Séries de Fourier

1 Généralités

1.1 Notations et conventions

On appelle polynôme trigonométrique toute fonction de la forme

$$T(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx},$$

ou, de façon équivalente, de la forme $a_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$.

Étant donnée une fonction $f \in L^1(-\pi, \pi)$ (en particulier $f \in C([-\pi, \pi])$ ou $L^2(-\pi, \pi)$), on définit ses *coefficients de Fourier*

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x) dx,$$

et sa série de Fourier

$$Sf(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx},$$

sous réserve de convergence des sommes partielles

$$S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e^{ikx},$$

quand $N \to +\infty$, pour une topologie à préciser.

Remarque. Dans le cadre des séries de Fourier, la convergence de $Sf(x)$ signifie la convergence de la suite $S_N f(x)$. Pour une série quelconque $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k$, dont le terme général est indexé par $\mathbb{Z}$, la convergence est définie habituellement comme l'existence des limites de $\sum_{0 \le k \le N} a_k$ et $\sum_{-M \le k \le -1} a_k$ lorsque $N \to +\infty$ et $M \to +\infty$. En ce sens, la convergence d'une série de Fourier est moins générale car demande que $M = N$. Néanmoins, nous verrons dans un grand nombre de cas intéressants que les deux limites existent aussi pour les séries de Fourier.

La théorie des séries de Fourier consiste en l'étude des conditions sous lesquelles $Sf(x) = f(x)$. On va considérer les convergences suivantes : la convergence dans $L^2(-\pi, \pi)$, la convergence simple et la convergence uniforme.

Puisqu'on cherche à développer des fonctions en série de fonctions périodiques, il est naturel de considérer des fonctions elles-même périodiques. On introduit donc les espaces

$$C_{\text{per}}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ continue et } 2\pi\text{-périodique}\},$$

et, pour $p \in [1, \infty]$ (en fait $p = 1$ ou 2 en pratique)

$$L^p_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}) = \{f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \mid f \ 2\pi\text{-périodique}\},$$

la 2π-périodicité signifiant dans ce dernier cas $f(x + 2\pi) = f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Notons que, pour tout $p \in [1, \infty]$,

$$C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}) \subset L^p_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}).$$

Il est également commode de remarquer qu'il y a une identification naturelle entre $L^p_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$ et $L^p(-\pi, \pi)$. De même, $C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$ s'identifie naturellement au sous-espace (fermé) de $C([-\pi, \pi])$ des fonctions f continues sur $[-\pi, \pi]$ vérifiant $f(\pi) = f(-\pi)$. Les espaces $L^p_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$ et $C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$ sont donc normé respectivement par

$$||f||_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \qquad f \in L^p_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}),$$

pour $p \in [1, \infty[$, et

$$||f||_\infty = \sup_{[-\pi,\pi]} |f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, \qquad f \in C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}).$$

1.2 Noyaux de Dirichlet et de Féjer

Dans l'étude des séries de Fourier, il y a deux suites de fonctions très importantes : le *noyau de Dirichlet*

$$D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx},$$

et sa moyenne arithmétique, *le noyau de Féjer*

$$F_N = \frac{D_0 + \cdots + D_{N-1}}{N}.$$

Ce sont clairement des fonctions C^∞, paires et 2π-périodiques. De plus, sans (presque) aucun calcul, on voit que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1, \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = 1. \tag{1.1}$$

En effet, pour D_N c'est une conséquence du fait que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx = 0$ si $k \neq 0$, et, pour F_N, on utilise que c'est la moyenne arithmétique de fonctions d'intégrales valant toutes 2π. On vérifie aussi que

$$D_N(x) = \frac{\sin((2N+1)x/2)}{\sin(x/2)},$$

si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ (pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, $D_N(x) = 2N + 1$) par un calcul direct, et que

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2,$$

si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ (pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, $F_N(x) = N$) en calculant $\mathrm{Im}\left(\sum_0^{N-1} e^{(2k+1)x/2}\right)$.

L'intérêt du noyau de Dirichlet se voit à travers la proposition suivante.

