorèmes sont les résultats principaux de l'article de Y. Le Jan et A.S Sznitman.

### I. Problématique

On a montré précédemment qu'à partir des équations de Navier Stokes qui ont pour valeur initiale  $u_0$  et pour second membre  $f$ , on obtient la solution faible (FNS) définie après. Celle-ci a pour nouvelles conditions  $\chi_0, \varphi$  dépendant respectivement de  $u_0$  et  $f$ . On rappelle que:

$$(FNS) \quad \chi_t(\xi) = e^{-\nu|\xi|^2 t} \chi_0(\xi) + \int_0^t \nu |\xi|^2 e^{-\nu|\xi|^2(t-s)} \left[ \frac{1}{2} \chi_s \circ \chi_s(\xi) + \frac{1}{2} \varphi(s, \xi) \right] ds \quad \forall t \in [0, T]$$

A partir de cette nouvelle équation, on veut étudier l'existence et l'unicité de nos solutions, cela nous permettrait par équivalence de donner des résultats pour les équations de Navier Stokes.

Nous en venons à notre approche probabiliste.

On aimerait associer notre équation à un processus de branchement dans l'espace des  $\xi$ .

Pour résumer, si l'on prend une particule à un certain temps  $t$ , soit celle-ci meurt, soit elle donne naissance à deux nouvelles particules suivant la loi  $K_\xi(\xi_1, \xi_2)$  vu précédemment.

Dans un premier temps, nous étudierons des processus simplifiés permettant de mieux comprendre notre problème.

Dans un second temps, nous expliciterons le processus de branchement associé à l'équation (FNS). Pour finir, nous simulerons notre processus de branchement.

### II. Résultats préliminaires

#### a. Structure discrète: Galton Watson

On va ici faire un état de l'art très rapide sur les processus de Galton Watson. En effet, une partie de ces processus peuvent être considérés comme des processus de branchement à structure discrète. On essaye de faire un lien direct entre ce processus et notre processus de branchement associé à l'équation de Navier-Stokes.

Cette partie ne comportera pas de démonstrations mathématiques. Cela nous permet aussi de nous donner une idée de la manière de simulation notre processus de branchement.

### Processus de Galton Watson

Les processus de Galton Watson sont des processus de branchement considérés ici à temps discret. Ils sont similaires à notre processus de branchement pour (FNS) pour lequel on a une structure spatial. Les principes de ces processus sont les suivants:

Soit une particule de départ. On associe le nombre de particules descendantes à une variable aléatoire discrète  $X$ .  $P(X = k)$  est la probabilité qu'il y ait une création de  $k$  nouvelles particules. Dans notre cas, on s'intéresse uniquement à la possibilité qu'il y ait:

- la mort de la particule  $P(X = 0) = \frac{1}{2}$
- la naissance de deux nouvelles particules  $P(X = 2) = \frac{1}{2}$ .

Supposons que l'on ait  $Z_n$  nombre de particules à la  $n$  ème génération. On a la relation suivante entre deux générations:

$$\forall n \in \mathbb{N}; Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k}$$

où  $X_{n,k}$  sont des variables aléatoires. Elles correspondent à la v.a associée à chaque particules de la génération  $n$ .

Une hypothèse importante pour la suite de l'étude: **Les  $X_{n,k}$  sont iid  $\forall k$**

### Survie

Ce qui nous intéresse par la suite est la survie de la lignée.

**Définition 4.1.** On définit la génération correspondant à la fin de la lignée par:

$$\gamma := \inf \{n \geq 0 / Z_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

On s'intéresse à la probabilité que celle ci soit fini:

$$\kappa := P(\gamma < \infty)$$

### Théorème 4.1.

Soit  $m = E(X)$ :

- Si  $m \leq 1 \Rightarrow \kappa = 1$ . Il y a alors extinction de la lignée presque sûrement.
- Si  $m > 1 \Rightarrow \kappa < 1$ . La lignée est infinie avec une probabilité strictement positive.

Dans notre cas:  $E(X) = 1$ . Notre lignée s'éteint presque sûrement.

### Propriété 4.1.

Soit  $\sigma < \infty$  l'écart type de  $X$ . Si  $m = 1$  alors, la probabilité que la dernière génération soit plus grande que  $n$  donne:

$$P(\gamma > n) \underset{\infty}{\sim} \frac{2}{\sigma^2 n}$$

Ici on a:  $E(X^2) = 2$ , on en déduit pour notre cas:  $\sigma = \sqrt{Var(X)} = 1$ . Cela implique que la moyenne du temps d'extinction  $\gamma$  est infinie, en effet  $\sum \frac{1}{n}$  n'est pas bornée. Dans notre cas, on a:  $P(\gamma > n) \underset{\infty}{\sim} \frac{2}{n}$



## Simulation numérique

Pour pouvoir observer le phénomène, on a calculé numériquement la probabilité de survie.

Pour cela, on a utilisé le logiciel scilab pour créer le processus de Galton Watson. Voici l'idée de programmation:

1. à chaque génération  $j$  on compte le nombre de particules vivantes et on simule un nombre équivalent de loi uniforme permettant de nous donner une informations sur le nombre de particules au temps  $j+1$ .
2. On s'arrête la génération  $n$  ( en effet, la lignée s'arrête p.s) que l'on stocke en mémoire.
3. On génère cette simulation un grand nombre de fois. On notera par la suite ce nombre  $N$ .  
On obtient les fréquences associées au nombre de fois où la simulation s'arrêter à la génération  $i$ , on note  $f_i$ .

**Définition 4.2.** *On définit la fonction de survie empirique par:*

$$G_n = 1 - \sum_{i=1}^n f_i$$

Par le théorème de Glivenko Cantelli:

$$\sup |G_n - P(\gamma > n)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

On devrait obtenir quelque chose de similaire si  $N$  est très grand. Pour comparer l'approximation avec la courbe originale, on trace sur le même graphique la fonction de survie empirique avec la fonction  $P(\gamma > n) = G(n) = \frac{2}{n}$ .

Dans notre exemple, on simule  $N=1000$  fois le processus de Galton Watson. On obtient alors le graphique ci-dessous:

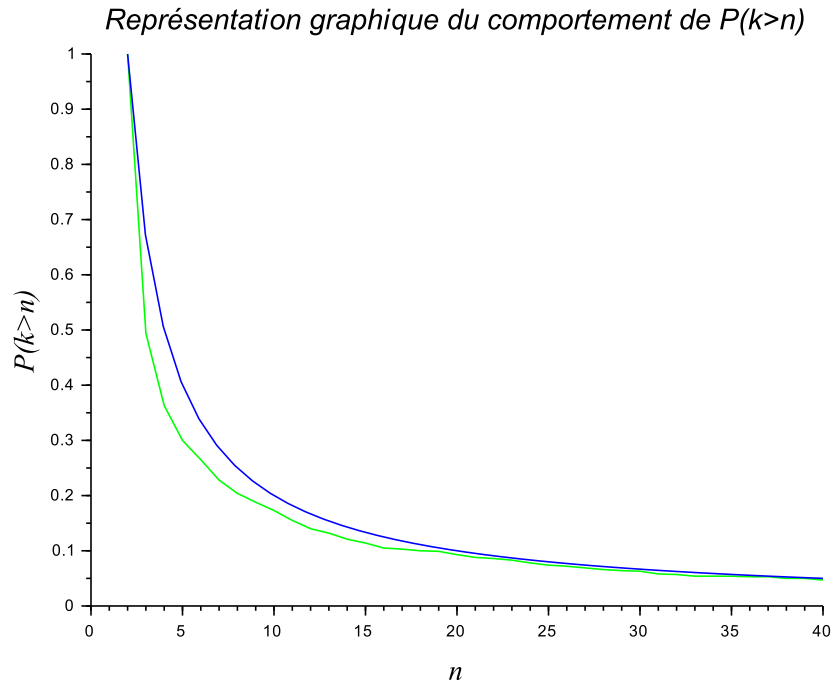


Figure 4.1: Graphe représentant le comportement de  $P(\kappa > n)$ . (Solution théorique ( $G(n)$ ), Solution simulée ( $G_n$ ))

Observations: Pour un millier de simulation la ressemblance est assez frappante.

### Conclusion:

Cela permet de mettre en lumière les problèmes de stockage qui peuvent être évalués avant de créer par la cascade stochastique. En effet si l'on veut stocker les particules obtenues pour remonter l'arbre avec un temps de départ trop grand, alors on pourrait rapidement être face à un problème de stockage. Il est possible mais rare d'effectuer 500 itérations. Notre problème pour les cascades stochastiques que nous verrons par la suite reste différent de la simulation de Galton Watson à temps discret car celui-ci sera en temps continu, l'exemple suivant permet de mieux comprendre le système.

### b. Galton Watson en temps continu

Pour nous rapprocher de notre problème final, on remplace notre processus de Galton à temps discret par un processus à temps continu. On étudie un exemple simple pour expliquer la situation. Soit un intervalle de temps  $[0, T]$ .

Au temps  $t=0$ , on initialise notre problème par un individu  $X_0$ .

On associe à cet individu un temps  $T_0$  qui est associé à une horloge exponentielle. :  $T_0 \sim \epsilon(\lambda)$ .

Au bout de ce temps on a alors deux solutions:

- Soit l'individu meurt avec une probabilité  $p$ .
- Soit celui-ci donne naissance à deux nouveaux individus avec une probabilité  $(1-p)$  suivant la loi  $K_{X_0}(X_1, X_2)$ .

On aimerait connaître le nombre d'individus au temps final  $T_0$ .

**Définition 4.3.** On définit le nombre d'individu au temps  $t$  par:

$$Z_t = \sum_i \delta_{X_i}$$

Soit  $T_0 \in [0, T]$  le temps (ce temps étant généré par une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ ) auquel l'individu  $X_0$  est soumis au changement. On peut schématiser ce processus de la manière suivante:

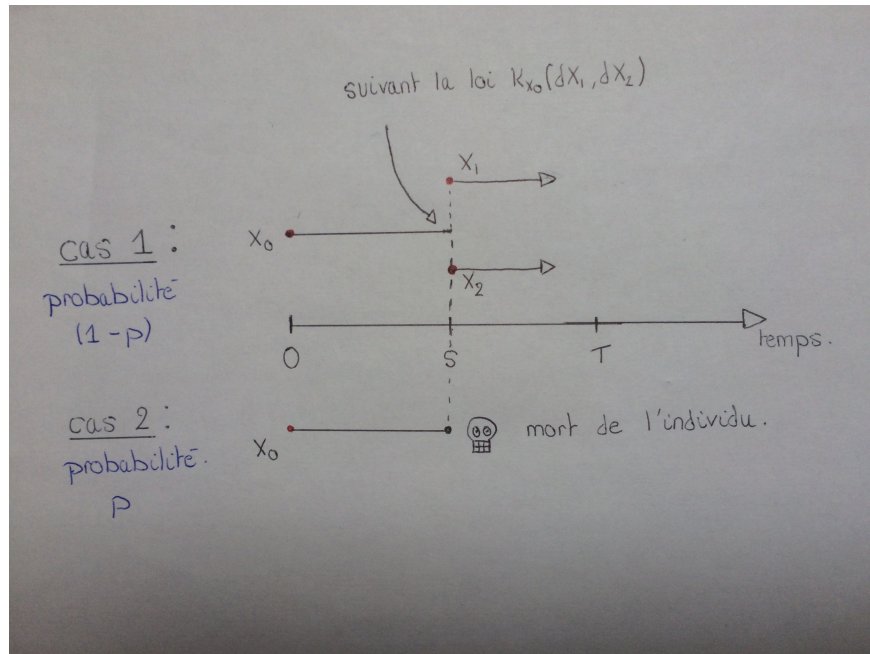


Figure 4.2: Schéma: vie d'un individu

On aimerait étudier la loi de la variable aléatoire  $Z_t$ . Rappelons tout d'abord un théorème important:

**Théorème 4.2** (Formule des espérances totales).

Soit  $B_i$  une partition de l'univers formée d'évènements de probabilité non nulle, alors:

$$E(X) = \sum_i P(B_i)E(X|B_i)$$

De plus on a:

$$E(X|B) = \frac{1}{P(B)}E(X1_B)$$

On peut partitionner notre ensemble par deux ensembles disjoints:

$$\{T_0 \leq T\} ; \{T_0 > T\}$$

Soit  $F$  une fonction mesurable bornée, en utilisant le théorème 4.2, on a:

$$\begin{aligned} E_{X_0}(F(Z_T)) &= E_{X_0}(F(Z_T)\mathbf{1}_{\{T_0 > T\}}) + E_{X_0}(F(Z_T)\mathbf{1}_{\{T_0 \leq T\}}) \\ &= E_{X_0}(E[F(Z_T)\mathbf{1}_{\{T_0 > T\}}|\mathcal{F}_T]) + E_{X_0}(E[F(Z_T)\mathbf{1}_{\{T_0 \leq T\}}|\mathcal{F}_{T_0}]) \\ &= E_{X_0}(F(Z_T)E[\mathbf{1}_{\{T_0 > T\}}|\mathcal{F}_T]) + E_{X_0}(\mathbf{1}_{\{T_0 \leq T\}}E_{Z_{T_0}}[F(Z_{T-T_0})]) \\ &= E_{Z_0}(F(Z_0)P(T_0 > T|\mathcal{F}_T)) + \int_0^T \lambda e^{-\lambda s}(p.0 + J(s))ds \\ &= F(X_0)e^{-\lambda T} + \int_0^T \lambda e^{-\lambda s} J(s)ds \end{aligned}$$

$$\text{où: } J(s) = (1-p) \int [E_{X_1}(F(Z_{t-s})) + E_{X_2}(F(Z_{t-s}))] K_{X_0}(dX_1, dX_2)$$

### III. Définition de l'arbre

Suite à ces deux exemples, on va maintenant expliciter le processus de branchement associé à notre problème. Pour cela, on doit définir la notion d'arbre.

On initialise notre arbre par une particule  $\xi_0$  associé à un temps  $t_0$

On associe à chaque particule une horloge exponentielle de paramètre  $\vartheta |\xi|^2$ . On obtient un branchement au temps  $t_\varnothing < t_0$  qui correspond au temps que met une particule avant d'arriver dans les deux situations citées ci-dessous:

-il y a une chance sur deux que celle-ci meurt.

-il y a une chance sur deux que deux nouvelles particules distribuées selon la loi  $K_\xi(d\xi_1, d\xi_2)$  naissent.

Pour modéliser ce processus de branchement, on a besoin de créer un arbre.

On définit notre arbre par un ensemble de noeud étiqueté dans  $I$ .  $I$  est associé à la notation de Neveu, cela nous permet de nous repérer dans l'arbre.

**Définition 4.4** (Notation de Neveu).

On définit  $I = \bigcup_{l \geq 0} \{1, 2\}^l$ . C'est une suite de nombres (1 ou 2) de longueur  $l$ . Elle permet d'exprimer la création de deux individus. Prenons l'exemple suivant:

Soit  $\xi_i$ , avec  $i \in I$ , supposons que cette particule donne naissance à deux nouvelles particules, on les notera alors de la manière suivante:  $\xi_{i1}$  et  $\xi_{i2}$ .

