Rappels d'intégration

Résumé

Ces notes ont été rédigées initialement pour des agrégatifs et sont basées en bonne partie sur le livre classique de W. Rudin [R]. Nous n'y (re)démontrons pas les points les plus longs (construction de l'intégrale de Lebesgue, théorème de Fubini) mais le reste du programme standard de L3 y est revu (et redémontré) en détail, en insistant notamment sur les subtilités liées à la négligeabilité. L'annexe A contient des exercices corrigés.

Table des matières

1 Mesurabilité

Dans cette section X est un ensemble non vide.

Définition 1.1. *Une tribu (ou σ-algèbre) $\mathcal{M}$ sur X est une partie de $\mathcal{P}(X)$ telle que*

1. $X \in \mathcal{M}$,
2. $A \in \mathcal{M} \quad \Rightarrow \quad A^c := X \setminus A \in \mathcal{M}$,
3. $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *famille dénombrable de* $\mathcal{M} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{M}$.

Le couple $(X, \mathcal{M})$ est un espace mesurable. Une partie $A \subset X$ est mesurable si $A \in \mathcal{M}$.

Exemple. $\mathcal{P}(X)$ est une tribu sur X.

Remarque. On vérifie facilement qu'une tribu est stable par intersection et union au plus dénombrable (ie finie ou dénombrable).

Proposition 1.2. *Une intersection quelconque de tribus est une tribu.*

Définition 1.3. *Si $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ on appelle tribu engendrée par $\mathcal{U}$ la tribu*

$$\bigcap_{\substack{\mathcal{M} \text{ tribu}, \\ \mathcal{U}\subset\mathcal{M}}} \mathcal{M}.$$

C'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{U}$.

Noter que l'ensemble des tribus contenant $\mathcal{U}$ (sur lequel on fait l'intersection) n'est pas vide car $\mathcal{P}(X)$ en fait toujours partie.

Définition 1.4. *Si $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ est une topologie*[1] *sur X, la tribu engendrée par $\mathcal{O}$ s'appelle la tribu borélienne sur X. Ses éléments sont les boréliens.*

Définition 1.5. *Soient $(X_1, \mathcal{M}_1)$ et $(X_2, \mathcal{M}_2)$ deux espaces mesurables. Une application mesurable $f : X_1 \to X_2$ est une application vérifiant*

$$f^{-1}(A_2) \in \mathcal{M}_1 \quad \textit{pour tout } A_2 \in \mathcal{M}_2.$$

Noter que dans Rudin, la définition d'application mesurable n'est donnée que dans le cas où X_2 est toplogique et $\mathcal{M}_2$ est la tribu borélienne.

Proposition 1.6. *i) Une composée d'applications mesurables est mesurable.*
ii) Si X_2 est un espace topologique et $\mathcal{M}_2$ est la tribu borélienne, une application $f : X_1 \to X_2$ est mesurable si et seulement si

$$f^{-1}(U_2) \in \mathcal{M}_1 \quad \textit{pour tout ouvert } U_2 \textit{ de } X_2.$$

En particulier, si X_1 est lui-même topologique et équipée de la tribu borélienne, toutes les applications continues de X_1 dans X_2 sont mesurables.

Démonstration. i) Vérification immédiate.
ii) La nécessité est triviale. Pour la réciproque, on considère $\mathcal{M} := \{A_2 \subset X_2 \mid f^{-1}(A_2) \in \mathcal{M}_1\}$. On vérifie que c'est une tribu ; comme elle contient les ouverts, elle contient la tribu borélienne. □

La droite numérique achevée. On note $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On le munit de la relation d'ordre naturelle prolongeant celle de $\mathbb{R}$ et on définit

$$[a, +\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x\}, \qquad]a, +\infty] = [a, +\infty] \setminus \{a\},$$

1. ie $X, \emptyset \in \mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ stable par intersection finie et par union quelconque

ainsi que $[-\infty, a]$ et $[-\infty, a[$ de manière analogue. La topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des parties de $\overline{\mathbb{R}}$ pouvant s'écrire comme réunion quelconque d'intervalles de la forme

$$]a, b[, \qquad [-\infty, a[, \qquad]b, +\infty], \qquad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

On peut vérifier facilement que

1. la topologie (usuelle) de $\mathbb{R}$ est la topologie induite par $\overline{\mathbb{R}}$ (ie les ouverts de $\mathbb{R}$ sont les intersection des ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$ avec $\mathbb{R}$),
2. la topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ est métrisable, ce qui en fait un espace métrique compact homéomorphe à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (utiliser par exemple arctan prolongée naturellement en $\pm\infty$ par $\pm\frac{\pi}{2}$ et considérer la distance $d(a, b) = |\arctan(a) - \arctan(b)|$ pour $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$),
3. toute suite montone de $\overline{\mathbb{R}}$ est convergente.

Dans ce qui suit, les espaces topologiques $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{R}}$ sont équipés des tribus boréliennes. On fixe également un espace mesurable $(X, \mathcal{M})$.

Proposition 1.7. *i) Une application $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable si et seulement si*

$$f^{-1}(]a, +\infty]) \in \mathcal{M}, \qquad \textit{pour tout} \quad a \in \mathbb{R}.$$

ii) Si $f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable pour chaque $j \in \mathbb{N}$, les applications

$$\sup_j f_j, \qquad \inf_j f_j, \qquad \limsup_{j\to\infty} f_j, \qquad \liminf_{j\to\infty} f_j \quad \textit{sont mesurables.}$$

En particulier, si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable,

$$f^+ := \max(f, 0), \qquad f^- := -\min(f, 0) \quad \textit{sont mesurables,}$$

et la limite simple (si elle existe) d'une suite d'applications mesurables est mesurable.

Remarque. Noter que f^- est à valeurs dans $[0, +\infty]$.

Rappelons que $\sup_j f_j$ est la fonction définie par

$$\left(\sup_j f_j\right)(x) := \sup_j f_j(x), \qquad x \in X,$$

qui est bien définie car toute suite de $\overline{\mathbb{R}}$ a une borne supérieure (éventuellement $+\infty$) [2]. Les définitions $\inf_j f_j$, $\limsup_j f_j$ et $\liminf_j f_j$ sont analogues.

Rappelons aussi que, pour une suite a_j à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ (en particulier si elle est à valeurs réelle),

$$\limsup_{j\to\infty} a_j := \lim_{j\to\infty} s_j, \qquad s_j = \sup\{a_j, a_{j+1}, \ldots\},$$

où la limite existe à coup sûr car la suite $(s_j)_j$ est décroissante (la limite est l'inf de cette suite). De même

$$\liminf_{j\to\infty} a_j := \lim_{j\to\infty} i_j, \qquad i_j = \inf\{a_j, a_{j+1}, \ldots\},$$

où $(i_j)_j$ est croissante donc la limite est son sup.