Proposition 1.1. *Pour toute fonction $f \in L^1_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$ et tout $x \in [-\pi, \pi]$ (ou de façon équivalente $x \in \mathbb{R}$), on a*

$$\begin{aligned} S_N f(x) = (D_N * f)(x) &:= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-y)f(y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(y)f(x-y)dy \end{aligned} \tag{1.2}$$

Démonstration. Il s'agit d'un calcul direct :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-y)f(y)dy &= \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-y)}f(y)dy \\ &= \sum_{k=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iky}f(y)dy\right)e^{ikx} \end{aligned}$$

où la parenthèse n'est autre que $c_k(f)$. Pour voir que $S_N f(x)$ coïncide avec (1.2), on fait le changement de variable usuel $x - y = z$ de sorte que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-y)f(y)dy &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} D_N(z)f(x-z)dz \\ &= \int_{x-\pi}^{-\pi} D_N(z)f(x-z)dy + \int_{-\pi}^{\pi} D_N(z)f(x-z)dz \\ &\quad + \int_{\pi}^{x+\pi} D_N(z)f(x-z)dz \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(z)f(x-z)dz \end{aligned}$$

car, par 2π-périodicité des fonctions, $\int_{\pi}^{x+\pi} D_N(z)f(x-z)dz = \int_{\pi}^{x+\pi} D_N(z-2\pi)f(x-z+2\pi)dz = \int_{-\pi}^{x-\pi} D_N(z)f(x-z)dz$ [1]. □

Tout le problème revient donc à étudier la convergence de $D_N * f$ (en un point, uniformément ou dans L^2). Avant de considérer cette question, on observe qu'il y a convergence en moyenne de Césaro.

Théorème 1.2. *Soit $g \in C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$. Alors,*

$$F_N * g \to g,$$

uniformément sur $\mathbb{R}$.

Nous verrons plus loin que $D_N * f$ ne converge pas toujours uniformément lorsque f est continue.

Naturellement dans l'énoncé du Théorème 1.2, on a posé

$$(F_N * g)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x-y)g(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(y)g(x-y)dy$$

1. ne pas oublier que, si $g \in L^1(a,b)$, on convient que $\int_a^b g = \int_{[a,b]} g$ si $a \le b$ et que $\int_a^b g = -\int_{[a,b]} g$ si $a > b$

la deuxième égalité étant une conséquence de la 2π-périodicité de F_N et g (comme dans la preuve de la Proposition 1.1).

Démonstration. En utilisant que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N dy = 1$ pour tout N, on a $g(x) = \frac{g(x)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N dy$, d'où

$$(F_N * g)(x) - g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(y)\left(g(x-y) - g(x)\right) dy.$$

Comme g est continue et 2π-périodique, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ donc : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \epsilon$. On se fixe donc un $\epsilon > 0$ et on choisit un $\delta > 0$ vérifiant cette propriété. On décompose alors l'intégrale ci-dessus suivant $|y| < \delta$ et $\delta \le |y| \le \pi$ (on peut bien sûr supposer $\delta < \pi$) et on fait les estimations suivantes : d'une part

$$\begin{aligned} \left|\int_{|y|<\delta} F_N(y)\left(g(x-y) - g(x)\right) dy\right| &\le \int_{|y|<\delta} \left|F_N(y)\left(g(x-y) - g(x)\right)\right| dy \\ &\le \epsilon \int_{|y|<\delta} |F_N(y)| dy, \end{aligned} \tag{1.3}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \left|\int_{\delta\le|y|\le\pi} F_N(y)\left(g(x-y) - g(x)\right) dy\right| &\le \int_{\delta\le|y|\le\pi} \left|F_N(y)\left(g(x-y) - g(x)\right)\right| dy \\ &\le 4\pi||g||_\infty \sup_{\delta\le|y|\le\pi} |F_N(y)|. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dans (1.3), la positivité de F_N et (1.1) donnent

$$\int_{|y|<\delta} |F_N| \le \int_{|y|\le\pi} F_N = 2\pi$$

et dans (1.4), on observe que

$$\sup_{\delta\le|y|\le\pi} |F_N(y)| \le \frac{1}{N\sin(\delta/2)},$$

car $|\sin(y/2)| \ge \sin(\delta/2)$ pour $\delta \le |y| \le \pi$. On en déduit donc que

$$|(F_N * g)(x) - g(x)| \le \epsilon + \frac{2||g||_\infty}{N\sin(\delta/2)},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $N \ge 1$. Ainsi, pour chaque $\epsilon > 0$, on peut trouver un $\delta > 0$ (ne dépendant que de ϵ et g), tel que pour tout $N \ge 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on ait cette inégalité. Si on choisit N_0 assez grand pour que

$$\frac{2||g||_\infty}{N_0\sin(\delta/2)} < \epsilon,$$

(noter que N_0 ne dépend que de ϵ, δ et $||g||_\infty$ mais pas de x), on obtient que, pour tout $N \ge N_0$,

$$||F_N * g - g||_\infty < 2\epsilon,$$

ce qui est le résultat cherché. $\square$

Corollaire 1.3. *Les polynômes trigonométriques sont denses dans $C_{\text{per}}(\mathbb{R})$.*

De façon équivalente, les polynômes trigonométriques sont denses dans l'espace des fonctions $g \in C([-\pi,\pi])$ telles que $g(-\pi) = g(\pi)$ (muni de la norme $||\cdot||_\infty$ sur $[-\pi,\pi]$).