**Définition 4.5** (Noeud).

Soit le noeud  $m$  de notre arbre, on lui associe 3 marques:

- $\xi_m$  la particule associée.
- $t_m$  le temps de mort de la particule.
- $\vartheta_m$  indique si la particule meurt (cas où  $\vartheta_m = 0$ ) ou si celle ci donne naissance à deux nouveaux éléments. ( $\vartheta_m = 1$ ).

On définit  $\omega \in \Omega$  comme un arbre suivant:

$$w = (t, (t_m, \xi_m, \vartheta_m)_{m \in I})$$

On définit le temps  $t(\omega)$  le temps où notre premier élément est généré  $\xi_\emptyset(\omega)$  pour notre arbre  $\omega$ . On peut associer plusieurs propriétés à notre arbre.

**Définition 4.6.** Soit  $m, m' \in I$ ,  $m \prec m' \Leftrightarrow$  il existe  $u_1, \dots, u_n \in \{1, 2\}$  tels que  $m' = mu_1..u_n$  où  $n = \text{card}(m') - \text{card}(m)$

**Propriété 4.2.**

**a.**  $m' < m$  et  $\vartheta_m(w) = 1 \Rightarrow \vartheta_{m'}(w) = 1$ . Cela se traduit par le fait que si on arrive à un certain point de l'arbre, le chemin parcouru n'a pas été "arrêté" et donc aucun élément est mort.

**b.**  $m' < m$  ;  $\vartheta_{m'}(w) = 1 \Rightarrow t(w) > t_{m'}(w) > t_m(w)$  Cette propriété est la traduction que l'on temps est décroissant.

**c.**  $m' < m$  ;  $\vartheta_{m'}(w) = 0 \Rightarrow t_m(w) = t_{m'}(w)$  ;  $\xi_m(w) = \xi_{m'}(w)$ . Si une particule meurt, rien ne se passe au temps suivant sur cette branche de l'arbre.

Par convention, on va noter :  $\xi_\emptyset = \xi_\emptyset$ ;  $t_\emptyset = t(w)$  ce qui est évident par rapport au notation ci-dessus.

## IV. Opération dans l'arbre

Soit un temps  $t_0$  positif, on va s'intéresser uniquement aux arbres appartenant à  $\Omega_+$  ce qui correspond aux arbres à temps positif. Pour cela, on définit les ensembles suivants qui sont inclus dans  $\mathbb{I}$ .

**Définition 4.7** ( $N(w)$ ).

On définit  $N(w) \subseteq I$  qui correspond à l'ensemble des points où il y a naissance de deux particules avant le temps 0.

$$N(w) = \{m \in I, t_m(w) > 0, \vartheta_m(w) = 1\}$$

**Définition 4.8** ( $\partial N(w)$ ).

On définit  $\partial N(w) \subseteq I$  qui correspond à l'ensemble des noeuds où il y a la mort de la particule dont son prédécesseur appartient à  $N(w)$ .

La seconde condition permet de supprimer les points qui aurait un prédécesseur créé au temps  $t_m \leq 0$ . On note:

$$\partial N(w) = \{m \in I \setminus N(w) \text{ et } m = m'1 \text{ ou } m = m'2 \text{ avec } m' \in N(w)\}$$

On peut séparer  $\partial N(w)$  en deux ensembles disjoints:

$$\partial_0 N(w) = \{m \in \partial N(w), t_m(w) \leq 0\}$$

$$\partial_+ N(w) = \{m \in \partial N(w), t_m(w) > 0\}$$

On a bien:

$$\partial N(w) = \partial_+ N(w) \cup \partial_0 N(w) \quad \partial_+ N(w) \cap \partial_0 N(w) = \emptyset \quad w \in \Omega_+$$

On peut définir une opération entre les noeuds:

$$w_1, w_2 \in \mathbb{C}^3, \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow w_1 \times^\xi w_2 = -i(w_1 \cdot e_\xi) p(\xi) w_2 \in \mathbb{C}^3$$

Pour chaque élément de  $\partial N$ , on attribue des contributions:

- $\chi_0(\xi_m(w))$  si  $m \in \partial_0 N(w)$
- $\varphi(t_m(w), \xi_m(w))$  si  $m \in \partial_+ N(w)$

L'ensemble des opérations effectuées donne pour résultat un vecteur de  $\mathbb{C}^3$  que l'on note  $R(\chi_0, \varphi, \omega)$  avec  $w$  l'arbre appartenant à  $\Omega_+$

Pour illustrer cela, on peut prendre un exemple concret (voir figure ci-dessous). Pour mieux observer la présence des ensembles, chaque groupe de noeuds a été entouré de manière différente. On peut les citer ici:

$$N(w) = \{\emptyset, 2, (2, 2), (2, 2, 1)\}$$

$$\partial_0 N(w) = \{(2, 2, 1, 1), (2, 2, 1, 2)\}$$

$$\partial_+ N(w) = \{1, (2, 1), (2, 2, 2)\}$$

Grâce aux différentes contributions, on a alors:

$$R(\chi_0, \varphi, \omega) = (\varphi(t_1, \xi_1)) \times^{\xi_\emptyset} \left[ \varphi(t_{21}, \xi_{21}) \times^{\xi_2} \left( \varphi(t_{222}, \xi_{222}) \times^{\xi_{22}} \left( \chi_0(\xi_{2211} \times^{\xi_{221}} \chi_0(\xi_{2211})) \right) \right) \right]$$

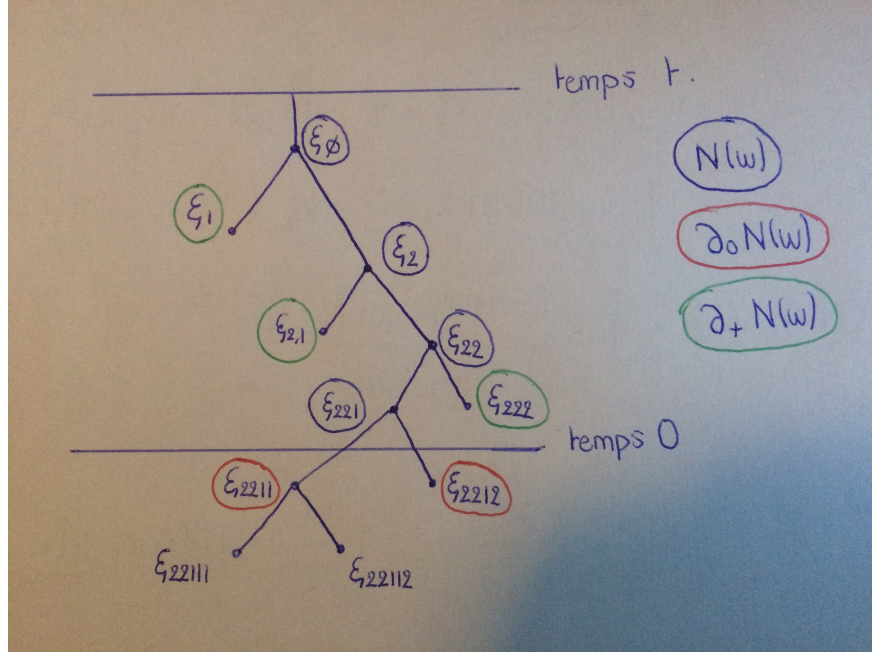


Figure 4.3: Exemple d'un arbre

## V. Étude de l'arbre

On aimerait simplifier notre problème. En effet l'opération associée à  $R(\chi_0, \varphi, \omega)$  est complexe. On définit pour cela l'application suivante:

**Définition 4.9.** Soit  $M(X_0, \Phi, \omega)$  où  $X_0$  et  $\Phi$  sont des fonctions positives mesurables. On définit  $M$  de manière analogue à  $R(\chi_0, \varphi, \omega)$ , cependant l'opération effectuée entre deux noeuds diffère: on applique la multiplication usuelle. (on remplace  $\times^\xi$  par  $\times$ )

$M$  étant une application plus simple, on va étudier celle-ci par la suite pour en déduire des propriétés sur  $R(\chi_0, \varphi, \omega)$ .

**Lemme 4.1.** Soit  $X_0$  et  $\Phi$  deux fonctions positives mesurables définies respectivement sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  et  $[0, T] \times \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Alors la fonction définit par:

$$(t, \xi) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow X_t(\xi) = E_{\xi, t}[M(X_0, \Phi, \omega)] \in [0, \infty]$$

est mesurable et satisfait:

$$X_t(\xi) = e^{-\nu|\xi|^2 t} X_0(\xi) + \int_0^t \nu |\xi|^2 e^{-\nu|\xi|^2(t-s)} \times \left[ \frac{1}{2} \int X_s(\xi_1) X_s(\xi_2) K_\xi(d\xi_1, d\xi_2) + \frac{1}{2} \Phi(s, \xi) \right] ds$$

pour  $t \in [0, T]$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  avec la convention  $0 \cdot \infty = 0$ .

*Preuve.* Pour démontrer ce lemme, on peut décomposer en sous proposition.

**Proposition 4.1.**  $X_t$  est mesurable

*Preuve.* Par définition  $M(X_0, \Phi, \omega)$  est un produit de fonctions positives mesurables  $X_0$  et  $\Phi$ . Or le produit de fonctions mesurables à valeurs dans  $\mathbb{C}$  ou  $[0, \infty]$  est mesurable. De plus, par passage à l'espérance cela n'a pas d'impact sur la mesurabilité. Donc  $X_t$  est mesurable.  $\square$

**Proposition 4.2.**

$$X_t(\xi) = e^{-\nu|\xi|^2 t} X_0(\xi) + \int_0^t \nu |\xi|^2 e^{-\nu|\xi|^2(t-s)} \times \left[ \frac{1}{2} \int X_s(\xi_1) X_s(\xi_2) K_\xi(d\xi_1, d\xi_2) + \frac{1}{2} \Phi(s, \xi) \right] ds$$

pour  $t \in [0, T]$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

*Preuve.* On calcule la valeur de  $E_{\xi,t}[M(X_0, \Phi, \omega)] = X_t(\xi)$  par définition. Dans un premier temps, on définit la partition suivante. A partir d'un certain temps  $t$  (naissance d'une particule), il y a 3 possibilités:

- soit il ne se passe rien jusqu'au temps 0. ( $t_\varnothing \leq 0$ )
- soit l'individu meurt à un temps  $t_\varnothing > 0$  ( $\nu_\varnothing = 0$ )
- soit il y a naissance de deux individus au temps  $t_\varnothing > 0$ . ( $\nu_\varnothing = 1$ )

D'où la séparation de l'espérance en 3 parties distinctes.

Utilisons la formule des espérances totales (4.2):

$$E_{\xi,t}[M(X_0, \Phi, \omega)] = E_{\xi,t}[M\mathbf{1}_{\{t_\varnothing \leq 0\}}] + E_{\xi,t}[M\mathbf{1}_{\{t_\varnothing > 0, \nu_\varnothing = 1\}}] + E_{\xi,t}[M\mathbf{1}_{\{t_\varnothing > 0, \nu_\varnothing = 0\}}]$$

On calcule chaque partie séparément.

**a.** Pour le premier élément de l'égalité, on a:

$$\begin{aligned} E_{\xi,t}[M\mathbf{1}_{\{t_\varnothing \leq 0\}}] &= E_{\xi,t}[E(M\mathbf{1}_{\{t_\varnothing \leq 0\}} | \mathcal{F}_0)] \\ &= E_{\xi,t}[X_0(\xi)P(t_\varnothing \leq 0 | \mathcal{F}_0)] \\ &= e^{-\nu|\xi|^2 t} X_0(\xi) \end{aligned}$$

Cela est dû à la contribution à l'appartenance à l'ensemble  $\partial_0 N(w)$ .

**b.** On regarde ici la partie où l'élément donne naissance à deux nouvelles particules au temps  $t_\varnothing$ . La probabilité qu'il y ait naissance est de  $\frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned} E_{\xi,t}[M\mathbf{1}_{\{t_\varnothing > 0, \nu_\varnothing = 1\}}] &= E_{\xi,t}[E(M\mathbf{1}_{\{t_\varnothing > 0, \nu_\varnothing = 1\}} | \mathcal{F}_{t_\varnothing})] \\ &= E_{\xi,t}[\mathbf{1}_{\{t_\varnothing > 0, \nu_\varnothing = 1\}} E(M | \mathcal{F}_{t_\varnothing})] \\ &= E_{\xi,t}[\mathbf{1}_{\{t_\varnothing > 0, \nu_\varnothing = 1\}} E_{t_\varnothing}(M | \mathcal{F}_{t-t_\varnothing})] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \nu |\xi|^2 e^{-\nu|\xi|^2(t-s)} \int E_{\xi_1,s}[M] E_{\xi_2,s}[M] K_\xi(d\xi_1, d\xi_2) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \nu |\xi|^2 e^{-\nu|\xi|^2(t-s)} \int X_s(\xi_1) X_s(\xi_2) K_\xi(d\xi_1, d\xi_2) ds \end{aligned}$$



c. On regarde ici la partie où l'élément meurt au temps  $t_\varnothing$ . La probabilité que l'élément meurt est de  $\frac{1}{2}$ . De plus on lui attribue la contribution suivante:  $\Phi(t_\varnothing, \xi_\varnothing)$  par appartenance à l'ensemble  $\partial_+ N(w)$ . L'égalité donne alors:

$$\begin{aligned} E_{\xi,t}[M\mathbf{1}_{\{t_\varnothing>0,\vartheta_\varnothing=0\}}] &= E_{\xi,t}[E(M\mathbf{1}_{\{t_\varnothing>0,\vartheta_\varnothing=0\}}|\mathcal{F}_{t_\varnothing})] \\ &= E_{\xi,t}[\mathbf{1}_{\{t_\varnothing>0,\vartheta_\varnothing=0\}}E(M|\mathcal{F}_{t_\varnothing})] \\ &= E_{\xi,t}[\mathbf{1}_{\{t_\varnothing>0,\vartheta_\varnothing=0\}}E_{t_\varnothing}(M|\mathcal{F}_{t-t_\varnothing})] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \nu |\xi|^2 e^{-\nu|\xi|^2(t-s)} \Phi(s, \xi) ds \end{aligned}$$

On obtient alors:

$$\begin{aligned} E_{\xi,t}[M(X_0, \Phi, \omega)] &= e^{-\nu|\xi|^2 t} X_0(\xi) + \frac{1}{2} \int_0^t \nu |\xi|^2 e^{-\nu|\xi|^2(t-s)} \int X_s(\xi_1) X_s(\xi_2) K_\xi(d\xi_1, d\xi_2) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \nu |\xi|^2 e^{-\nu|\xi|^2(t-s)} \Phi(s, \xi) ds \\ &= e^{-\nu|\xi|^2 t} X_0(\xi) + \frac{1}{2} \int_0^t \nu |\xi|^2 e^{-\nu|\xi|^2(t-s)} \left[ \int X_s(\xi_1) X_s(\xi_2) K_\xi(d\xi_1, d\xi_2) + \Phi(s, \xi) \right] ds \end{aligned}$$

□

La combinaison des deux propositions termine la preuve du lemme (4.1) □

**Lemme 4.2.** Pour chaque  $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , on a:

$$t \in [0, T] \rightarrow e^{\nu|\xi|^2 t} X_t(\xi) \in [0, \infty] \text{ est croissante}$$

*Preuve.* Reprenons l'équation de la proposition (4.2) et multiplions celle-ci par  $e^{\nu|\xi|^2 t}$ .

$$\begin{aligned} X_t(\xi) &= e^{-\nu|\xi|^2 t} X_0(\xi) + \int_0^t \nu |\xi|^2 e^{-\nu|\xi|^2(t-s)} \times \left[ \frac{1}{2} \int X_s(\xi_1) X_s(\xi_2) K_\xi(d\xi_1, d\xi_2) + \frac{1}{2} \Phi(s, \xi) \right] ds \\ e^{\nu|\xi|^2 t} X_t(\xi) &= X_0(\xi) + \int_0^t \nu |\xi|^2 e^{\nu|\xi|^2 s} \times \left[ \frac{1}{2} \int X_s(\xi_1) X_s(\xi_2) K_\xi(d\xi_1, d\xi_2) + \frac{1}{2} \Phi(s, \xi) \right] ds \end{aligned}$$

$X_0$  et  $\Phi$  sont des fonctions positives mesurables.  $\nu |\xi|^2 e^{\nu|\xi|^2 s} \times \left[ \frac{1}{2} \int X_s(\xi_1) X_s(\xi_2) K_\xi(d\xi_1, d\xi_2) + \frac{1}{2} \Phi(s, \xi) \right]$  est donc une fonction positive.