Démonstration de la Proposition 1.7. i) L'un des sens est trivial. Pour l'autre, on remarque d'abord que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}([-\infty, a[) = \cup_{n\geq 1} f^{-1}([-\infty, a - \frac{1}{n}]) = \cup_{n\geq 1} f^{-1}(]a - \frac{1}{n}, +\infty])^c \in \mathcal{M}.$$

2. c'est l'intérêt de considérer des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Mais alors $f^{-1}(]a,b[) = f^{-1}([-\infty,b[) \cap f^{-1}(]a,+\infty]) \in \mathcal{M}$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$. Puis, comme dans la Proposition 1.6, on considère $\mathcal{M} := \{A \subset \overline{\mathbb{R}} \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\}$: c'est une tribu qui contient tous les intervalles du type (1.1) et comme tout ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$ est réunion dénombrable de tels intervalles (voir Exercice 1), elle contient tous les ouverts donc tous les boréliens de $\overline{\mathbb{R}}$.
ii) Posons $\bar{f}(x) = \sup_j f_j(x)$ et $\underline{f}(x) = \inf_j f_j(x)$. Il suffit de remarquer que

$$\bar{f}^{-1}(]a,+\infty]) = \cup_j f_j^{-1}(]a,+\infty]), \qquad \underline{f}^{-1}([a,+\infty]) = \cap_j f_j^{-1}([a,+\infty]),$$

sont mesurables pour chaque $a \in \mathbb{R}$. On voit que $\underline{f}^{-1}(]a,+\infty])$ est mesurable en l'écrivant comme réunion des $\underline{f}^{-1}([a+\frac{1}{n},+\infty])$. Les cas des lim sup et lim inf s'obtiennent de façon analogue car s'écrivent respectivement comme inf et sup de suites de fonctions mesurables positives. □

Proposition 1.8. *i) $f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont mesurables.*
ii) Les sommes, produits et modules d'applications mesurables $X \to \mathbb{C}$ sont mesurables.

Démonstration. i) Supposons f mesurable. Comme $h \circ f$ est mesurable pour toute application continue $h : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ (Proposition 1.6) et comme les applications $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sont continues, $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont mesurables. Pour la réciproque, via l'identification usuelle de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, il suffit de vérifier que si $u, v : X \to \mathbb{R}$ sont mesurables, l'application $F : X \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x) = (u(x), v(x))$ est mesurable. En effet, comme tout ouvert U de $\mathbb{R}^2$ s'écrit comme une réunion dénombrable $\cup_{n\in\mathbb{N}}]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[$ (voir Exercice 1), on a

$$F^{-1}(U) = \cup_{n\in\mathbb{N}} F^{-1}(]a_n, b_n[\times]c_n, d_n[) = \cup_{n\in\mathbb{N}} u^{-1}(]a_n, b_n[) \cap v^{-1}(]c_n, d_n[)$$

qui est mesurable. Le résultat suit de la Proposition 1.6.
ii) $|f|$ est mesurable car de la forme $h \circ f$ avec h continue. Pour les sommes et produits, il suffit de considérer les parties réelles et imaginaires d'après *i)*. Il suffit alors de considérer les sommes et produits de fonctions mesurables réelles qui sont mesurables car de la forme $G_+ \circ F$ et $G_\times \circ F$ avec $G_+(u,v) = u + v$ et $G_\times(u,v) = uv$ qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$. □

Terminons en considérant une classe particulièrement intéressante de fonctions mesurables : les fonctions étagées.

Définition 1.9. *Une fonction $s : X \to \mathbb{C}$ est dite étagée si elle est mesurable et prend un nombre fini de valeurs.*

On vérifie facilement que si s est étagée et si $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ sont les N valeurs distinctes qu'elle prend, elle s'écrit

$$s = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{S_k}, \qquad S_k = f^{-1}(\{\alpha_k\}), \tag{1.2}$$

où chaque S_k est mesurable et χ_{S_k} est sa fonction caractéristique [3]. Dans cette décomposition (dite canonique), on a $\cup_k S_k = X$. Notons au passage que la fonction caractéristique χ_A d'un ensemble mesurable A est étagée et que sa décomposition au sens de (1.2) est $\chi_A = 0 \times \chi_{A^c} + 1 \times \chi_A$.

Proposition 1.10. *Les fonctions étagées forment un espace vectoriel.*

Démonstration. Clairement, le produit d'une fonction étagée par un scalaire est une fonction étagée et il y a juste à prouver que $s + t$ est étagée si s et t sont étagées. Par une récurrence

3. ie vaut 1 sur S_k et 0 sur son complémentaire S_k^c

simple (sur N dans (1.2)), il suffit de considérer le cas où $s = \alpha\chi_S$ et où $t = \sum_{j=1}^M \beta_j \chi_{S_j}$ est étagée quelconque (les S_j sont disjoints et on peut supposer $\cup S_j = X$). Alors

$$s + t = \sum_{j=1}^{M} \alpha\chi_{S\cap S_j} + \beta_j\chi_{S\cap S_j} + \beta_j\chi_{S^c\cap S_j} = \sum_{j=1}^{M}(\alpha+\beta_j)\chi_{S\cap S_j} + \beta_j\chi_{S^c\cap S_j}$$

est mesurable comme somme de fonctions mesurables et prend un nombre fini de valeurs parmi $\alpha+\beta_1,\ldots,\alpha+\beta_M,\beta_1,\ldots,\beta_M$, car leurs images réciproques sont données par les ensembles disjoints $S\cap S_1,\ldots,S\cap S_M, S^c\cap S_1\ldots,S^c\cap S_M$ qui forment une partition de X. $\square$

La proposition suivante dit que les fonctions étagées approchent bien les fonctions mesurables.

Proposition 1.11. *Soit $f : X \to \mathbb{K} = [0,+\infty]$ ou $\mathbb{C}$, une fonction mesurable.*
i) Si $\mathbb{K} = [0,+\infty]$, il existe une suite croissante de fonctions étagées à valeurs dans $[0,+\infty[$ convergeant vers f ponctuellement.
ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il existe une suite (s_n) de fonctions étagées à valeurs dans $\mathbb{C}$ convergeant vers f ponctuellement, et telle que $|s_n| \le |f|$.