Démonstration. Si g est continue et 2π-périodique, $F_N * g = \frac{1}{N}(D_0 * g + \cdots D_{N-1} * g)$ est un polynôme trigonométrique car chaque $D_n * g$ est un polynôme trigonométrique d'après la Proposition 1.1. La conclusion suit alors du Théorème 1.2. □

2 Théorie L^2

Rappelons de façon générale qu'une famille dénombrable $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, muni du produit scalaire $(.,.)$, est une *base hilbertienne* si

1. c'est un système orthonormal, ie

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{si } j \neq k, \end{cases} \tag{2.1}$$

2. le sous espace de ses combinaisons linéaires finies est dense dans $\mathcal{H}$, ie

$$\overline{\left\{ \sum_{k\in I} c_k e_k \mid I \text{ fini, } (c_k)_{k\in I} \in \mathbb{C}^I \right\}} = \mathcal{H}. \tag{2.2}$$

Tout espace de Hilbert séparable possède une telle base. Le théorème suivant donne une base explicite de $L^2(-\pi,\pi)$.

Théorème 2.1. *Posons $e_k(x) = e^{ikx}$. Alors $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(-\pi,\pi)$ muni du produit scalaire*

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}_1 f_2 \, dx,$$

et de la norme associée qu'on notera $||\cdot||_2$.

Démonstration. Il faut vérifier (2.1) et (2.2) avec $\mathcal{H} = L^2(-\pi,\pi)$. Le point (2.1) résulte d'un calcul très simple. Le point (2.2) signifie exactement que les polynômes trigonométriques, ie les combinaisons linéaires finies des e_k, sont denses dans $L^2(-\pi,\pi)$ pour la norme $||\cdot||_2$. Pour le prouver, on utilise le résultat (non trivial) suivant d'intégration : les fonctions continues à support compact dans $]-\pi,\pi[$ sont denses dans $L^2(-\pi,\pi)$. Ainsi, pour toute $f \in L^2(-\pi,\pi)$ et tout $\epsilon > 0$, il existe g continue sur $[-\pi,\pi]$ telle que $g(-\pi) = g(\pi)(= 0)$ et

$$||f - g||_2 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Or, d'après le Corollaire 1.3, il existe un polynôme trigonométrique T tel que

$$||T - g||_\infty < \frac{\epsilon}{2}.$$

Comme $||T - g||_2 \leq ||T - g||_\infty$, on en déduit que $||f - T||_2 < \epsilon$. D'où le résultat. □

Les propriétés qui suivent sont uniquement des propriétés des bases hilbertiennes et ne sont rien d'autre que la traduction dans le contexte particulier du théorème précédent de formules générales.

Corollaire 2.2. *Pour toutes $f_1, f_2 \in L^2(-\pi,\pi)$, on a*

1. *la convergence dans L^2 de la série de Fourier de f_1,*

$$||f_1 - \sum_{k=-N}^{N} c_k(f_1)e_k||_2 \to 0, \qquad N \to \infty \tag{2.3}$$

2. *la formule de Parseval*

$$(f_1, f_2) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{c_k(f_1)} c_k(f_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f_1} f_2 dx. \tag{2.4}$$

En particulier

$$||f_1||_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f_1)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_1|^2 dx. \tag{2.5}$$

Noter que si $f \in L^2(-\pi,\pi)$, on a $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 < \infty$. Comme cette série est à termes positifs, on a

$$\sum_{k\geq 0} |c_k(f)|^2 < \infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{k<0} |c_k(f)|^2 < \infty,$$

ce qui garantit que les suites de fonctions $\sum_{k=0}^{N} c_k(f)e^{ikx}$ et $\sum_{k=-M}^{-1} c_k(f)e^{ikx}$ convergent dans $L^2(-\pi,\pi)$ (voir Remarque page 1).