Par intégration, on en déduit que la fonction est croissante par rapport à  $t$ . □

## VI. Simulation

Le but de cette partie est de proposer une simulation des processus de branchement. En effet, on aimerait simuler l'équation (FNS) à partir du processus de branchement expliqué ci-dessus.

Dans un premier temps, on introduira des théorèmes nécessaires à la simulation de celui-ci.

Dans un second temps, nous expliquerons notre méthode de programmation.

Enfin, nous analyserons les résultats obtenus.

## a. Préliminaire

On introduit donc les théorèmes suivants que l'on admettra par manque de temps. Ils sont nécessaires et présentent la finalité de l'article sur l'étude probabiliste. En effet, il présente l'existence d'une solution de (FNS) mais aussi l'unicité de celle-ci pour certaines classes de fonctions.

**Théorème 4.3** (Existence).

*Supposons que:*

$$E_{\xi,t}[M(X_0, \Phi, \omega)] < \infty \quad \forall \xi \quad (4.1)$$

*Si  $\chi_0, \varphi$  satisfont les conditions du théorème (??) et*

$$|\chi_0| \leq X_0, |\varphi| \leq \Phi \quad (4.2)$$

$$\text{alors : } \chi_t(\xi) = \begin{cases} E_{\xi,t}[R(\chi_0, \varphi, \omega)], & \text{si (4.1) est satisfaite} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

*Celle-ci définit une solution de (FNS) sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  tel que:*

$$|\chi_t(\xi)| \leq X_t(\xi) \text{ sur } [0, T] \times \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \quad (4.3)$$

Le théorème d'unicité suivant nous permet de simuler notre solution.

**Théorème 4.4** (Unicité).

*Si  $\chi_t(\xi)$  est une solution de l'équation (FNS) sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .*

*Soit  $\chi_0, \varphi$  deux fonctions positives mesurables et les conditions (4.1), (4.2), (4.3) du théorème (4.3) sont vérifiées, alors pour tout  $\xi$ :*

$$\chi_t(\xi) = E_{\xi,t}[R(\chi_0, \varphi, w)], \quad t \in [0, T]$$

On remarque ici que si l'on est capable de simuler  $R(\chi_0, \varphi, w)$  à partir du processus de branchement, alors il est possible d'utiliser une méthode de type Monte Carlo pour simuler  $\chi_t(\xi)$ .

## b. Méthode de programmation

Notre simulation s'effectue en 2 étapes:

1. Création de l'arbre à partir d'une particule initiale.
2. Remontée de l'arbre en appliquant les calculs explicités ci-dessus.

On répète cela un grand nombre de fois ce qui permet grâce à la loi des grands nombres de nous approcher de l'espérance et donc de donner une valeur à  $\chi_t(\xi)$ .

La programmation a été réalisé en C. Expliquons plus en détail chacune des étapes:

### Étape 1:

La création de l'arbre est l'étape la plus importante de notre simulation. Pour éviter de stocker trop de valeurs (utilisation de matrices), on a créé deux structures:

- Le Noeud. On lui associe: deux fils (un droit, un gauche), un père qui sont aussi des noeuds, puis on ajoute des valeurs nécessaires pour la simulation. Par exemple, la position dans l'arbre, le temps de création du noeud ou la position de  $\xi$  associé à ce noeud.

- L'arbre. C'est notre structure principale, à partir d'un noeud de départ, on lui ajoute de nouveaux noeuds pour former l'arbre.

Par la suite, on est capable de se déplacer dans l'arbre grâce aux pointeurs.  
Pour simuler le processus de branchement, on crée une fonction qui permet de créer deux nouveaux noeuds avec une probabilité de  $\frac{1}{2}$ .

Le principe principal de notre algorithme est basé sur le fait de passer une unique fois sur chaque noeud, cela permet une création facile et rapide de l'arbre. On implémente alors une fonction permettant le fonctionnement de ce processus.

### Étape 2:

On a maintenant notre arbre contenant nos noeuds. Il faut alors effectuer la remontée. Chaque noeud contenant une certaine position, on utilise alors les opérations citées plus haut que l'on applique à chaque couple de branche. La remontée s'effectue étape par étape.

### Étape3:

On a effectué la remontée. On obtient donc l'expression de  $R(\chi_0, \varphi, w)$ . Pour obtenir la valeur de  $\chi_t$ , d'après le théorème 4.4, on doit calculer  $E_{\xi,t}[R(\chi_0, \varphi, w)]$ . C'est ici que les méthodes de Monte Carlo entre en jeu.

**Définition 4.10** (Méthode de Monte Carlo).

*La méthode de Monte Carlo consiste à approcher  $E[g(X)]$  en utilisant la loi des grands nombres. En effet:*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \rightarrow E[g(X)] \quad p.s$$

Dans notre cas, il suffit de réaliser le processus un grand nombre de fois, de calculer une moyenne des  $R(\chi_0, \varphi, w)$  obtenu. On obtient une solution de Navier-Stokes en représentation de Fourier.

### Étape4:

Après avoir obtenu la solution dans cette représentation, il faut repasser dans l'espace de départ. Pour cela, on utilise l'algorithme des transformations de Fourier rapide.

## c. Résultats

Par manque de temps, nous n'avons pas pu obtenir pour l'instant des résultats numériques concluant. Toutes les fonctions nécessaires ont été implémentées, mais les résultats obtenus ne sont pas finalisés.

# Chapitre 5

## Simulation Numérique en 2D

On cherche dans ce chapitre à simuler les équations de Navier-Stokes incompressibles sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  borné que l'on va rappeler : soit  $u \in C^1(0, T; C^2(\Omega))$ ,  $p \in C^1(\Omega)$  tel que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla p - u \cdot \nabla u + \nu \Delta u & \text{sur } \Omega \\ \operatorname{div}(u) = 0 \\ + \text{conditions aux limites} \end{cases} \quad (5.1)$$

Le problème a deux inconnues :  $u$  et  $p$ . Nous allons voir que le problème principal pour simuler l'équation est de respecter la condition  $\operatorname{div}(u) = 0$ .

Dans un premier temps, nous allons discrétiser ce problème en temps avec un schéma d'ordre 1 en temps pour introduire la méthode générale pour respecter la condition  $\operatorname{div}(u) = 0$ . Puis nous améliorerons ce schéma pour atteindre un ordre 2 de convergence en temps et en espace.

### I. Etude rapide du problème

**Proposition 5.1** (Différence finie d'ordre 1 en temps). *Soit  $u \in C^1(0, T, \cdot)$ , alors :*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

Avec  $\Delta t$  un pas de temps constant.

Soit  $(t_n)_n$  la discrétisation de l'intervalle  $[0, T]$  avec le pas  $\Delta t$  constant. On utilise la notation suivante :  $u(t, \cdot) = u^n$ .

On va discrétiser en temps l'équation (5.1) avec un schéma explicite d'ordre 1 en temps. On a :

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t(-\nabla p^n - u^n \cdot \nabla u^n + \nu \Delta u^n)$$

Supposons que le champ  $u^n$  est à divergence nulle. On va montrer que  $u^{n+1}$  n'est pas nécessairement à divergence nulle :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot u^{n+1} &= \nabla \cdot u^n + \Delta t(-\nabla \cdot \nabla p^n - \nabla \cdot (u^n \cdot \nabla u^n) + \nu \nabla \cdot \Delta u^n) \\ \nabla \cdot u^{n+1} &= \Delta t(-\Delta p^n - \nabla \cdot (u^n \cdot \nabla u^n)) \end{aligned}$$

Ainsi, on a que :

$$\operatorname{div}(u^{n+1}) = 0 \iff \operatorname{div}(u^n \cdot \nabla u^n) = -\Delta p^n$$

On remarque que l'on cherche alors  $p^{n+1}$  tel que  $\operatorname{div}(u^{n+1}) = 0$ . On va donc construire la suite  $p^n$  dans cette optique. Voici donc le problème réécrit avec la notation en temps :

Trouver  $u^{n+1}$  et  $p^{n+1}$  tel que :

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + \Delta t(-\nabla p^{n+1} - u^n \cdot \nabla u^n + \nu \Delta u^n) \\ \operatorname{div}(u^{n+1}) = 0 \end{cases}$$

On doit maintenant trouver une manière de corriger le champs  $u$  au temps  $n + 1$  de manière à respecter la condition  $\operatorname{div}(u) = 0$

On aimerait alors à chaque pas de temps projeter la solution à divergence non nulle  $u^{n+1}$  sur l'espace des fonctions vectorielles à divergence nulle.

**Proposition 5.2.**  $(L^2(\Omega))^2$ , muni du produit scalaire  $(f, g) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} f^i g^i dx$  est un espace de Hilbert.

**Proposition 5.3.** Soit  $S = \{v \in (L^2(\Omega))^2 : \operatorname{div}(v) = 0, v \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \subset (L^2(\mathbb{R}^2))^2$ . Alors  $S$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $(L^2(\mathbb{R}^2))^2$ .

La dernière proposition permet d'affirmer qu'il est possible de projeter orthogonalement toute fonction de  $(L^2(\mathbb{R}^2))^2$  dans l'espace  $S$  et donc d'écrire :

$$(L^2(\Omega))^2 = S \oplus S^T$$

Le théorème suivant permet de caractériser  $S^T$ .

**Théorème 5.1.** Soit :

$$S_{f=0} = \{v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} v = 0\}$$

Alors on a la décomposition orthogonale suivante :

$$(L^2(\Omega))^2 = S \oplus \nabla S_{f=0}$$

On peut déterminer une méthode générale de simulation du problème :

**Théorème 5.2** (Méthode générale de simulation du problème). On suppose que l'on a réussi à construire au temps  $t$  la solution  $u^n$  et  $p^n$ , avec  $\operatorname{div} u^n = 0$ . Alors, on peut construire  $u^{n+1}$  et  $p^{n+1}$ , de manière à avoir  $\operatorname{div}(u^{n+1}) = 0$  en 4 étapes :

1. Calculer  $u^*$  tel que :

$$u^* = u^n + \Delta t(-\nabla p^n - u^n \nabla u^n + \nu \Delta u^n)$$

2. Résoudre :

$$\Delta \phi = \frac{1}{\Delta t} \operatorname{div}(u^*)$$

3. Etape de correction :

$$u^{n+1} = u^* - \Delta t \nabla \phi$$

4. *Avancement du champs de pression :*

$$p^{n+1} = p^n + \phi$$

*Preuve.* On se place dans les hypothèses du théorème. On calcule alors le champs :

$$u^* = u^n + \Delta t (-\nabla p^n - u^n \nabla u^n + \nu \Delta u^n)$$

On sait par les raisonnement précédents que  $div(u^*) \neq 0$ . On va corriger ce champs par le théorème 5.1 :  $\exists \phi \in S_{f=0}$  tel que :

$$u^* = u^{n+1} + \nabla \phi$$

La pression va servir à projeter le champs. En effet, précédemment on a décidé de construire la suite  $(p^n)$  de manière à avoir :

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t (-\nabla p^{n+1} - u^n \nabla u^n + \nu \Delta u^n)$$

Avec :  $div(u^{n+1}) = 0$

Or ,

$$\begin{aligned} u^{n+1} - u^* &= -\nabla \phi \\ \iff \Delta t (-\nabla p^{n+1} + \nabla p^n) &= -\nabla \phi \\ \iff \nabla p^{n+1} &= \nabla p^n + \frac{1}{\Delta t} \nabla \phi \\ \iff \nabla p^{n+1} &= \nabla (p^n + \frac{1}{\Delta t} \phi) \\ \iff p^{n+1} &= p^n + \frac{1}{\Delta t} \phi \end{aligned}$$

On sait maintenant actualiser la pression. Il ne reste plus qu'à déterminer  $\phi$ . On doit absolument avoir :

$$div(u^{n+1}) = div(u^*) - div(\nabla \phi) = 0$$

Ainsi on obtient la relation :

$$\Delta \phi = div(u^*)$$

On obtient bien les équations du théorème en posant :

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{\Delta t} \phi$$

□

## II. Discrétisation en temps du problème

### a. Adimensionnement

On débute tout d'abord par transformer le terme convectif  $u \cdot \nabla u$ .

**Proposition 5.4** (terme convectif). *Soit  $u \in C^1(0, T; C^2(\mathbb{R}^2))$ ,  $u = (u_1, u_2)$ , avec la condition  $\operatorname{div} u = 0$ . Alors on a :*

$$u \cdot \nabla u = (u \cdot \nabla)u = \operatorname{div}(u \otimes u)$$

avec  $u \otimes u \in M_2(\mathbb{R})$ ,  $(u \otimes u)_{i,j} = u_i u_j$

*Preuve.* La première égalité est directe .