Démonstration. i) Il suffit de considérer

$$s_n = \sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j-1}{2^n}\chi_{f^{-1}\left([\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}[\right)} + n\chi_{f^{-1}([n,+\infty])}. \tag{1.3}$$

ii) On décompose $f = u^+ - u^- + i(v^+ - v^-)$, avec $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$. Les fonctions $u^\pm, v^\pm$ sont mesurables (Propositions 1.7 et 1.8) et à valeurs dans $[0,+\infty[$ donc on peut trouver des suites croissantes de fonctions étagées positives $(r_n),(t_n),(x_n),(y_n)$ telles que

$$r_n \to u^+, \qquad t_n \to u^-, \qquad x_n \to v^+, \qquad y_n \to v_-.$$

Cela implique que $s_n := r_n - t_n + i(x_n - y_n)$ est mesurable et tend vers f. En outre, chaque s_n est étagée d'après la Proposition 1.10. Enfin, on remarque que

$$|r_n - t_n| \le |u| \qquad \text{et} \qquad |x_n - y_n| \le |v|,$$

car, par exemple, si $u(x) \ge 0$, $|u(x)| = u(x) = u^+(x) \ge r_n(x) \ge 0$ (par croissance de la suite (r_n)) et $0 = u^-(x) \ge t_n(x) \ge 0$ (par croissance de la suite (t_n)). On en déduit que $|s_n| \le |f|$. $\square$

2 Mesure

Dans cette section, $(X,\mathcal{M})$ désigne un espace mesurable.

2.1 Généralités

Définition 2.1. *Une <u>mesure</u> μ est une application $\mu : \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ σ-additive, ie telle que*

$$\mu\big(\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j\big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j) \in [0,+\infty], \tag{2.1}$$

pour toute famille dénombrable $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}$ disjoints deux à deux, ie

$$A_j \cap A_k = \emptyset, \qquad \text{si } j \ne k.$$

Terminologie. Le triplet $(X, \mathcal{M}, \mu)$ s'appelle un espace mesuré. Si $\mu(X) < +\infty$, on dit que μ est une mesure finie. Si $\mu(X) = 1$, on dit que c'est une mesure de probabilité. Si X est réunion dénombrable d'ensembles de mesures finies, la mesure est dite σ-finie.

La propriété (2.1) sous-entend les règles de calcul suivantes dans $[0, +\infty]$:

$$a + (+\infty) = +\infty + a = +\infty, \qquad a \in [0, +\infty], \tag{2.2}$$

et

$$\sum_j \mu(A_j) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \mu(A_j) = \sup_N \sum_{j=1}^{N} \mu(A_j).$$

En particulier, si l'un des A_j est de mesure infinie (ie $\mu(A_j) = +\infty$) la somme est infinie ; en fait, la somme est finie si et seulement si chaque A_j est de mesure finie et si la série est convergente.

Si μ ne prend pas constamment la valeur $+\infty$ (ce qu'on supposera toujours), on a automatiquement

$$\mu(\emptyset) = 0.$$

En particulier, la propriété (2.1) reste vraie si on considère une famille finie d'ensembles disjoints 2 à 2, en la complétant en une famille dénombrable avec l'ensemble vide $\emptyset$.

Proposition 2.2. *Pour tous $A, B \in \mathcal{M}$ et toutes familles dénombrables $(C_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(D_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}$, on a*

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \le \mu(B), \tag{2.3}$$

$$(C_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ croissante } (C_j \subset C_{j+1}) \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\cup_j C_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(C_j), \tag{2.4}$$

$$(D_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ décroissante et } \mu(D_0) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\cap_j D_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(D_j). \tag{2.5}$$

Démonstration. Pour (2.3), on pose $A_0 = A$, $A_1 = B \setminus A$ et $A_j = \emptyset$ pour $j \ge 2$, et (2.1) nous donne $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \ge \mu(A)$. Pour (2.4), on pose $A_0 = C_0$ et $A_j = C_j \setminus C_{j-1}$ pour $j \ge 1$; ce sont des ensembles mesurables disjoints tels que $\cup_j A_j = \cup_j C_j$ et, d'après (2.1), $\mu(C_N) = \sum_{j\le N} \mu(A_j) \to \sum_j \mu(A_j) = \mu(\cup_j A_j)$. Pour (2.5), on se ramène au cas croissant en posant $C'_j = D_0 \setminus D_j$ qui donne $\mu(D_0 \setminus \cap_j D_j) = \mu(\cup_j C'_j) = \lim_j \mu(C'_j) = \lim_j \mu(D_0 \setminus D_j)$. Pour se débarasser du passage au complémentaire, on utilise que, pour $A \subset D_0$, $\mu(A) = \mu(D_0) - \mu(D_0 \setminus A)$ (la différence a un sens car les ensembles sont de mesure finie). $\square$

Une conséquence utile de cette proposition est que, si $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'ensembles mesurables (mais pas nécessairement disjoints),

$$\mu\left(\cup_j M_j\right) \le \sum_j \mu(M_j). \tag{2.6}$$

En effet, comme $\cup_j M_j = \cup_n C_n$ avec $C_n = M_0 \cup \cdots \cup M_n$ qui est croissante, le terme de gauche n'est autre que $\lim_n \mu(C_n)$ et il suffit de prouver que $\mu(C_n) \le \mu(M_0) + \cdots + \mu(M_n)$. Ceci s'obtient aisément par récurrence en écrivant que $\mu(C_{n+1}) = \mu(C_n) + \mu(C_{n+1} \setminus C_n)$ et en remarquant que $C_{n+1} \setminus C_n \subset M_{n+1}$.

2.2 Ensembles négligeables

Définition 2.3. *Une partie $N \subset X$ est dite négligeable si elle est contenue dans une partie mesurable et de mesure nulle, ie si*

$$\textit{il existe } M \in \mathcal{M} \;\; \textit{telle que} \;\; N \subset M \;\; \textit{et} \;\; \mu(M) = 0.$$

Si on veut préciser la mesure, on dit que N est μ-négligeable.

Attention, cette définition ne dit pas qu'une partie négligeable est mesurable.

Définition 2.4. *On dit qu'une proposition P est vraie presque partout (on note "pp") si elle vraie partout sauf sur un ensemble négligeable, ie si*

$$\{x \in X \mid \textit{non } P(x)\} \quad \textit{est négligeable.}$$

Proposition 2.5. *Une union dénombrable de parties négligeables est négligeable.*

Démonstration. Soit $(N_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une telle famille et soit $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une famille de parties mesurables telle que $N_j \subset M_j$ et $\mu(M_j) = 0$. Alors $\cup_j N_j \subset \cup_j M_j$ avec $\cup_j M_j$ mesurable et de mesure nulle d'après (2.6). □

Définition 2.6. *On dit qu'une mesure μ est complète si toute partie négligeable est mesurable.*

Voici un critère de mesurabilité utile lorsque la mesure est complète.