3 Théorie ponctuelle

Nous allons voir dans le Théorème 3.3 ci-dessous des conditions suffisantes garantissant la convergence de la série de Fourier d'une fonction continue vers la fonction elle-même. Avant cela, on peut citer le résultat suivant.

Proposition 3.1. *Soit $f \in C_{\text{per}}(\mathbb{R})$. Si $S_N f$ converge uniformément vers une fonction g alors $g = f$.*

Démonstration. Comme $S_N f = D_N * f$ pour tout N, on a

$$F_N * f = \frac{D_0 * f + \cdots + D_{N-1} * f}{N} = \frac{S_0 f + \cdots + S_{N-1} f}{N}.$$

Or $F_N * f \to f$ d'après le Théorème 1.2. D'un autre côté, par théorème de Césaro, on a

$$\frac{S_0 f + \cdots + S_{N-1} f}{N} \to g, \qquad N \to \infty,$$

donc $g = f$. $\square$ $\square$

Nous verrons dans l'Exercice 3 qu'il existe des fonctions continues pour lesquelles la série de Fourier ne converge pas uniformément.

Le théorème suivant donne une condition suffisante de convergence de la série Fourier de f vers f en un point.

Théorème 3.2 (Dirichlet)**.** *Soit $f \in L^1_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$. Supposons que, pour un représentant de f (qu'on notera encore f), les limites suivantes existent en un point $x_0 \in [-\pi, \pi]$*

$$f(x_0 \pm 0) := \lim_{x \to x_0^\pm} f(x) \in \mathbb{C}, \qquad \lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0^\pm)}{x - x_0} \in \mathbb{C}.$$

Alors

$$S_N f(x_0) \to \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}, \qquad N \to \infty.$$

En particulier, si f est dérivable au point x_0, alors $S_N f(x_0) \to f(x_0)$.

Démonstration. D'après la Proposition 1.1 et le fait que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) = 1$, on peut décomposer $S_N f(x_0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ comme somme de

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin((2N+1)y/2)}{\sin(y/2)}\,(f(x_0-y) - f(x_0+0))\,dy$$

et de

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin((2N+1)y/2)}{\sin(y/2)}\,(f(x_0-y) - f(x_0-0))\,dy.$$

On montre que cette dernière intégrale tend vers 0 quand $N \to \infty$, la première se traitant de façon analogue. Étant donné $\delta > 0$, à choisir convenablement plus loin, on majore

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\pi} \frac{\sin((2N+1)y/2)}{\sin(y/2)}\,(f(x_0-y) - f(x_0-0))\,dy\right| \le \int_0^{\delta} \frac{|f(x_0-y) - f(x_0-0)|}{|\sin(y/2)|}dy \\ + \left|\int_{\delta}^{\pi} \sin((2N+1)y/2)\frac{f(x_0-y) - f(x_0-0)}{\sin(y/2)}dy\right|\end{aligned}$$

Comme $y \mapsto \frac{f(x_0-y)-f(x_0-0)}{y}$ est bornée pour y au voisinage de 0, tout comme $y \mapsto \frac{y}{\sin(y/2)}$, il existe C_1 dépendant de f (et de x_0) telle que, pour tout $\delta > 0$ assez petit,

$$\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0-y) - f(x_0-0)|}{|\sin(y/2)|}dy \le C_1\delta. \tag{3.1}$$

Par ailleurs, pour chaque $0 < \delta \le \pi$, l'application

$$y \mapsto \chi_{[\delta,\pi]}(y)\frac{f(x_0-y) - f(x_0-0)}{\sin(y/2)}$$

est dans $L^1(\mathbb{R})$ donc, d'après le Lemme de Riemann-Lebesgue,

$$\int_{\delta}^{\pi} \sin((2N+1)y/2)\frac{f(x_0-y) - f(x_0-0)}{\sin(y/2)}dy \to 0, \qquad N \to \infty. \tag{3.2}$$

En conclusion, à $\epsilon > 0$ fixé, on commence par choisir $\delta > 0$ assez petit pour que $C_1\delta < \epsilon/2\pi$ dans (3.1), puis, pour tout N assez grand $|\int_{\delta}^{\pi} \sin((2N+1)y/2)\frac{f(x_0-y)-f(x_0-0)}{\sin(y/2)}dy| < \epsilon/2\pi$ d'après (3.2), de sorte que

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin((2N+1)y/2)}{\sin(y/2)}\,(f(x_0-y) - f(x_0-0))\,dy\right| < 2\epsilon$$

pour tout N assez grand. □

Si on renforce les hypothèses sur f, le théorème de Dirichlet s'améliore pour donner de la convergence uniforme.