Pour la seconde, on écrit :

$$\begin{aligned} (u \cdot \nabla)u &= (u_1 \partial_x + u_2 \partial_y) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 \partial_x u_1 + u_2 \partial_y u_1 \\ u_1 \partial_x u_2 + u_2 \partial_y u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \partial_x u_1^2 + \partial_y (u_1 u_2) - u_1 \partial_y u_2 \\ \partial_x (u_1 u_2) - u_2 \partial_x u_1 + \frac{1}{2} \partial_y u_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x u_1^2 + \partial_y (u_1 u_2) \\ \partial_x (u_1 u_2) + \partial_y u_2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_1 \partial_y u_2 + \partial_x u_1^2 \\ u_2 \partial_x u_1 + \partial_y u_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x u_1^2 + \partial_y (u_1 u_2) \\ \partial_x (u_1 u_2) + \partial_y u_2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_1 - \operatorname{div}(u) \\ u_2 - \operatorname{div}(u) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or  $\operatorname{div}(u) = 0$ , on a donc bien :

$$\begin{aligned} (u \cdot \nabla)u &= \begin{pmatrix} \partial_x u_1^2 + \partial_y (u_1 u_2) \\ \partial_x (u_1 u_2) + \partial_y u_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{div}(u \otimes u) \end{aligned}$$

□

On réécrit alors les équations de Navier-Stokes en dimension 2 d'espace, avec comme terme convectif  $\operatorname{div}(u \otimes u)$ , en détaillant chaque composantes. En particulier, on considère maintenant que la masse volumique du fluide  $\rho$  n'est plus égale à 1 : on introduit donc ce terme. Soit  $u = (u_1, u_2)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \operatorname{div}(u \otimes u) + \nu \Delta u \\ \operatorname{div}(u) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \left( \frac{\partial u_1^2}{\partial x} + \frac{\partial u_1 u_2}{\partial y} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \left( \frac{\partial u_1 u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2^2}{\partial y} \right) + \nu \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) \\ \operatorname{div}(u) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

On suppose que le fluide s'écoule dans un domaine  $[0, L] \times [0, L]$  avec  $L > 0$ , avec  $t \in [0, T]$ . L'adimensionnement consiste à faire en sorte que les variables ne dépendent pas d'un système métrique particulier. Ainsi, comme la position  $(x, y)$  dépend de la longueur  $L$ , on pose :

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \frac{x}{L} \\ \tilde{y} &= \frac{y}{L}\end{aligned}$$

On fait de même avec  $u$  qui désigne la vitesse du fluide. Pour cela, on définit  $U_0$ , la vitesse caractéristique du fluide (rapport distance/temps), tel que :

$$U_0 = \frac{L}{T}$$

On a alors :

$$\tilde{u} = \frac{u}{U_0}$$

On adimensionne maintenant le temps.

$$\tilde{t} = \frac{t}{T} = \frac{t}{L/U_0}$$

Le paramètre  $\nu$  représente la viscosité du fluide. On sait que  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ , avec  $\mu$  le coefficient de viscosité dynamique en Pascal seconde (pression fois temps). Il ne nous reste plus qu'à adimensionner la pression. On sait que cette grandeur représente

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho U_0^2}$$

On effectue ces changements de variables dans l'équation 5.2, par composition, ce qui donne la proposition suivante :

**Proposition 5.5** (Equations de Navier-Stokes en dimension 2, adimensionnées).

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = -\nabla p - \operatorname{div}(u \otimes u) + \frac{1}{Re} \Delta u \\ \operatorname{div}(u) = 0 \end{cases}$$

Avec  $Re$  le nombre de Reynolds défini comme  $Re = \frac{U_0 L}{\nu}$

*Preuve.* On note  $\sigma$  l'application qui à  $(t, x, y)$  associe  $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y})$ . Par composition, on a :

$$\begin{aligned} D\tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}) &= \frac{1}{U_0} D(u \circ \sigma)(t, x, y) \\ &= \frac{1}{U_0} Du(\sigma(t, x, y)) \circ D\sigma(t, x, y) \\ &= \frac{1}{U_0} \left( \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \circ \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} & \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{t}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} & \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{U_0} \left( \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \circ \begin{pmatrix} \frac{1}{T} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que :



$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{T U_0} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{L} \frac{\partial u}{\partial t}$$

car  $U_0 = \frac{L}{T}$ .

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{L U_0} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{L U_0} \frac{\partial u}{\partial y}$$

Le fonctionnement pour les dérivées secondes est le même :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{L^2 U_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{L^2 U_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \implies \Delta \tilde{u} = \frac{1}{L^2 U_0^2} \Delta u$$

On s'occupe maintenant du terme convectif  $div(u \otimes u)$ . On a immédiatement que  $\tilde{u} * \tilde{u} = \frac{1}{U_0^2} u * u$ .  
Et donc :

$$div(\tilde{u} \otimes \tilde{u}) = \frac{1}{L U_0^2} div(u \otimes u)$$

Pour la pression, on a aussi :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{L \rho U_0^2} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{L \rho U_0^2} \frac{\partial p}{\partial y} \end{cases} \implies \nabla \tilde{p} = \frac{1}{L \rho U_0^2} \nabla p$$

En rassemblant les termes établis et après simplification, on obtient bien le résultat. □

## b. Schéma numérique pour l'évolution en temps.

Nous allons maintenant établir un schéma d'ordre 2 en temps, celui-ci sera bien meilleur que celui exhibé précédemment.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla p - u \nabla u + \frac{1}{Re} \Delta u \\ div(u) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left( \frac{\partial u_1^2}{\partial x} + \frac{\partial u_1 u_2}{\partial y} \right) + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left( \frac{\partial u_1 u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2^2}{\partial y} \right) + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) \\ div(u) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Dans un premier temps, on va discrétiser cette équation en temps. Pour cela, on se munit d'un pas d'avancement  $\Delta t$  et par conséquent d'une suite  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ . Cela nous permet de réécrire la dérivée en temps, grâce à la formule de Taylor :

On note  $\Psi(t, x) = \left( \frac{\partial u_1^2}{\partial x} + \frac{\partial u_1 u_2}{\partial y}, \frac{\partial u_1 u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2^2}{\partial y} \right)$ . L'application de la proposition précédente nous donne le schéma :

$$u^{n+1} - u^n = \Delta t \left( -\nabla p^n - \Psi^n + \frac{1}{Re} \Delta u^n \right) \quad (5.4)$$

Celui-ci est incomplet : en effet, il ne respecte pas nécessairement la condition  $\operatorname{div}(u) = 0$ . Pour palier à cela, on ajoutera une étape de projection pour introduire cette condition.

Avant de poursuivre, on va réécrire notre équation de la manière suivante :

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla p - \Psi + \nu \Delta u \right. \iff \begin{cases} \frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla p \\ \frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial t} = -\Psi \\ \frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u \end{cases} \quad (5.5)$$

**Proposition 5.6** (Schéma de Crank-Nicolson d'ordre 2, semi-implicite). *Soit l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \Delta u$$

Alors le schéma de Crank-Nicolson pour cette équation est le suivant :

$$u^{n+1} = u^n + K \Delta t \frac{1}{2} (\Delta u^{n+1} + \Delta u^n)$$

De plus, ce schéma est d'ordre 1 en temps.

*Preuve.* On a que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u^{n+1} + u^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

On peut donc écrire : (Euler implicite)

$$\frac{u^{n+1} + u^n}{\Delta t} = K \Delta u^{n+1} + O(\Delta t)$$

et : (Euler explicite)

$$\frac{u^{n+1} + u^n}{\Delta t} = K \Delta u^n + O(\Delta t)$$

La somme des deux équations nous donne le résultat :

$$u^{n+1} = u^n + K \Delta t \frac{1}{2} (\Delta u^{n+1} + \Delta u^n)$$

Concernant l'ordre de convergence, on écrit par les formules de Taylor :

$$\Delta u^{n+1} = \Delta u^n + \Delta t \frac{\partial \Delta u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} + O(\Delta t^2)$$

Et

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^2)$$

On remplace maintenant ces approximations dans le schéma numérique et on obtient bien la convergence d'ordre 2. □

**Proposition 5.7** (Schéma d'Adams-Bashforth d'ordre 2, explicite). *Soit l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Psi$$

*Alors le schéma d'Adams-Bashforth pour cette équation est le suivant :*

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \left( \frac{3}{2} \Psi^n - \frac{1}{2} \Psi^{n-1} \right)$$

*Preuve.* On remarque que :

$$u(t + \Delta t) - u(t) = \int_t^{t+\Delta t} \Psi(t) dt$$

soit avec les notations :

$$u^{n+1} - u^n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Psi(t) dt$$

Soit  $P(t)$  le polynôme d'interpolation de Lagrange pour  $\Psi$ , pour deux points d'interpolation (en  $t_n$  et en  $t_{n-1}$ ).

$$P(t) = \Psi(t_n)L_0(t) + \Psi(t_{n-1})L_1(t)$$

Avec  $L_0(t) = \frac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} = \frac{t-t_{n-1}}{\Delta t}$  et  $L_1(t) = \frac{t-t_n}{t_{n-1}-t_n} = \frac{t-t_n}{-\Delta t}$

On peut donc approximer notre intégrale par :

$$u^{n+1} - u^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\Psi(t_n)(t - t_{n-1}) + \Psi(t_{n-1})(t - t_n)) dt$$

$$\begin{aligned} u^{n+1} - u^n &= \frac{1}{\Delta t} (\Psi(t_n) \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_{n-1}) dt + \Psi(t_{n-1}) \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n) dt) \\ &= \Delta t \left( \frac{3}{2} \Psi(t_n) - \frac{1}{2} \Psi(t_{n-1}) \right) \end{aligned}$$

De plus, on a par estimation d'erreur du polynôme d'interpolation de Lagrange :

$$|u(t) - P(t)| \leq C \left| \frac{(t - t_n)(t - t_{n-1})}{2} \right| = C \frac{\Delta t^2}{2}$$

Avec  $C$  une constante positive.

Donc, notre schéma est consistant d'ordre 2 en temps. □

Les deux schémas précédent permettent d'obtenir un schéma d'avancement pour notre équation.

**Proposition 5.8** (Schéma d'avancement de la solution (sans correction)). *On note le pas suivant avec la notation  $u^*$  (i.e avant le pas de projection), obtenu par la relation*

$$u^* - u^n = \Delta t \left( -\nabla p^n + \frac{3}{2} \Psi^n - \frac{1}{2} \Psi^{n-1} + \frac{1}{Re} \Delta \left( \frac{u^* + u^n}{2} \right) \right)$$

*Soit :*

$$\left( 1 - \frac{\Delta t}{2Re} \Delta \right) u^* = u_n + \Delta t \left( -\nabla p^n + \frac{3}{2} \Psi^n - \frac{1}{2} \Psi^{n-1} + \frac{1}{2Re} \Delta u^n \right)$$

On s'appuie maintenant sur le théorème ?? pour établir la méthode de simulation. On va donc transcrire ce théorème avec notre schéma d'ordre 2 :

**Théorème 5.3** (Simulation du problème). *On suppose que l'on a réussi à construire au temps  $t_n$  la solution  $u^n$  et  $p^n$  de manière à avoir  $\text{div } u^n = 0$ . Alors, on peut construire  $u^{n+1}$  et  $p^{n+1}$ , de manière à avoir  $\text{div}(u^{n+1}) = 0$  en 4 étapes :*

1. Calculer  $u^*$  tel que :

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2Re} \Delta\right)u^* = u^n + \Delta t \left( -\nabla p^n + \frac{3}{2}\Psi^n - \frac{1}{2}\Psi^{n-1} + \frac{1}{2Re} \Delta u^n \right)$$

2. Résoudre :

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\Delta t} \text{div}(u^*)$$

3. Etape de correction :

$$u^{n+1} = u^* - \Delta t \nabla \phi$$

4. Avancement du champs de pression :

$$p^{n+1} = p^n + \phi - \frac{\Delta t}{2Re} \Delta \phi$$

### III. Discrétisation en espace du problème

#### a. Maillage et conditions de bord

Nous allons maintenant discrétiser notre problème en espace, avec un schéma d'ordre 2. On se muni d'un maillage régulier, avec un pas  $\Delta h > 0$ , qui couvre le carré  $[0, L] \times [0, L]$ .

On cherche alors à discrétiser notre schéma.

Pour cela, nous allons lister les points de notre maillage selon un ordre lexicographique. Soit  $N$  le nombre de points par côtés, on obtient :

$$\begin{array}{ccccccc} x_{N(N-1)} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_{N*N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_{2N-1} \\ x_0 & x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_{N-1} \end{array}$$

Depuis le début du chapitre, nous avons noté les applications partielles selon la manière suivante :  $u = (u_1, u_2)$ . Il nous faut changer de notation pour la suite. On écrit alors  $u = (v, w)$ .

De plus, on utilise la notation suivante :

$$f(t, ih, jh) = f_{i+jN}^n$$

Pour pouvoir bien poser notre problème, nous avons besoin de conditions de bord. Nous avons fait le choix de 4 possibilités différentes :

1. Dirichlet partout ( $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ )
2. Périodique partout ( $u(t, 0, y) = u(t, L, y), \forall y \in [0, L]$  et  $u(t, x, 0) = u(t, x, L), \forall x \in [0, L]$ )
3. Dirichlet sur les bords gauche et droit, périodiques sur les bords hauts et bas
4. Périodiques sur les bords hauts et bas, Dirichlet sur les bords gauche et droit,

On regroupe alors les indices pour chacun des côtés dans les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} C_1 &= \{0, 1, \dots, N-1\} \text{ côté bas du carré} \\ C_2 &= \{N-1, 2N-1, \dots, N^2\} \text{ côté droit du carré} \\ C_3 &= \{N(N-1), N(N-1)+1, \dots, N^2\} \text{ côté haut du carré} \\ C_4 &= \{0, N, \dots, N(N-1)\} \text{ côté gauche du carré} \end{aligned}$$

Et on pose  $C = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4$ .

On prend maintenant en considération les conditions de bord dans chacun des cas.

### Cas 1 :

On a que  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall i \in C_1, u_{i-N} &= 0 \\ \forall i \in C_2, u_{i+1} &= 0 \\ \forall i \in C_3, u_{i+N} &= 0 \\ \forall i \in C_4, u_{i-1} &= 0 \end{aligned}$$

### Cas 2 :

On a des conditions périodiques sur les bords. Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall i \in C_1, u_{i-N} &= u_{i+N(N-1)} \\ \forall i \in C_2, u_{i+1} &= u_{i-N-1} \\ \forall i \in C_3, u_{i+N} &= u_{i-N(N-1)} \\ \forall i \in C_4, u_{i-1} &= u_{i+N-1} \end{aligned}$$

### Cas 3 :

On a des conditions périodiques sur les bords haut et bas et  $u = 0$  sur les bords gauche et droit .Ainsi :

$$\begin{aligned}\forall i \in C_1, u_{i-N} &= u_{i+N(N-1)} \\ \forall i \in C_2, u_{i+1} &= 0 \\ \forall i \in C_3, u_{i+N} &= u_{i-N(N-1)} \\ \forall i \in C_4, u_{i-1} &= 0\end{aligned}$$

### Cas 4 :

On a des conditions périodiques sur les bords gauche et droit et  $u = 0$  sur les bords haut et bas .Ainsi :

$$\begin{aligned}\forall i \in C_1, u_{i-N} &= 0 \\ \forall i \in C_2, u_{i+1} &= u_{i-N-1} \\ \forall i \in C_3, u_{i+N} &= 0 \\ \forall i \in C_4, u_{i-1} &= u_{i+N-1}\end{aligned}$$

## b. Discrétisation des opérateurs différentiels

Pour le gradient de pression, et le terme convectif nous utilisons des différences finies centrées :

**Proposition 5.9** (Différence finie centrée). *Soit  $f \in C^1(\Omega)$  , alors on a que :*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f_{i+N} - f_{i-N}}{2h} + O(h^2)$$

Ainsi, on obtient la discrétisation du gradient de pression par :

$$\frac{\partial p}{\partial x} \simeq \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2h}$$

et

$$\frac{\partial p}{\partial y} \simeq \frac{p_{i+N} - p_{i-N}}{2h}$$

Pour le terme convectif  $div(u \otimes u)$ , on a que :

$$div(u \otimes u) = \begin{cases} \frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} \\ \frac{\partial(vw)}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial y} \end{cases}$$

Ainsi, on discrétise les dérivées des fonctions  $v^2$ ,  $vw$  et  $w^2$  pour obtenir la discrétisation totale de l'opérateur.