Proposition 2.7. *Supposons μ complète. Soient $f, g : X \to \mathbb{C}$ deux fonctions quelconques. Alors*

$$f \quad \textit{mesurable et} \quad f = g \textit{ presque partout} \qquad \Rightarrow \qquad g \quad \textit{mesurable.}$$

Démonstration. Soit $N = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$. Il est négligeable donc mesurable. Soit B un borélien de $\mathbb{C}$. Alors

$$g^{-1}(B) = \{x \in X \mid g(x) \in B\} = \{x \in X \setminus N \mid f(x) \in B\} \cup \{x \in X \cap N \mid g(x) \in B\}.$$

Autrement dit $g^{-1}(B)$ est l'union de $f^{-1}(B) \cap N^c$ et d'un ensemble contenu dans N donc négligeable (et donc mesurable). Ainsi $g^{-1}(B)$ est mesurable. □

Théorème 2.8. *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soit*

$$\mathcal{M}^* = \{A \cup N \mid A \in \mathcal{M} \textit{ et } N \ \mu\textit{-négligeable}\}.$$

i) $\mathcal{M}^*$ est une tribu.
ii) Si $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ et N_1, N_2 sont μ-négligeable, on a

$$A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \qquad \Rightarrow \qquad \mu(A_1) = \mu(A_2).$$

iii) L'application $\mu^* : \mathcal{M}^* \to [0, +\infty]$ définie par

$$\mu^*(A \cup N) = \mu(A),$$

pour $A \in \mathcal{M}$ et N μ-négligeable, est une mesure sur $\mathcal{M}^*$ qui est complète.

Remarque. Il est facile de vérifier que $\mathcal{M}^*$ coïncide avec l'ensemble des $E \subset X$ pour lesquels il existe $A, B \in \mathcal{M}$ tels que $A \subset E \subset B$ et $\mu(B \setminus A) = 0$, ce qui est la définition de $\mathcal{M}^*$ utilisée par Rudin.

Définition 2.9. *La mesure μ^* s'appelle la complétée de μ.*

Démonstration du Théorème 2.8. i) Que $X \in \mathcal{M}^*$ ainsi que la stabilité de $\mathcal{M}^*$ par union dénombrable sont faciles à vérifier (utiliser la Proposition 2.5 pour l'union dénombrable). Pour la stabilité par passage au complémentaire, si $A \in \mathcal{M}$ et $N \subset M$ avec $M \in \mathcal{M}$ et $\mu(M) = 0$, il suffit d'écrire

$$(A \cup N)^c = A^c \cap N^c = (A^c \cap M^c) \cup (A^c \cap N^c \cap M),$$

(car $M^c \subset N^c$) et de remarquer que, dans le dernier membre, le premier ensemble est mesurable et le second négligeable car inclus dans M.
ii) Si $N_1 \subset M_1$ avec $M_1 \in \mathcal{M}$ et $\mu(M_1) = 0$, on a $A_2 \subset A_2 \cup N_2 = A_1 \cup N_1 \subset A_1 \cup M_1$ donc $\mu(A_2) \leq \mu(A_1 \cup M_1) \leq \mu(A_1) + \mu(M_1) = \mu(A_1)$. De même $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$.
iii) Notons que μ^* est bien définie d'après *ii)*. La σ-additivité est simple à vérifier. On prouve que μ^* est complète. Considérons $N^* \subset X$ qui est μ^*-négligeable, ie tel qu'il existe $M^* \in \mathcal{M}^*$ vérifiant $N^* \subset M^*$ et $\mu^*(M^*) = 0$. On peut écrire

$$M^* = A \cup N$$

avec $N \subset M$, $A, M \in \mathcal{M}$ et $\mu(M) = 0$. Dans ce cas $\mu^*(M^*) = \mu(A)$ et donc $\mu(A) = 0$. Mais alors, on a $N^* = \emptyset \cup (A \cap N^* \cup N \cap N^*) \in \mathcal{M}^*$ car $\emptyset \in \mathcal{M}$ et la parenthèse est μ-négligeable car $A \cap N^*$ ainsi que $N \cap N^*$ le sont (puisque contenus respectivement dans A et M). □

On termine avec la proposition suivante, souvent utile, sur les applications mesurables relativement à la tribu complétée. On y utilise les notations du Théorème 2.8.

Proposition 2.10. *Si $f : X \to \mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $[0, +\infty]$ est $\mathcal{M}^*$-mesurable, il existe $g : X \to \mathbb{K}$ qui est $\mathcal{M}$-mesurable et telle que $f = g$ μ-presque partout.*

Démonstration. On suppose d'abord que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. D'après la Proposition 1.11, f est limite d'une suite de fonction étagées de la forme

$$s_n = \sum_k \alpha_{k,n} \chi_{S_{k,n}}$$

où, pour chaque n, la somme est finie et (surtout) les $S_{k,n}$ sont $\mathcal{M}^*$-mesurables. Ainsi, chaque $S_{k,n}$ sécrit $A_{k,n} \cup N_{k,n}$ avec $A_{k,n}$ $\mathcal{M}$-mesurable et $N_{k,n} \subset M_{k,n}$ où $M_{k,n}$ est $\mathcal{M}$-mesurable et de μ-mesure nulle. Considérons alors $M := \cup_n(\cup_k M_{k,n})$ qui est $\mathcal{M}$-mesurable et de μ-mesure nulle, puis posons

$$g_n := \chi_{X \setminus M} s_n = \chi_{X \setminus M} \sum_k \alpha_{k,n} \chi_{A_{k,n}},$$

où la deuxième égalité suit simplement du fait que si $x \notin M$, $x \in S_{k,n} \Leftrightarrow x \in A_{k,n}$. Les g_n sont $\mathcal{M}$-mesurables, car les $A_{k,n}$ et M sont $\mathcal{M}$-mesurables. De plus, $g_n(x)$ converge pour tout $x \in X$, vers 0 si $x \in M$ et vers $\lim_n s_n(x) = f(x)$ si $x \notin M$. D'après la Proposition 1.7, $g := \lim g_n$ est $\mathcal{M}$-mesurable et elle convient car coïncide avec f sur $X \setminus M$.