Théorème 3.3. *Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ 2π-périodique. Alors*

$$||S_N f - f||_\infty \to 0, \qquad N \to \infty.$$

Démonstration. D'après la Proposition 1.1 et le fait que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) = 1$, on a

$$(S_N f - f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((2N+1)y/2)}{\sin(y/2)} (f(x-y) - f(x))\, dy.$$

Étant donné $\delta > 0$, on découpe cette intégrale suivant $|y| \leq \delta$ et $\delta < |y| \leq \pi$. L'intégrale $|y| \leq \delta$ s'estime par

$$\begin{aligned}
\left| \int_{|y|\leq\delta} \cdots dy \right| &\leq \int_{|y|\leq\delta} |\sin((2N+1)y/2)| \frac{|y|}{|\sin(y/2)|} \left| \frac{f(x-y) - f(x)}{y} \right| dy \\
&\leq 2C_1 \delta ||f'||_\infty \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

avec $C_1 = \sup_{[-\pi,\pi]} |y/\sin(y/2)|$. Dans la région $|y| > \delta$, on intègre par parties

$$\begin{aligned}
\int_{\delta\leq|y|\leq\pi} \cdots dy &= \frac{2}{2N+1}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi} \cos((2N+1)y/2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f(x-y)-f(x)}{\sin(y/2)}\right) dy \qquad (3.4) \\
&\quad - \frac{2}{2N+1}\left[\cos((2N+1)y/2)\frac{f(x-y)-f(x)}{\sin(y/2)}\right]_{-\pi}^{-\delta} \\
&\quad - \frac{2}{2N+1}\left[\cos((2N+1)y/2)\frac{f(x-y)-f(x)}{\sin(y/2)}\right]_{\delta}^{\pi} \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

et on en déduit que

$$\left| \int_{\delta\leq|y|\leq\pi} \cdots dy \right| \leq C_2(||f||_\infty + ||f'||_\infty)\frac{1}{\delta^2(2N+1)}$$

avec une constante C_2 indépendante de f, N, δ et x. On en déduit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que, pour tous N, δ et f,

$$||S_N f - f||_\infty \leq C(||f||_\infty + ||f'||_\infty)\left(\delta + \frac{1}{N\delta^2}\right).$$

Ainsi, à $\epsilon > 0$ fixé, on choisit δ assez petit pour que $C(||f||_\infty + ||f'||_\infty)\delta < \epsilon/2$ puis N assez grand pour que $C(||f||_\infty + ||f'||_\infty)/N\delta^2 < \epsilon/2$ qui montre la convergence annoncée. On peut également considérer

$$\delta = N^{-\alpha}$$

avec $0 < \alpha < 1/2$, ce qui nous donne $||S_N f - f||_\infty \leq C'(N^{-\alpha} + N^{-1+2\alpha}) \to 0$. □

Remarque. Dans le Théorème 3.3, on peut supposer "f continue et C^1 par morceaux". Cela alourdit un peu les notations (à cause du choix de subdivision) mais ne change essentiellement pas la démonstration.

A Exercices

Exercice 1. *Montrer, sans utiliser le Théorème 3.3, que si f est C^2 et 2π-périodique, alors $S_N f \to f$ uniformément. Faire un lien avec la Remarque de la page 1.*

Exercice 2 (Formule sommatoire de Poisson)**.** *Soit f une fonction de Schwartz sur $\mathbb{R}$. Montrer que*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j).$$

Indication : considérer la fonction $F(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(x + 2\pi k)$.

Exercice 3 (Fonctions continues dont la série de Fourier ne converge pas uniformément)**.** *On note par S_N l'application $f \mapsto S_N f$ définie sur $C_{\text{per}}(\mathbb{R})$. On note $|||\cdot|||_\infty$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}_{\text{c}}(C_{\text{per}}(\mathbb{R}), C_{\text{per}}(\mathbb{R}))$.*
1) Démontrer que

$$|||S_N|||_\infty \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin((2N+1)x/2)|}{|\sin(x/2)|}dx.$$

2) En déduire l'existence de f continue et 2π-périodique dont la série de Fourier ne converge pas uniformément.
(Indication : on pourra utiliser, en la démontrant, la minoration $|\sin(y)| \geq 2|y|/\pi$ pour $|y| \leq \pi/2$.)