Sa discrétisation est donc :

$$\operatorname{div}(u \otimes u) \simeq \begin{cases} \frac{v_{i+1}^2 - v_{i-1}^2}{2h} + \frac{(vw)_{i+N} - (vw)_{i-N}}{2h} \\ \frac{(vw)_{i+1} - (vw)_{i-1}}{2h} + \frac{w_{i+N}^2 - w_{i-N}^2}{2h} \end{cases}$$

On discrétise également le Laplacien de la manière suivante :

**Proposition 5.10** (Discrétisation du laplacien). *Soit  $f \in C^2(\Omega)$ , alors on a que :*

$$\Delta f = \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{h^2} + \frac{f_{i+N} + f_{i-N} - 2f_i}{h^2} + O(h^2)$$

### c. Obtention de $u^*$ et résolution du problème de Poisson

Reprenons le théorème ???. Dans la première étape, il faut résoudre :

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2Re} \Delta\right) u^* = u^n + \Delta t \left( -\nabla p^n + \frac{3}{2} \Psi^n - \frac{1}{2} \Psi^{n-1} + \frac{1}{2Re} \Delta u^n \right)$$

Nous avons vu précédemment la discrétisation en espace de cette étape. Nous allons donc regrouper les termes du second membre par :

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = u^n + \Delta t \left( -\nabla p^n + \frac{3}{2} \Psi^n - \frac{1}{2} \Psi^{n-1} + \frac{1}{2Re} \Delta u^n \right)$$

On discrétise alors l'opérateur différentiel dit de Helmholtz  $(1 - \frac{\Delta t}{2Re} \Delta)$ . Appliqué à la solution  $u^*$ , cela donne :

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2Re} \Delta\right) u^* = u^* - \frac{\Delta t}{2Re} \Delta u^*$$

Ainsi, on a, en dehors des points sur la frontière du maillage :

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\Delta t}{2Re} \Delta\right) v_i^* &= v_i^* - \frac{\Delta t}{2Re} \left( \frac{v_{i+1}^* + v_{i-1}^* - 2v_i^*}{h^2} + \frac{v_{i+N}^* + v_{i-N}^* - 2v_i^*}{h^2} \right) = (F_1)_i \\ \left(1 - \frac{\Delta t}{2Re} \Delta\right) w_i^* &= w_i^* - \frac{\Delta t}{2Re} \left( \frac{w_{i+1}^* + w_{i-1}^* - 2w_i^*}{h^2} + \frac{w_{i+N}^* + w_{i-N}^* - 2w_i^*}{h^2} \right) = (F_2)_i \end{cases}$$

Soit  $H \in M_{N^2 \times N^2}(\mathbb{R})$  la matrice de l'opérateur de Helmholtz discrétisé. Cette matrice a pour forme :

$$H = \begin{pmatrix} \boxed{A} & B & 0 & 0 & 0 & \boxed{C} \\ B & \boxed{A} & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & \boxed{A} & B \\ \boxed{C} & 0 & 0 & 0 & B & \boxed{A} \end{pmatrix}$$

Avec  $A, B, C \in M_{N \times N}(\mathbb{R})$ . Les sous-matrices encadrées signifie qu'elle dépendent des conditions de bords.

Dans le cas où on a une condition au limitee de Dirichlet sur le bord gauche et droit, on a que  $A$  a pour forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\Delta t}{Re} & -\frac{\Delta t}{2Re} & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta t}{2Re} & 1 - \frac{\Delta t}{Re} & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & -\frac{\Delta t}{2Re} \\ 0 & 0 & -\frac{\Delta t}{2Re} & 1 - \frac{\Delta t}{Re} \end{pmatrix}$$

Sinon si on a des conditions périodiques sur les bords gauche et droit on utilise :

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\Delta t}{Re} & -\frac{\Delta t}{2Re} & 0 & -\frac{\Delta t}{2Re} \\ -\frac{\Delta t}{2Re} & 1 - \frac{\Delta t}{Re} & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & -\frac{\Delta t}{2Re} \\ -\frac{\Delta t}{2Re} & 0 & -\frac{\Delta t}{2Re} & 1 - \frac{\Delta t}{Re} \end{pmatrix}$$

Ensuite, si on a des conditions de Dirichlet sur les bords haut et bas, on a que  $C = 0$  et sinon :

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta t}{2Re} & 12 & 13 & 14 \\ 21 & -\frac{\Delta t}{2Re} & 23 & 24 \\ 31 & 32 & \cdot & 34 \\ 41 & 42 & 43 & -\frac{\Delta t}{2Re} \end{pmatrix}$$

Et dans tout les cas on a :

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta t}{2Re} & 12 & 13 & 14 \\ 21 & -\frac{\Delta t}{2Re} & 23 & 24 \\ 31 & 32 & \cdot & 34 \\ 41 & 42 & 43 & -\frac{\Delta t}{2Re} \end{pmatrix}$$

On doit donc résoudre, pour obtenir  $u^*$  à chaque étape :

$$\begin{cases} H v^* = F_1 \\ H w^* = F_2 \end{cases}$$

. Il faut ensuite résoudre le problème de Poisson

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\Delta t} \text{div}(u^*)$$

On établit donc la matrice du Laplacien :

$$(\Delta \phi)_i = \frac{\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i}{h^2} + \frac{\phi_{i+N} + \phi_{i-N} - 2\phi_i}{h^2}$$

Pour le second membre on pose :

$$G_i = \left( -\frac{1}{\Delta t} \text{div}(u^*) \right)_i = -\frac{1}{\Delta t} \left( \frac{v_{i+1}^* - v_{i-1}^*}{2h} + \frac{w_{i+N}^* - w_{i-N}^*}{2h} \right)$$

Notons  $L$  la matrice obtenue. On remarque que cette matrice a exactement le même profil que la matrice de Helmutz. On n'écrira donc pas la forme de  $L$ , il suffit de se référer à la construction de la matrice  $H$  et d'utiliser les bons coefficients.. On doit donc résoudre :

$$L \phi = G$$



#### d. Résolution informatique des systèmes linéaires

Dans tout les cas exhibés précédemment, la matrice obtenue est creuse, organisé sous formes de diagonales. Informatiquement, nous allons donc stocker cette matrice avec un vecteur qui contient la position des diagonale (0 pour la diagonale, -1 pour la première sous diagonale, 1 pour la première sur-diagonale etc..), et un tableau de vecteur qui contient la diagonale éventuelle et les sous diagonales. Voici un exemple :

$$\text{Matrice pleine} \iff \text{Vecteur position} ; \text{Tableau de vecteur contenant les diagonales}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 0 & 14 \\ 0 & 22 & 23 & 0 \\ 31 & 0 & 33 & 34 \\ 0 & 42 & 0 & 44 \end{pmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 11 & 31 & 12 & 14 \\ 22 & 42 & 23 & * \\ 33 & * & 34 & * \\ 44 & * & * & * \end{bmatrix}$$

Cela permet de stocker moins de coefficients et d'accélérer les opérations, en particulier le produit matrice / vecteur. Voici l'algorithme qui permet d'effectuer le produit matrice vecteur. On note *diag\_pos* le vecteur contenant la position des diagonales de A, et *D* le tableau contenant les diagonales.

---

**Algorithm 1** Produit matrice/vecteur  $A*v = w$

---

**Require:** *diag\_pos, D, v, N*

*nb\_diag = ncols(D) // ncols* renvoi le nombre de colonne d'un tableau

**while** *k < nb\_diag* **do**

**if** *diag\_pos(k) < 0* **then**

*offset = abs(diag\_pos(k)) // abs* renvoi la valeur absolue d'un nombre

**else**

*offset = 0*

**end if**

**if** *diag\_pos(k) > 0* **then**

*offset2 = abs(diag\_pos(k))*

**else**

*offset2 = 0*

**end if**

**while** *i < N - abs(diag\_pos(k))* **do**

*w(i + offset) = w(i + offset) + (D[k](i) \* v(i + offset2))*

*i ← i + 1*

**end while**

*k ← k + 1*

**end while**

---

Pour résoudre ces systèmes, on utilise la méthode du gradient conjugué dont on ne rappellera pas ici l'algorithme, en utilisant bien entendu l'algorithme précédent pour effectuer les produits matrice/vecteur .

## IV. Simulations

### a. Visualisation des résultats

Une fois le champs de vecteur vitesse  $u$  calculé par l'algorithme, on calcule deux autres manière de visualiser l'écoulement obtenu.

Tout d'abord, on peut calculer la vorticité de champs par l'expression :

$$w = \|\text{rot}(u)\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}$$

Intuitivement, cette fonction  $w$  représente donc la norme du vecteur "quantité de rotation", orthogonal nécessairement au champs  $u$  car  $u$  est dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . Le champs scalaire  $w$  va donc nous donner la position des tourbillons dans notre simulation.

On discrétise notre équation en tenant compte des conditions aux limites, et cela donne :

$$w_i^n \simeq \frac{w_{i+1}^n - w_{i-1}^n}{2h} - \frac{v_{i+N}^n - v_{i-N}^n}{2h}$$

On peut aussi suivre l'évolution d'un traceur scalaire au cours du temps. Pour cela, on utilise l'équation de convection/diffusion adimensionnée suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \gamma = \frac{1}{Pe} \Delta \gamma & \text{sur } \Omega \\ \gamma(0, x, y) = \gamma_0 \\ + \text{conditions de bords} \end{cases}$$

où le nombre  $Pe$  correspond au nombre de Peclet (sans dimension), défini par la formule :  $Pe = \frac{L U_0}{\kappa}$ , avec  $\kappa$  le coefficient de diffusion.

C'est une équation de diffusion classique, mais qui utilise la dérivée particulaire exhibée dans le chapitre 1 au lieu de la dérivée usuelle.

On discrétise cette équation avec le même schéma en temps et en espace que pour l'équation de Navier-Stokes (elles sont similaires). Cela nous permet d'avoir un schéma du même ordre que notre schéma numérique pour Navier-Stokes.

On discrétise notre équation tout d'abord en temps :

$$\left( I - \frac{\Delta t}{2Pe} \Delta \right) \gamma^{n+1} = \gamma^n + \Delta t \left( \frac{3}{2} (u^n \cdot \nabla) \gamma^n - \frac{1}{2} (u^{n-1} \cdot \nabla) \gamma^{n-1} + \frac{1}{2Pe} \Delta \gamma^n \right)$$

Maintenant on s'occupe de la discrétisation en espace. Concernant le second membre  $\gamma^n + \Delta t \left( \frac{3}{2} (u^n \cdot \nabla) \gamma^n - \frac{1}{2} (u^{n-1} \cdot \nabla) \gamma^{n-1} + \frac{1}{2Pe} \Delta \gamma^n \right)$ , sa discrétisation a déjà été develop  précédemment. On note sa discrétisation spatiale par le vecteur  $R$ . Concernant le membre de gauche, on réutilise la matrice de Helmotz  $H$  on a remplacé le terme  $Re$  par le terme  $Pe$ . On note alors  $\tilde{H}$  la matrice modifiée et on obtient le système linéaire suivant :

$$\tilde{H} \gamma^{n+1} = R$$

On va également afficher la norme  $L^2$  et  $H^1$  de la solution obtenue informatiquement, en remarquant que pour la norme  $L^2$ , cette dernière indique en fait l'énergie cinétique du système à chaque instant, à un facteur  $\frac{1}{2} * masse$  près.

## b. Tourbillons

Dans cette simulation, nous allons placer au temps 0 des tourbillons, que nous allons laisser évoluer librement. Le champs initial associé à un tourbillon est de la forme :

$$u_0(x, y) = \begin{cases} v_0(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ w_0(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

Avec :

$$\psi(x, y) = I_0 e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{l^2}}$$

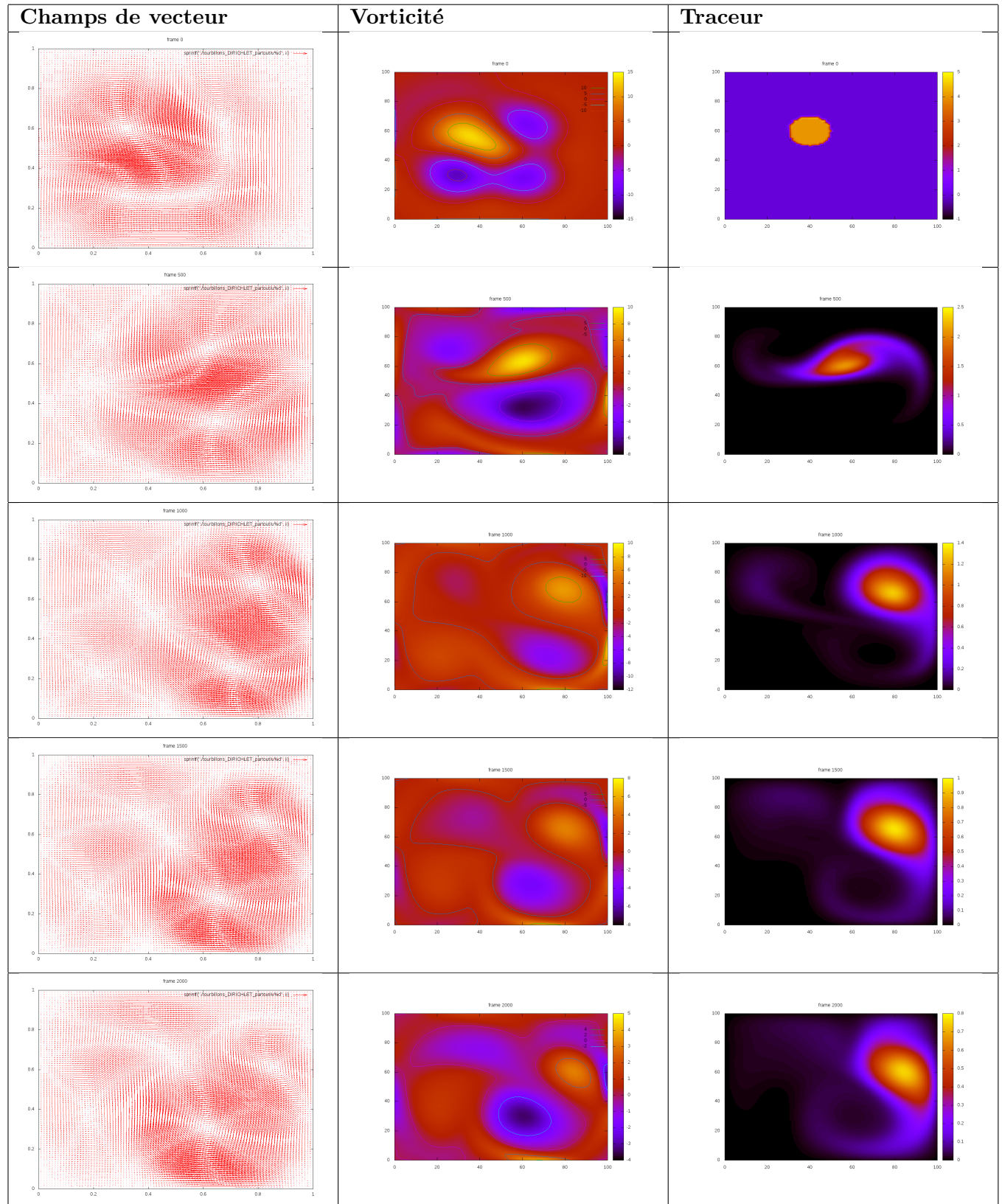
où  $I_0$  représente l'intensité du tourbillon,  $l$  sa taille,  $(x_0, y_0)$  les coordonnées de son centre. Il est parfaitement possible d'utiliser plusieurs tourbillons de paramètres différents en les sommant. Le programme que nous avons conçu permet de faire cela. Ainsi, dans cette simulation, on se place dans le carré  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Nous avons dans notre simulation placé 5 tourbillons de même taille et de même intensité mais de sens différents (en plaçant un signe + ou - devant l'intensité) :