Si $\mathbb{K} = [0, +\infty]$, on considère $I = f^{-1}(\{+\infty\})$, qui est $\mathcal{M}^*$ mesurable donc s'écrit $I = A \cup N$ avec $A \in \mathcal{M}$ et $N \subset M$, $M \in \mathcal{M}$ et $\mu(M) = 0$. Ainsi,

$$f = \chi_{\{f<+\infty\}} f + \infty \chi_A, \qquad \text{pour tout } x \in X \setminus M,$$

ie f coïncide presque partout avec le membre de droite, dont le premier terme est $\mathcal{M}^*$-mesurable à valeurs dans $[0, +\infty[$ (donc égale presque partout à une fonction $\mathcal{M}$-mesurable d'après ce qui précède) et le second est $\mathcal{M}$-mesurable à valeurs dans $\{0, +\infty\} \subset [0, +\infty]$. D'où le résultat. □

3 Intégration

Dans cette section, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

3.1 Fonctions positives

On définit une multiplication sur $[0, +\infty]$ en prolongeant celle sur $[0, +\infty[$ par

$$+\infty \times a = a \times (+\infty) = +\infty, \qquad a \in]0, +\infty], \tag{3.1}$$

$$+\infty \times 0 = 0 \times (+\infty) = 0. \tag{3.2}$$

On peut vérifier les propriétés d'associativité, commutativité et distributivité par rapport à + (avec les règles (2.2)). On peut aussi remarquer que cette multiplication n'est pas continue en $(0, +\infty)$ et $(+\infty, 0)$, mais ce défaut de continuité est sans incidence sur ce qui suit.

Définition 3.1. *Pour une fonction étagée positive, $s : X \to [0, +\infty[$, on définit son intégrale sur X par*

$$\int_X s \ d\mu := \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mu(S_k),$$

via la décomposition canonique (1.2) de s.

Noter que l'intérêt des règles (2.2), (3.1) et (3.2) est de donner un sens à cette somme, même si l'un des A_j est de mesure infinie. La règle (3.2) est "naturelle" (pour l'intégration) car elle assure le fait que

$$\int_X 0 \ d\mu = 0,$$

même si X est de mesure infinie (noter que 0 est une fonction étagée). Remarquons aussi que cette définition de l'intégrale n'exclut pas que $\int_X s \ d\mu = +\infty$.

Définition 3.2. *Pour une fonction mesurable $f : X \to [0, +\infty]$, son intégrale sur X est*

$$\int_X f \ d\mu = \sup_{\substack{s \text{ étagée,} \\ 0 \leq s \leq f}} \int_X s \ d\mu.$$

Ici $0 \leq s \leq f$ signifie $0 \leq s(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in X$.

On vérifie que cette définition est compatible avec la Définition 3.1, ie les deux définitions coïncident si f est étagée. Là non plus, on n'interdit pas que $\int_X f \ d\mu = +\infty$.

On a une première liste de propriétés de l'intégrale des fonctions positives.

Proposition 3.3. *Pour toutes fonctions $f, g : X \to [0, +\infty]$ mesurables, on a les propriétés*

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_X f \ d\mu \quad \leq \quad \int_X g \ d\mu, \tag{3.3}$$

$$\int_X \alpha f \ d\mu \quad = \quad \alpha \int_X f \ d\mu, \qquad \alpha \in [0, +\infty[. \tag{3.4}$$

Démonstration. Pour (3.3), on observe que $\{s \text{ étagées } | 0 \leq s \leq f\} \subset \{s \text{ étagées } | 0 \leq s \leq g\}$ donc le sup des $\int s \ d\mu$ est plus petit sur le premier ensemble que sur le second. Pour (3.4), le résultat est évident si $\alpha = 0$. On suppose donc $\alpha \in]0, +\infty[$ et on observe que l'application $s \mapsto \alpha s$ est une bijection de l'ensemble $\{s \text{ étagées } | 0 \leq s \leq f\}$ vers l'ensemble $\{t \text{ étagées } | 0 \leq t \leq \alpha f\}$ de sorte que

$$\sup_{\substack{t \text{ étagée,} \\ 0 \leq t \leq \alpha f}} \int_X t \ d\mu = \sup_{\substack{s \text{ étagée,} \\ 0 \leq s \leq f}} \int_X \alpha s \ d\mu = \sup_{\substack{s \text{ étagée,} \\ 0 \leq s \leq f}} \alpha \int_X s \ d\mu = \alpha \sup_{\substack{s \text{ étagée,} \\ 0 \leq s \leq f}} \int_X s \ d\mu,$$

car (3.4) est clairement vraie pour les fonctions étagées. □

Noter que l'on n'a pas donné la propriété d'additivité

$$\int_X (f + g) \ d\mu = \int_X f \ d\mu + \int_X g \ d\mu. \tag{3.5}$$

Elle sera prouvée un peu plus loin comme conséquence du théorème de convergence monotone ci-dessous.

Théorème 3.4 (de Beppo-Levi ou convergence monotone)**.** *Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $X \to [0,+\infty]$, croissante au sens où*

$$f_0(x) \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots, \qquad \textit{pour tout } x \in X.$$

Alors

$$\int_X \lim_{j\to\infty} f_j \; d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_X f_j \; d\mu.$$

Rappelons que la fonction $x \mapsto \lim_{j\to\infty} f_j(x)$ est définie partout (suite croissante) et est mesurable d'après la Proposition 1.7.

La preuve du théorème utilise le lemme suivant.

Lemme 3.5. *Soit $s : X \to [0,+\infty[$ une fonction étagée. Alors, l'application*

$$\mathcal{M} \ni A \mapsto \nu(A) = \int_A s \; d\mu := \int_X s\chi_A \; d\mu,$$

est une mesure.

Démonstration. On vérifie facilement que $\chi_A s$ est étagée de sorte que l'intégrale a un sens pour tout $A \in \mathcal{M}$. Il faut juste vérifier la propriété (2.1). On considère donc une famille dénombrable $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables disjoints. Posons $A = \cup_j A_j$. En utilisant la notation (1.2), on a

$$s\chi_A = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_A \chi_{S_k} = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{S_k \cap A},$$

qui est étagée positive (on obtient sa décomposition canonique en ajoutant $0 \times \chi_{A^c}$) et donc

$$\nu(\cup_j A_j) = \int_X s\chi_A \; d\mu = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mu(S_k \cap A).$$

Mais, comme $S_k \cap A = \cup_j S_k \cap A_j$, où l'union est disjointe, on a $\mu(S_k \cap A) = \sum_j \mu(S_k \cap A_j)$ donc

$$\nu(\cup_j A_j) = \sum_j \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mu(S_k \cap A_j) = \sum_j \int_X \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{S_k \cap A_j} \; d\mu = \sum_j \int_X s\chi_{A_j} \; d\mu = \sum_j \nu(A_j),$$

qui est la propriété cherchée. □

Démonstration du Théorème 3.4. On commence par noter que la suite $\int f_n d\mu$ a une limite car elle est croissante, d'après (3.3). Soit α sa limite. D'autre part, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et chaque $x \in X$, $f_n(x) \le \lim_j f_j(x) = \sup_j f_j(x)$, donc, d'après (3.3), on a $\int_X f_n \; d\mu \le \int (\lim_{j\to\infty} f_j) \, d\mu$ dont on déduit que

$$\alpha \le \int \lim_{j\to\infty} f_j \; d\mu.$$

Notons alors $f = \lim_{j\to\infty} f_j$. Il reste à montrer que $\alpha \ge \int_X f \; d\mu$. Soit $0 \le s \le f$ étagée et considérons, pour $0 < c < 1$, la suite croissante (avec n) d'ensemble mesurables

$$C_n = \{x \in X \mid f_n(x) \ge cs(x)\}.$$

On remarque que $\cup_n C_n = X$: si $f(x) = 0$ ou $s(x) = +\infty$ alors $x \in C_0$ et si $f(x) > 0$, avec $s(x) < +\infty$, alors x est dans l'un des C_n, autrement $f_n(x) < cs(x)$ pour tout n et alors $f(x) \le cf(x)$ ce qui est impossible. Par la propriété (2.4) appliquée à la mesure du Lemme 3.5, on a

$$\lim_{n\to\infty} c \int_{C_n} s \; d\mu = c \int_X s \; d\mu.$$

Mais aussi, d'après (3.3) et (3.4), on a

$$\int_X f_n \ d\mu \geq \int_{C_n} f_n d\mu \geq c \int_{C_n} s \ d\mu.$$

Par passage à la limite, on obtient donc $\alpha \geq c \int_X s d\mu$ pour tout $0 < c < 1$ et donc $\alpha \geq \int_X s d\mu$ pour toute s étagée telle que $0 \leq s \leq f$. Ceci prouve que $\alpha \geq \int_X f \ d\mu$. $\square$

Théorème 3.6 (Lemme de Fatou). *Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $X \to [0, +\infty]$. Alors*

$$\int_X \left(\liminf_{j\to\infty} f_j \right) \ d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \left(\int_X f_j \ d\mu \right).$$

Démonstration. Posons $g_n(x) = \inf_{j\geq n} f_j(x)$. Cela definit une suite croissante de fonctions mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$, dont la limite est $\liminf_{j\to\infty} f_j$. Donc par théorème de convergence monotone, on a

$$\int_X \left(\liminf_{j\to\infty} f_j \right) \ d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n \ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \ d\mu.$$

Mais comme $\int_X g_n \ d\mu \leq \int_X f_j \ d\mu$ pour tout $j \geq n$, un passage à la limite inférieure (en j) montre que, pour tout n,

$$\int_X g_n \ d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \left(\int_X f_j \ d\mu \right).$$

On obtient le résultat en faisant tendre n vers ∞. $\square$

Théorème 3.7. *Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $X \to [0, +\infty]$. Alors*

$$\int_X \sum_{j=0}^{\infty} f_j \ d\mu = \sum_{j=0}^{\infty} \int_X f_j \ d\mu.$$

En particulier, (3.5) est vraie pour toutes fonctions mesurables $f, g : X \to [0, +\infty]$.

Nous aurons besoin d'un lemme.

Lemme 3.8. *Si $s, t : X \to [0, +\infty[$ sont étagées, on a $\int_X (s + t) \ d\mu = \int_X s \ d\mu + \int_X t \ d\mu$.*

Démonstration. On écrit $s = \sum_k \alpha_k \chi_{S_k}$ et $t = \sum_j \beta_j \chi_{T_j}$, où les sommes sont finies et les α_k (resp. β_j) distincts. On peut supposer que les S_k et les T_j forment (respectivement) une partition de X, auquel cas les $U_{jk} := S_k \cap T_j$ également. Alors, en posant $\sigma_{jk} = \alpha_k$ et $\tau_{jk} = \beta_j$, on a

$$s = \sum_{j,k} \sigma_{jk} \chi_{U_{jk}}, \qquad t = \sum_{j,k} \tau_{jk} \chi_{U_{jk}}, \qquad s + t = \sum_{j,k} (\sigma_{jk} + \tau_{jk}) \chi_{U_{jk}}.$$

Cette écriture de $s + t$ n'est pas nécessairement sa décomposition canonique car les $\sigma_{jk} + \tau_{jk}$ ne sont pas forcément distincts (pour des paires (j, k) différentes). Néanmoins, elle permet de vérifier facilement que $s + t$ est étagée et que

$$\int_X s + t \ d\mu = \sum_{j,k} (\sigma_{jk} + \tau_{jk}) \mu(U_{jk}),$$

en groupant les (j, k) à $\sigma_{jk} + \tau_{jk}$ constants. Puis, comme

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k} (\sigma_{jk} + \tau_{jk}) \mu(U_{jk}) &= \sum_k \sum_j \alpha_k \mu(S_k \cap T_j) + \sum_j \sum_k \beta_j \mu(S_k \cap T_j) \\
&= \sum_k \alpha_k \mu(S_k) + \sum_j \beta_j \mu(T_j) \\
&= \int_X s \ d\mu + \int_X t \ d\mu,
\end{aligned}$$

on a le résultat. $\square$

Démonstration du Théorème 3.7. Comme la suite $\sum_{j\leq n} f_j$ converge en croissant vers $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$, le théorème de convergence montone montre que

$$\int_X \sum_{j=0}^{\infty} f_j \ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \sum_{j\leq n} f_j \ d\mu.$$

Il suffit donc de vérifier que $\int_X \sum_{j\leq n} f_j \ d\mu = \sum_{j\leq n} \int_X f_j \ d\mu$, ce qui se ramène par une récurrence évidente au cas $n = 2$, ie à la propriété (3.5). Pour prouver celle ci, on considère $g, h : X \to [0, +\infty]$ mesurables et, grace à la Proposition 1.11, deux suites de fonctions étagées g_k, h_k convergeant en croissant vers g et h respectivement. Alors $g_k + h_k$ est étagée et converge en croissant vers $g + h$ donc le théorème de convergence monotone montre que

$$\int_X g \ d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \ d\mu, \qquad \int_X h \ d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X h_k \ d\mu, \qquad \int_X g+h \ d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k+h_k \ d\mu.$$

Mais, par le Lemme 3.8, $\int_X g_k + h_k \ d\mu = \int_X g_k \ d\mu + \int_X h_k \ d\mu$, donc $\int_X g + h \ d\mu = \int_X g \ d\mu + \int_X h \ d\mu$ en passant à la limite. D'où le résultat. $\square$

3.2 Fonctions à valeurs complexes

Si $f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable, notons $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$ de sorte que

$$f = u^+ - u^- + iv^+ - iv^-, \tag{3.6}$$

où chacune des fonctions intervenant dans cette décomposition est mesurable d'après la Proposition 1.8. La Proposition 1.8 dit également que $|f|$ est mesurable, à valeurs dans $[0, +\infty[$, ce qui donne un sens à la définition suivante.