- Tourbillon 1 : centre : (0.5,0.5), intensité : 0.1, taille du tourbillon 0.2
- Tourbillon 2 : centre : (0.3,0.3), intensité : -0.1, taille du tourbillon 0.2
- Tourbillon 3 : centre : (0.6,0.6), intensité : -0.1, taille du tourbillon 0.2
- Tourbillon 4 : centre : (0.3,0.6), intensité : 0.1, taille du tourbillon 0.2
- Tourbillon 5 : centre : (0.6,0.3), intensité : -0.1, taille du tourbillon 0.2

Cette simulation va également nous permettre de montrer l'influence des conditions de bord du maillage. Comme traceur, on place une "boule" de colorant à la position (0.4, 0.6), de taille 0.1. On utilise 1000 comme nombre de Reynolds, 1000 comme nombre de Peclet, et on imprime les résultats toutes les 500 frames (i.e pour  $t = 0, 1.0, 4.0, 6.0, 8.0$ )

Voici les résultats de nos simulations :

## Conditions de Dirichlet aux bords :



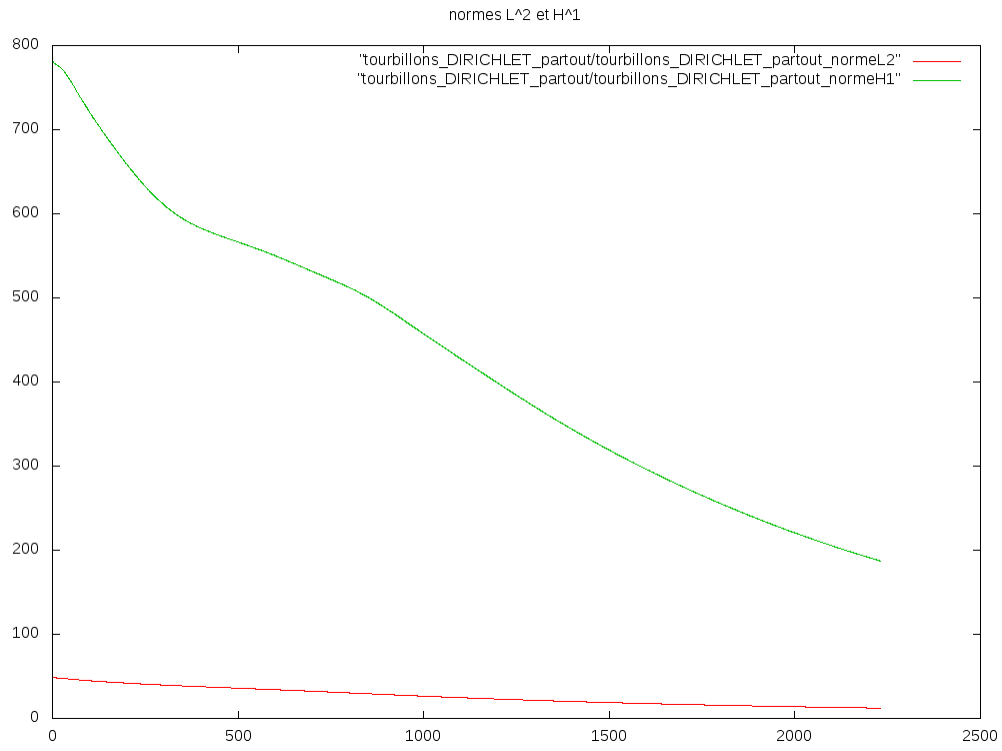
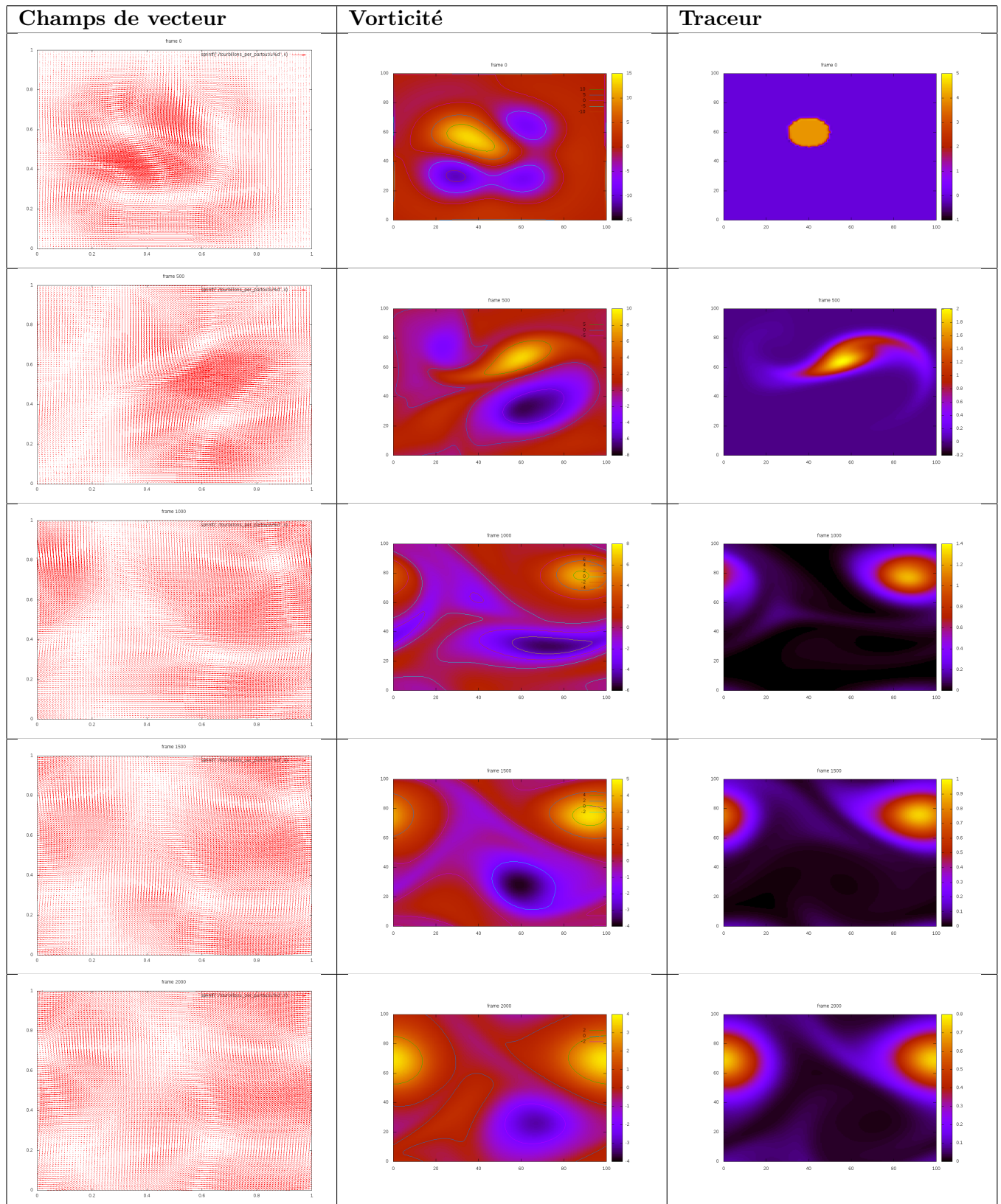


Figure 5.1: Normes  $H^1$  et  $L^2$

## Conditions périodiques aux bords :



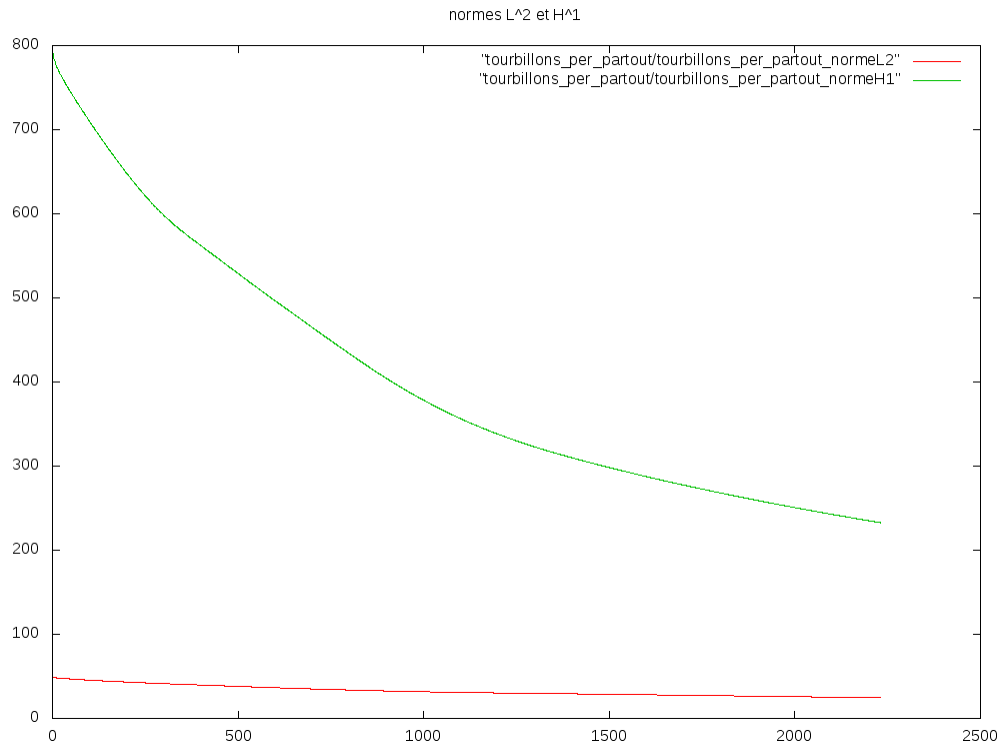
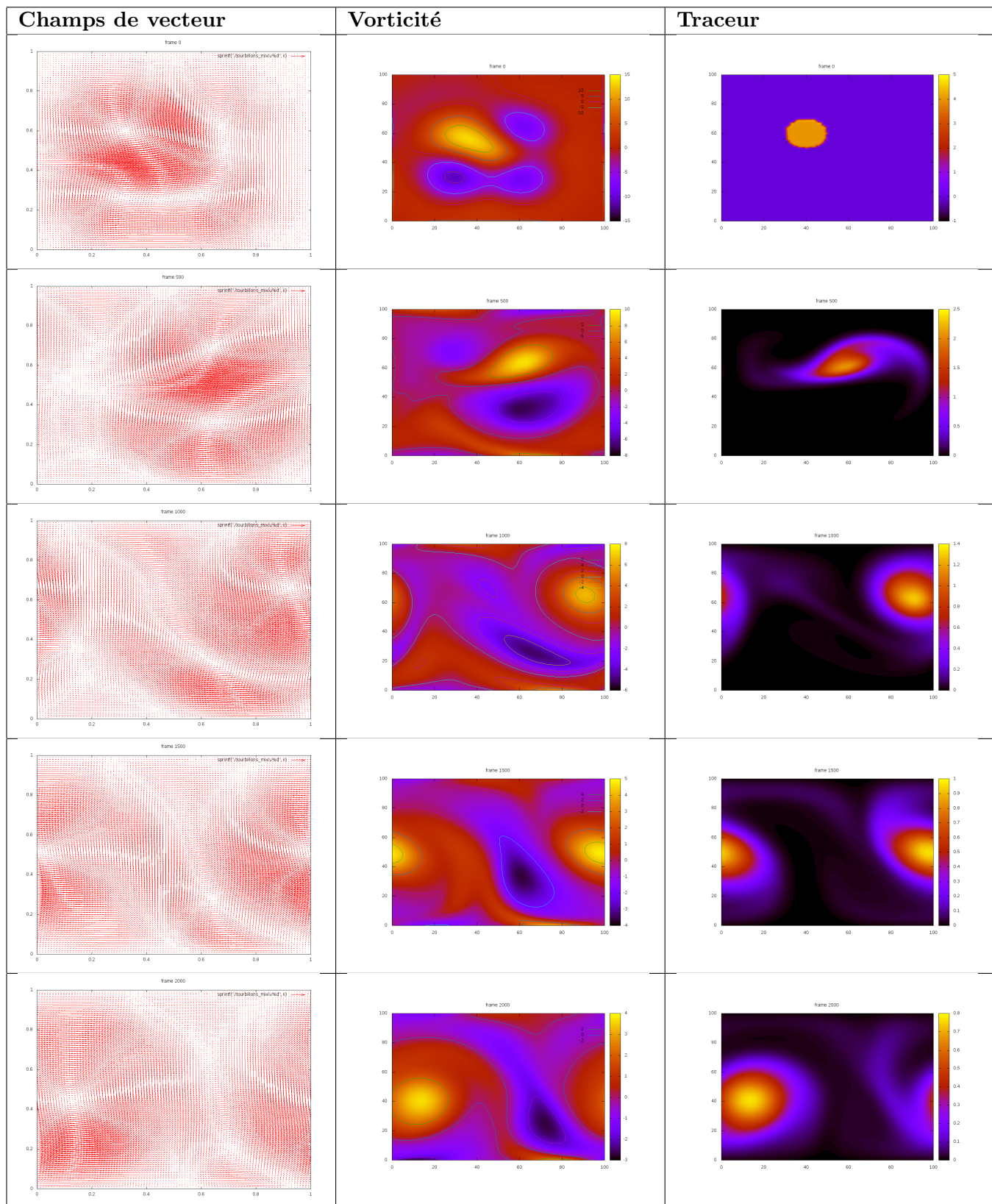


Figure 5.2: Normes  $H^1$  et  $L^2$

Conditions périodiques sur les bords gauche et droit, Dirichlet en haut et en bas :