Définition 3.9. *$\mathcal{L}^1(\mu)$, qu'on note aussi $\mathcal{L}^1(X, d\mu)$, est l'ensemble des applications mesurables $X \to \mathbb{C}$ telles que*

$$\int_X |f| \ d\mu < +\infty.$$

On dit qu'une fonction f est intégrable si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Son intégrale sera définie ci-dessous par (3.8).

L'ensemble $\mathcal{L}^1(\mu)$ est un espace vectoriel car on a

$$\int_X |\alpha f + g| \ d\mu \leq |\alpha| \int_X |f| \ d\mu + \int_X |g| \ d\mu < \infty, \qquad \alpha \in \mathbb{C}, \ f, g \in \mathcal{L}^1(\mu), \tag{3.7}$$

en utilisant (3.3), (3.4), (3.5) et $|\alpha f + g| \leq |\alpha||f| + |g|$. De plus, comme $0 \leq u^{\pm} \leq |f|$ et $0 \leq v^{\pm} \leq |f|$, on peut définir

$$\int_X f \ d\mu := \int_X u^+ \ d\mu - \int_X u^- \ d\mu + i \left(\int_X v^+ \ d\mu - \int_X v^- d\mu \right), \tag{3.8}$$

chacune des intégrales étant un nombre réel de $[0, +\infty[$. Cette définition est clairement compatible avec la définition 3.2, car si f est à valeurs dans $\mathbb{C} \cap [0, +\infty]$ (ie dans $[0, +\infty[$), on a $f = u^+$ et $u^- = v^{\pm} = 0$.

Proposition 3.10. *L'intégrale est une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1(\mu)$, ie*

$$\int_X (\alpha f + \beta g) \ d\mu = \alpha \int_X f \ d\mu + \beta \int_X g \ d\mu, \tag{3.9}$$

pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. De plus, on a l'inégalité triangulaire

$$\left| \int_X f \ d\mu \right| \leq \int_X |f| \ d\mu. \tag{3.10}$$

Démonstration. Pour (3.9), on prouve séparément l'additivité ($\alpha = \beta = 1$) et l'homogénéité ($g = 0$). Pour l'additivité, il est facile de voir qu'il suffit de considérer des fonctions à valeurs réelles. Dans ce cas, on pose $h = f + g$ et on a alors $h = h^+ - h^- = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$ de sorte que

$$h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-.$$

En intégrant cette égalité ne faisant intervenir que des fonctions positives, la propriété (3.5) montre que $\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int f^+ + \int g^+ + \int g^-$ et donc

$$\int_X h^+ \, d\mu - \int_X h^- \, d\mu = \left(\int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \right) + \left(\int_X g^+ \, d\mu - \int_X g^- \, d\mu \right),$$

qui est l'identité cherchée. L'homogénéité s'obtient en décomposant parties réelles et imaginaires, puis parties positives et négatives et en utilisant $f^\mp = (-f)^\pm$ et (3.4). Pour démontrer (3.10), on considère $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $|\int_X f \, d\mu| = e^{i\theta} \int_X f \, d\mu = \int_X e^{i\theta} f \, d\mu$. Cette dernière intégrale étant réelle, elle vaut $\int_X \mathrm{Re}(e^{i\theta} f) \, d\mu$. En intégrant $|f| - \mathrm{Re}(e^{i\theta} f) \geq 0$ puis en utilisant (3.3) et (3.9), on obtient le résultat. □

Théorème 3.11 (Convergence dominée, version 1)**.** *Soit $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $X \to \mathbb{C}$ telle que*

1. *pour tout $x \in X$, $(f_j(x))_{j \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$,*
2. *il existe $g : X \to [0, +\infty]$ telle que*

$$\int_X g \, d\mu < +\infty \qquad \text{et} \qquad |f_j(x)| \leq g(x), \qquad \text{pour tous } j \in \mathbb{N} \text{ et } x \in X.$$

Alors, si on note f la limite simple des f_j, on a $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et

$$\int_X |f - f_j| \, d\mu \to 0, \qquad j \to \infty.$$

En particulier

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{j \to \infty} \int_X f_j \, d\mu.$$

Démonstration. Notons d'abord que f est mesurable car limite simple des f_j. On applique alors le lemme de Fatou à $2g - |f - f_j|$: c'est une suite de fonctions mesurables positives donc

$$\int_X 2g \, d\mu = \int_X \liminf_{j \to \infty} (2g - |f - f_j|) \, d\mu \leq \liminf_{j \to \infty} \int_X (2g - |f - f_j|) \, d\mu.$$

Comme $\liminf_{j \to \infty} (a + x_j) = a + \liminf_{j \to \infty} x_j$ pour toute suite réelle $(x_j)_{j \in \mathbb{R}}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, et comme $\liminf_{j \to \infty} (-x_j) = - \limsup_{j \to \infty} x_j$, on en déduit que

$$\int_X 2g \, d\mu \leq \int_X 2g \, d\mu - \limsup_{j \to \infty} \int_X (|f - f_j|) \, d\mu$$

ce qui prouve que $\limsup_{j \to \infty} \int_X (|f - f_j|) \, d\mu = 0$. Cette suite étant positive, elle est donc convergente vers 0. On voit aussi que $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ puisque $\int_X |f| \, d\mu \leq \int_X |f - f_j| \, d\mu + \int_X |f_j| \, d\mu$ où les deux suites sont bornées (la première tend vers 0 et l'autre est majorée par $\int_X g$). □

Il est souvent utile, dans les applications, de savoir intégrer des fonctions définies sur un sous-ensemble de X (ex. sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$). Une définition naturelle est la suivante.

Définition 3.12. *Si $Y \subset X$ est une partie mesurable, on dit qu'une application $f : Y \to \mathbb{C}$ est intégrable sur Y si son extension par 0 hors de Y, $\widetilde{f} : X \to \mathbb{C}$, est intégrable sur X. On pose alors*

$$\int_Y f \, d\mu = \int_X \widetilde{f} \, d\mu.$$

Pour plus de détails à ce sujet, on renvoie à l'Exercice 3.

3.3 Négligeabilité bis

Proposition 3.13. *Soit $f : X \to [0, +\infty]$ mesurable. Alors*

$$\int_X f \, d\mu = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f = 0 \ \ pp.$$

Attention à l'hypothèse de positivité de f.