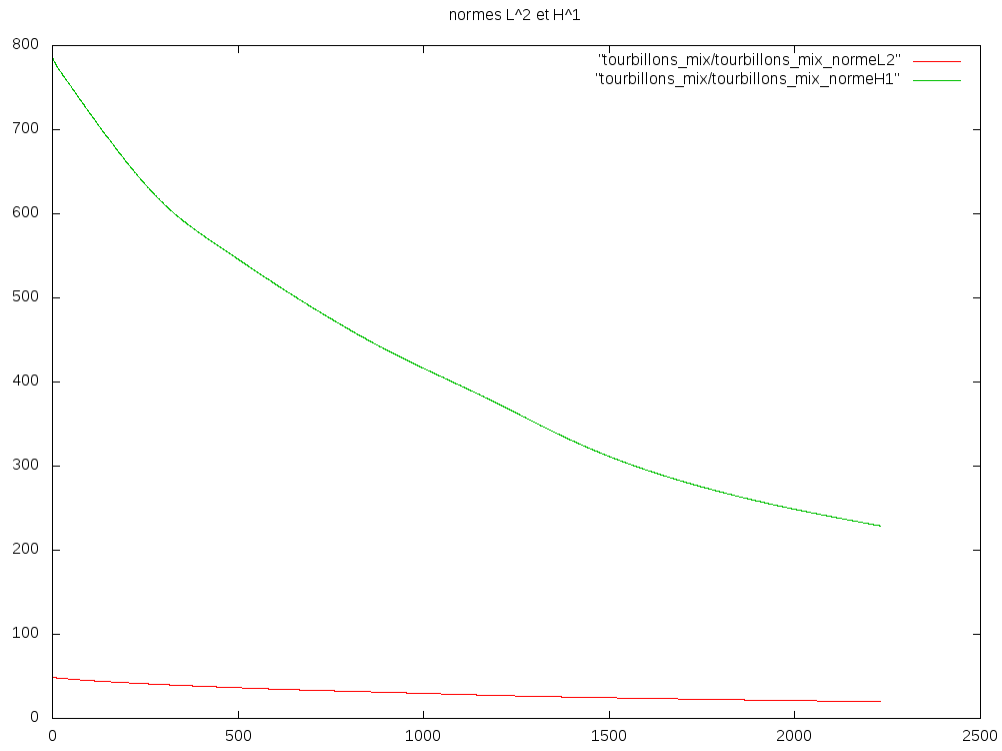
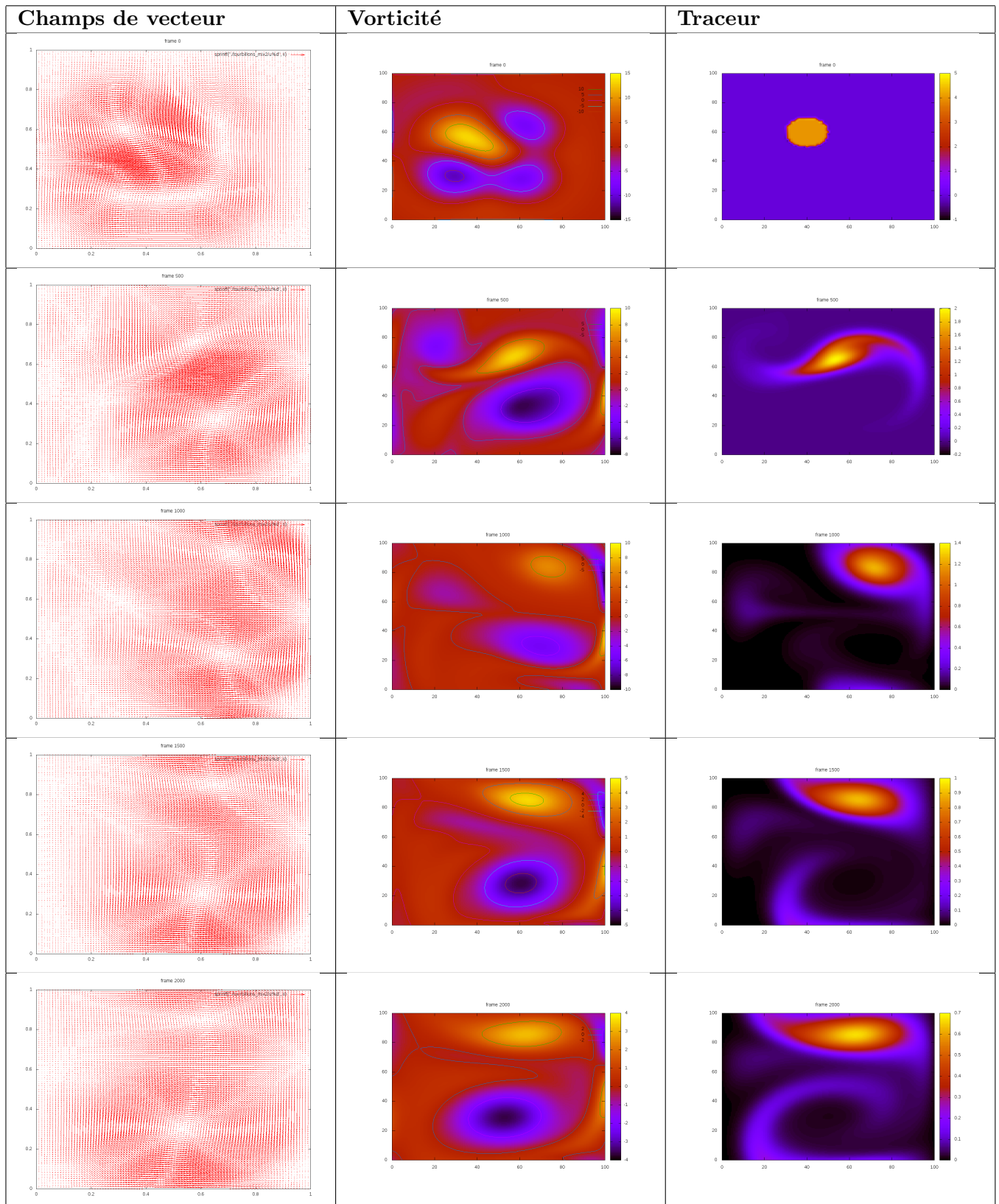


Figure 5.3: Normes  $H^1$  et  $L^2$

Conditions de Dirichlet sur les bords gauche et droit, périodiques en haut et en bas :



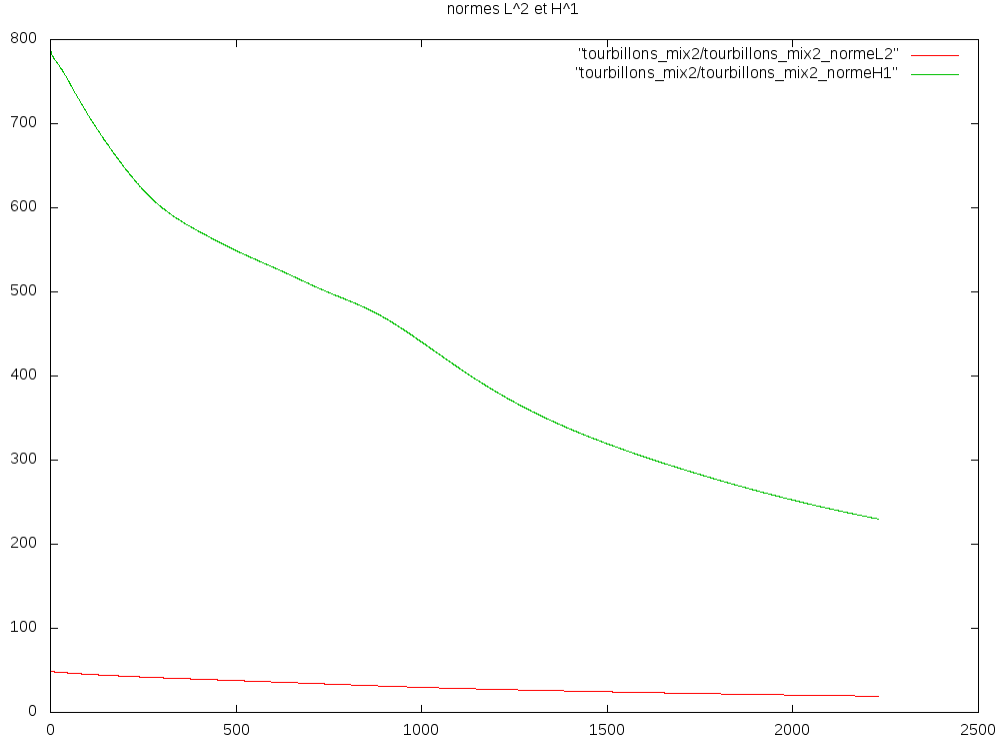


Figure 5.4: Normes  $H^1$  et  $L^2$

### c. Instabilité de Kelvin-Helmoltz

Dans cette simulation, nous allons simuler l'instabilité de Kelvin-Helmoltz. Cette instabilité se produit naturellement lorsque deux liquides de densité différente se mélangent. En particulier, la fumée d'une bougie se comporte de la même manière.

Pour simuler ce comportement, on utilise le champs initial suivant :

$$u_0(x, y) = \begin{cases} v_0(x, y) = \Phi_1(y)(1 + \Phi_2(x)) \\ w_0(x, y) = 0 \end{cases}$$

Avec :

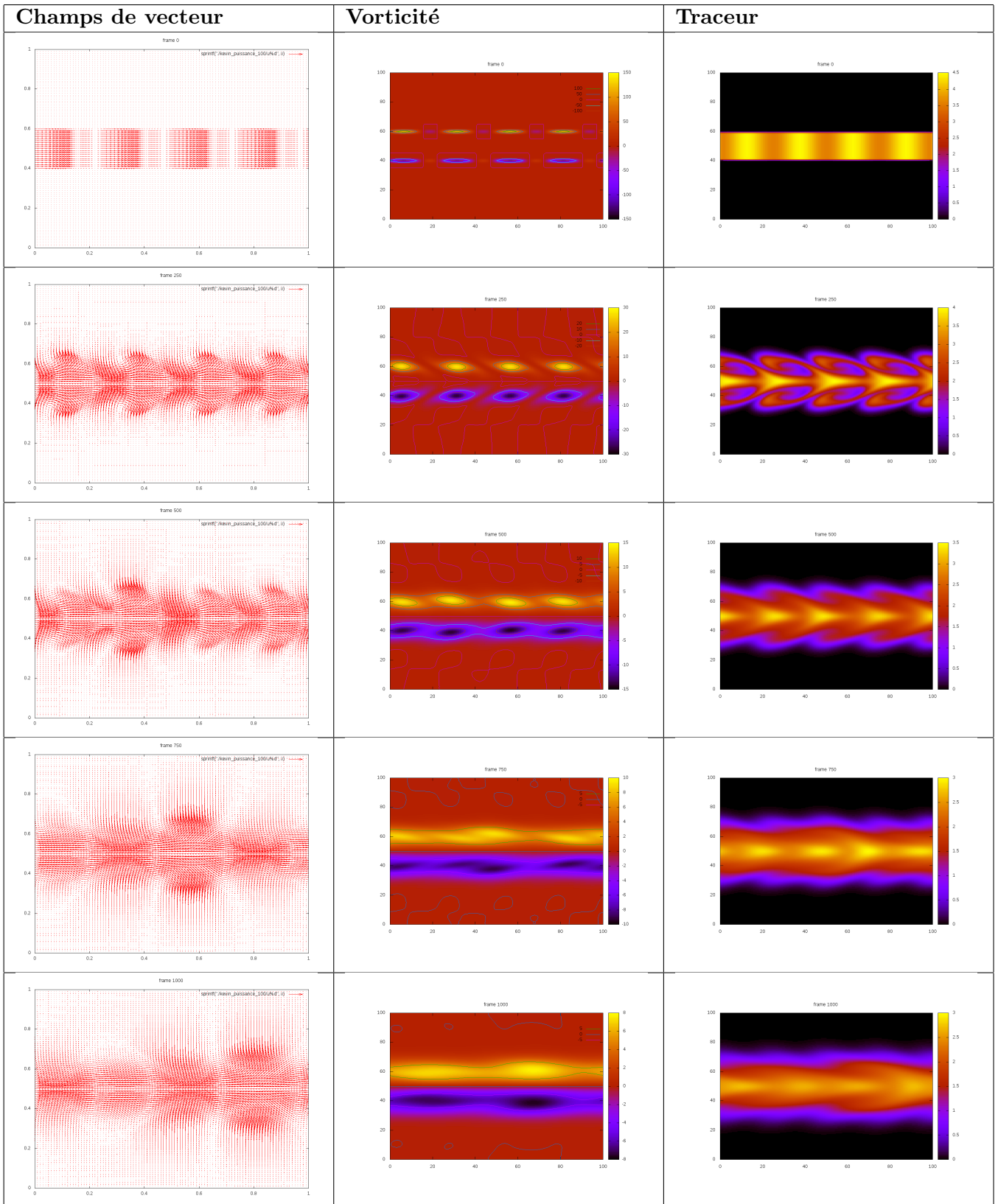
$$\Phi_1(y) = \frac{U_0}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{1}{2} P \left( 1 - \frac{|L/2 - y|}{R} \right) \right) \right)$$

Et :

$$\Phi_2(x) = A \sin(2\pi \frac{x}{\lambda})$$

$U_0$  représente la vitesse caractéristique du fluide,  $L$  la taille du maillage,  $P$  la puissance du jet,  $R$  le rayon du jet,  $A$  et  $\lambda$  deux autres paramètres.

Afin de mettre en évidence l'instabilité, on place comme traceur une bande horizontale de colorant, de même taille que la taille du jet. Voici le résultat d'une simulation, avec comme paramètres :  $L = 1$ ,  $U_0 = 1$ ,  $R = 0.1$ ,  $Re = 1000$ ,  $Pe = 1000$ ,  $P_j = 100$ ,  $A = 1.5$ , et  $\lambda = 0.25$ . Le tableau suivant montre les rendus pour  $t = 0, 0.5, 2.0, 3.0, 4.0$ .



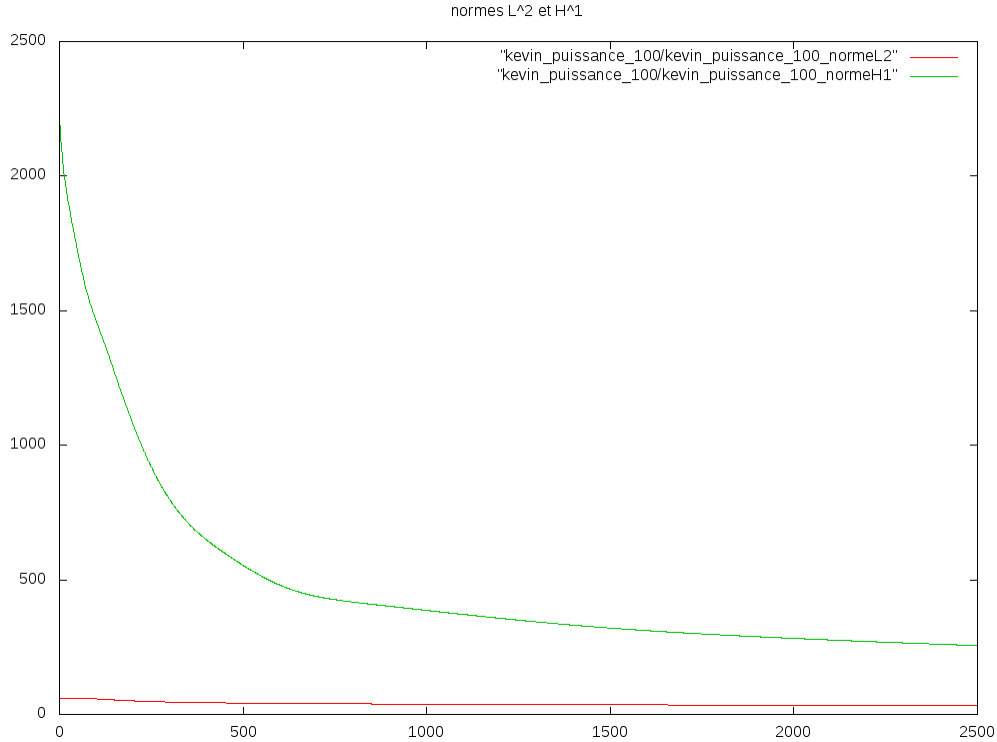


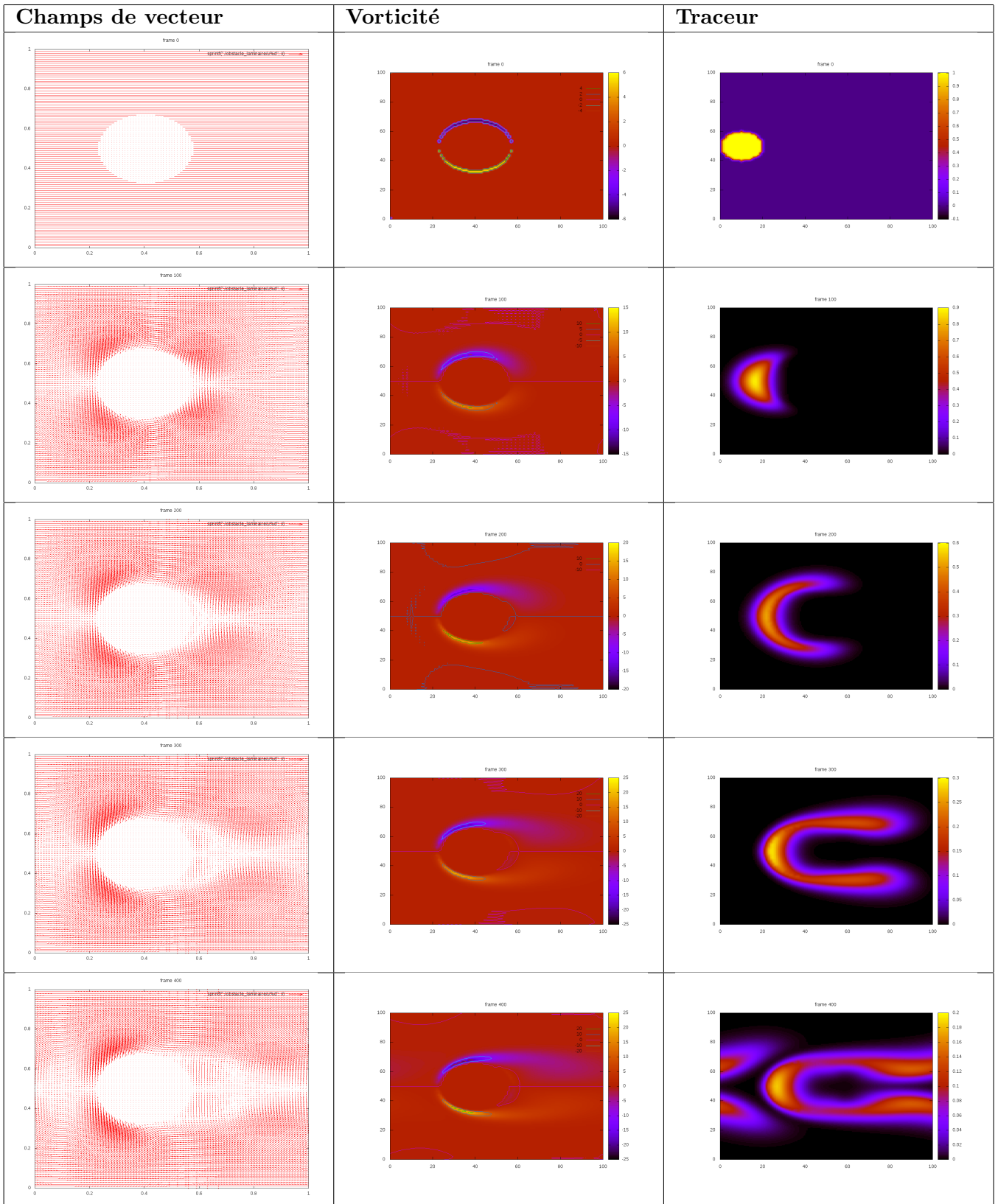
Figure 5.5: Normes  $H^1$  et  $L^2$

#### d. Flux avec obstacle circulaire

Nous avons tenté de simuler l'écoulement d'un fluide autour d'un disque, au repos à l'état initial, soumis à une force constante allant d'est en ouest de norme 0.1. Nous avons conscience que notre méthode n'est ni pertinente ni rigoureuse. En effet notre idée est, à chaque frame, de poser brutalement  $u = 0$  pour les points contenus dans le disque, modélisant le fait que le fluide ne s'écoule pas dans le disque. Cela revient donc à placer des conditions aux limites de Dirichlet sur le bord du disque.

Dans cette simulation, nous plaçons le disque à la position  $(0.4, 0.5)$ , avec un rayon égal à 0.03 et nous plaçons des conditions périodiques sur les bords du maillage.

Les paramètres de notre simulation sont  $L = 1$ ,  $Re = 1000$ ,  $Pe = 1000$ ,  $T_{max} = 15.0$ . Le tableau suivant montre les rendus pour  $t = 0, 0.9375, 1.875, 2.8175, 3.75$ .



# Conclusion

L'établissement rigoureux des équations de Navier-Stokes incompressibles a posé les bases de notre réflexion en ayant conscience de la physique derrière ces équations.

L'étude de l'équation de la chaleur avec des outils mathématiques très importants (formulation faible, espaces de Sobolev, transformation de Fourier...) a été notre point de départ, nous assurant de maîtriser ces outils sur un cas simple.

Par la suite, l'étude approfondie de la publication de Y. Le Jan et A.S. Sznitman a été une source importante d'apprentissage, qui nous a permis de développer une vision originale de ces équations. En effet, la publication met en lumière l'existence d'un processus Markovien sous-jacent à la représentation de Fourier de ces équations.

Nous sommes alors capable d'associer une partie de l'équation à un noyau Markovien ayant des propriétés particulières. En continuant cette réflexion, nous décidons de l'identifier à un processus de branchement.

Ce processus de branchement nous a conduit à étudier en profondeur le concept de processus de Markov et l'importance des méthodes de Montecarlo.

Cette vision a permis de démontrer, pour certaines classes de fonctions, l'existence et l'unicité de la solution des équations de Navier Stokes incompressibles en 3 dimensions.

Cette manière d'appréhender le problème nous a donné l'opportunité de considérer un problème physique sous une manière avec un angle probabiliste ; ce qui représente la base de la physique statistique.

Les simulations du processus de branchement nous ont permis de mettre en évidence l'efficacité du processus utilisé. Toutefois, les méthodes de Montecarlo ne permettent pas d'obtenir une solution rapide de nos équations.

Les simulations 2D ont permis de simuler des phénomènes physiques très intéressants (tourbillons, instabilité de Kelvin-Helmoltz...) mais surtout de comprendre l'intérêt d'utiliser des schémas d'ordre important pour simuler ces équations. En effet, le maillage se doit d'être très dense pour éviter le risque d'instabilité. Cependant à notre niveau, nous avons constaté qu'un nombre de Reynold élevé conduisait à devoir considérer un autre schéma.

Pour pouvoir comparer les résultats de nos deux simulations, il faudrait simuler les équations en 3D en non en 2D, ce qui montrerait une différence de vitesse de calcul, et donc que les méthodes de simulation basées sur la statistique ne sont intéressante qu'uniquement d'un point de vue théorique.

Une autre approche, de considérer le mouvement des particules fluides de manière probabiliste, est d'utiliser les équations de Boltzmann. Ces équations décrivent le mouvement d'un fluide tout

comme les équations de Navier-Stokes. Toutefois, la solution recherchée alors correspond à une densité de probabilité, c'est à dire à une probabilité de présence des particules.



# Annexe A

## Fonctionnement du programme de simulation 2D

### I. Généralités

Au lancement, le programme propose au lancement un menu avec 3 choix :

- Exécuter fichier de configuration
- Lire simulation
- Exporter en vidéo
- Quitter

La première option permet de lire un fichier qui contient les simulations à effectuer (la structure de ce fichier est décrite ultérieurement) . Une fois la lecture réalisée, le programme effectue les simulations dans l'ordre avec les bonnes options. En particulier, il crée deux dossiers : `NOM_DE_LA_SIMULATION` et `NOM_DE_LA_SIMULATION_OUTPUT`. Dans le premier dossier, il écrit les fichiers contenant la solution, et dans le deuxième il enregistre les graphiques (normes et erreur) ainsi que les vidéos si nécessaire.

La seconde option permet d'afficher avec gnuplot le champs de vitesse, la vorticité et le traceur d'une solution au cours du temps. Le programme demande le nom de la simulation et si il doit afficher la solution pas-à-pas.

L'option "Exporter en vidéo" permet d'exporter en vidéo une simulation d j calculée à partir de son nom.

### II. Construction du fichier de configuration

La syntaxe du fichier permet au programme de calculer plusieurs simulations différentes à la suite. La syntaxe globale du fichier est la suivante :

```
# NOM_DE_LA_SIMULATION_SANS_ESPACE
```

```
/// paramètres
```

```
END  
  
# NOM_D'UNE_AUTRE_SIMULATION_SANS_ESPACE  
  
/// paramètres  
  
END  
  
etc..
```

Pour déclarer un paramètre à valeur numérique à l'intérieur d'un bloc simulation, la syntaxe est la suivante :

```
nom_du_paramètre = valeur
```

Ou pour les paramètres qui nécessitent une chaîne :

```
nom_du_paramètre : chaîne
```

**Les espaces sont nécessaires dans les deux cas.**

#### **a. Paramètres généraux de la simulation**

Les paramètres à spécifier sont répertoriés dans le tableau suivant. Ils peuvent être mis dans le désordre, ou pas spécifiés si la valeur par défaut convient.

Nom du paramètre	Type	Valeur par défaut	Commentaire
L	numérique	0.0	Longueur du maillage
dx	numérique	0.0	Pas du maillage
cfl	numérique	0.0	Doit être inférieur strictement à 1
Re	numérique	0.0	Nombre de Reynold de la simulation
Pe	numérique	0.0	Nombre de Peclet du traceur
eps	numérique	0.0	Précision du gradient conjugué (exemple si eps = 5 la précision est de $10^{-5}$ )
CL_left_right	chaîne	DIRICHLET	Condition au limite des côtés gauche et droite deux valeurs possibles : DIRICHLET et PERI-ODIQUE
CL_top_bottom	chaîne	DIRICHLET	Condition au limite des côtés haut et bas deux valeurs possibles : DIRICHLET et PERI-ODIQUE
video	chaîne	false	Créer une vidéo à partir de la simulation ou non Deux valeurs possibles : true et false

## b. Paramétrer la solution initiale

En plus de ces paramètres, on peut spécifier la solution initiale. Pour cela, il faut utiliser l'instruction :

```
sol_initiale : type_de_la_solution { paramètre1 = valeur paramètre2 = valeur etc.. }
```

Encore une fois les espaces sont nécessaires. De plus, cette fois-ci, l'ordre des paramètres est important, et les solutions initiales doivent être déclarées **après les paramètres L et dx** .  
Voici un tableau qui contient les deux types de solutions initiales :

Type de la solution	Paramètres	Commentaire
tourbillon	c_x, c_y, intensity, tsize	Crée un tourbillon à la position c_x c_y , d'intensité de valeur intensity et de taille tsize
kevin_helmoltz	rayon, puissance, lambda, A	Crée une instabilité de Kevin-Helmoltz

On peut mettre plusieurs solutions initiales de type différents à la suite. Dans ce cas, le programme additionne les deux.

Par exemple pour avoir deux tourbillons de sens opposés :

```
sol_initiale : tourbillon { c_x = 0.5 c_y = 0.5 intensity = 0.1 tsize = 0.2 }
sol_initiale : tourbillon { c_x = 0.2 c_y = 0.7 intensity = -0.1 tsize = 0.2 }
```

### c. Ajouter un traceur

Enfin, on peut spécifier les paramètres du traceur (ou 'colorant') pour suivre la trajectoire d'un fluide. La syntaxe est :

```
traceur : type_du_traceur { paramètre1 = valeur paramètre2 = valeur etc.. }
```

Type du traceur	Paramètres	Commentaire
boule	c_x, c_y, rayon, masse	Crée une boule de masse "masse", à la position (c_x, c_y)
ligneh	pos_y, taille, masse	Crée une ligne horizontale à la position d'ordonnée pos_y, d'épaisseur "taille" et de masse "masse"
lignev	pos_x, taille, masse	Crée une ligne verticale à la position d'abscisse pos_x, d'épaisseur "taille" et de masse "masse"

Comme pour les solutions initiales, il est possible de les "additionner", par exemple pour avoir une "boule de colorant" et une ligne horizontale :

```
traceur : boule { c_x = 0.4 c_y = 0.7 rayon = 0.01 masse = 1.0 }
```

```
traceur : ligneh { pos_y = 0.7 taille = 0.02 masse = 1.0 }
```

### d. Ajouter des obstacles

Il est possible d'ajouter des obstacles à l'intérieur du domaine de calcul. Ces obstacles sont de forme circulaires. La syntaxe est :

```
obstacle : type { paramètre1 = valeur etc.. }
```

Voici l'unique type disponible :

Type de l'obstacle	Paramètres	Commentaire
boule	c_x, c_y, rayon	Crée un obstacle de forme circulaire, de rayon "rayon", à la position (c_x, c_y)

Bien entendu, on peut en placer plusieurs en réitérant la commande.

**e. Ajouter une force extérieure**

L'ajout d'une force extérieur se fait de manière similaire aux autres paramètres. La commande est :

```
source : type { paramètre1 = valeur etc.. }
```

Deux types sont disponibles :

Type de la force	Paramètres	Commentaire
horizontale	puissance	Crée un champs vectoriel source horizontal de norme puissance
vertical	puissance	Crée un champs vectoriel source vertical de norme puissance

# Bibliographie

- [1] Stéphane Chaussedent. Statique et dynamique des fluides.
- [2] Thierry Dumont. *Modélisation et discrétisation : une petite introduction*. 2008.
- [3] Alexandre Ern. *Theory and Practice of Finite Elements*. 2004.
- [4] Danaila Ionut, Pascal Joly, and Sidi Mahmoud Kaber. *Introduction au calcul scientifique par la pratique*. 2005.
- [5] Y. Le Jan and A.S. Sznitman. Stochastic cascades and 3-dimensional navier-stokes equations. 1997.
- [6] Sylvie Méléard. Processus de branchement : applications en écologie. 2013.
- [7] S. Rostam, P. Derennes, and F. Lemonnier. Processus de galton watson.
- [8] Claude Zuily. *Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*. 2011.