On va utiliser le lemme très simple (et très utile) suivant.

Lemme 3.14 (Inégalité de Markov-Tchebichev)**.** *Soit $f : X \to [0, +\infty]$ mesurable. Pour tout $\lambda > 0$,*

$$\mu\left(\{x \in X \mid f(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{1}{\lambda} \int_X f \, d\mu.$$

Démonstration. Pour simplifier, on note $\{f > \lambda\} = \{x \in X \mid f(x) > \lambda\}$. Il suffit alors d'observer que $f \geq \lambda \chi_{\{f > \lambda\}}$ donc, par monotonie de l'intégrale (ie par (3.3)), on a

$$\int_X f \, d\mu \geq \lambda \mu(\{f > \lambda\}),$$

ce qui est exactement le résultat. $\square$

Démonstration de la Proposition 3.13. $\underline{\Rightarrow}$. On remarque que

$$\mu\left(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}\right) = \mu\left(\{f > 0\}\right) = \lim_{j \to +\infty} \mu\left(\{f > \frac{1}{j}\}\right) = 0,$$

en utilisant (2.4) et le Lemme 3.14 qui montre que $\mu\left(\{f > \frac{1}{j}\}\right) = 0$ pour tout $j > 0$.

$\underline{\Leftarrow}$. On peut par exemple remarquer que $f \leq +\infty \chi_{\{f>0\}}$ et

$$\int +\infty \chi_{\{f>0\}} \, d\mu = +\infty \mu\left(\{f > 0\}\right) = 0$$

en vertu de la règle (3.2). Une autre façon de procéder (qui évite le recours à $+\infty$) est de voir que f est la limite ponctuelle de la suite croissante

$$f_n = \min(n, f) \chi_{\{f>0\}}$$

et d'utiliser le théorème de convergence monotone en remarquant que $\int f_n \, d\mu \leq n\mu(\{f > 0\}) = 0$. $\square$

Dans le même esprit, on a un autre résultat utile dans la pratique.

Proposition 3.15. *Soit $f : X \to [0, +\infty]$ mesurable. Si $\int_X f \, d\mu < +\infty$, alors f est finie presque partout.*

Démonstration. Il s'agit de démontrer que $\{f = +\infty\}$ est négligeable ou, de façon équivalente, que $\cap_{n \in \mathbb{N}} \{f > n\}$, est négligeable. Par l'inégalité de Markov-Tchebichev, on a

$$\mu(\{f > n\}) \leq \frac{1}{n} \int_X f \, d\mu, \qquad n > 0.$$

Comme les ensembles $\{f > n\}$ décroissent et sont de mesure finies (à partir de $n = 1$), (2.5) montre que $\mu(\cap_{n \in \mathbb{N}} \{f > n\}) = \lim_{n \to \infty} \mu(\{f > n\}) = 0$. $\square$

Une conséquence importante de la Proposition 3.13 est la suivante.

Proposition 3.16. *Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Alors*

$$f = g \quad pp \qquad \Rightarrow \qquad \int_X f\ d\mu = \int_X g\ d\mu. \tag{3.11}$$

Lorsque f et g sont à valeurs réelles, on a aussi

$$f \leq g \quad pp \qquad \Rightarrow \qquad \int_X f\ d\mu \leq \int_X g\ d\mu. \tag{3.12}$$

Démonstration. Pour (3.11), il suffit d'écrire que $|\int_X f d\mu - \int_X g d\mu| \leq \int_X |f-g| d\mu = 0$. Pour (3.12), il suffit, par linéarité, de prouver que $\int_X (g-f)\ d\mu \geq 0$. Cela suit de (3.3) et (3.11) qui montrent que $\int_X (g-f)\ d\mu = \int_X (g-f)\chi_{\{g-f\geq 0\}}\ d\mu \geq 0$. □

Théorème 3.17 (Convergence dominée, version 2)**.** *Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables $X \to \mathbb{C}$ et $f : X \to \mathbb{C}$ mesurable telle que*

1. *pour presque tout $x \in X$, $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$,*
2. *il existe $g : X \to [0, +\infty]$ telle que*

$$\int_X g\ d\mu < +\infty \qquad et \qquad |f_j(x)| \leq g(x), \qquad \text{pour tout } j \in \mathbb{N} \text{ et presque tout } x \in X.$$

Alors, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et

$$\int_X |f - f_j|\ d\mu \to 0, \qquad j \to \infty.$$

En particulier

$$\int_X f\ d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_X f_j\ d\mu.$$

Remarque. Le "pour tout $j \in \mathbb{N}$" et le "presque tout $x \in X$" peuvent être permutés dans l'hypothèse *2* (voir Exercice 2).

Démonstration. L'idée est de se ramener au Théorème 3.11 en modifiant les fonctions sur des ensembles négligeables pour avoir des propriétés vraies partout au lieu de presque partout. Fixons $M_1 \in \mathcal{M}$ de mesure nulle tel que $f_j(x) \to f(x)$ pour tout $x \in X \setminus M_1$. Considérons $M_2 \in \mathcal{M}$ de mesure nulle tel que $|f_j(x)| \leq g(x)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X \setminus M_2$. Alors, l'ensemble $M = M_1 \cup M_2$ est mesurable, de mesure nulle et les fonctions

$$\widetilde{f}_j := f_j \chi_{M^c}, \qquad \widetilde{f} := f \chi_{M^c}, \qquad \widetilde{g} := g \chi_{M^c}$$

vérifient les hypothèses du Théorème 3.11 : si $x \in M$, $\widetilde{f}_j(x) = 0 \to 0 = \widetilde{f}(x)$ et si $x \in M^c \subset X \setminus M_1$, $\widetilde{f}_j(x) = f_j(x) \to f(x) = \widetilde{f}(x)$. De même $|\widetilde{f}_j(x)| \leq \widetilde{g}(x)$ pour tout j et tout x. De plus $\int_X \widetilde{g}\ d\mu = \int_X g\ d\mu < \infty$ d'après la Proposition 3.16. On en déduit que $\int_X |\widetilde{f}_j - \widetilde{f}|\ d\mu \to 0$ ce qui donne le résultat puisque $\int_X |f_j - f|\ d\mu = \int_X |\widetilde{f}_j - \widetilde{f}|\ d\mu$ d'après la Proposition 3.16. □

Le Théorème 3.17 est peut-être la forme la plus usuelle du Théorème de convergence dominée, mais on peut donner encore d'autre variantes.

Variante 1. Si la mesure μ est complète, on n'est même pas obligé de supposer f mesurable car on peut utiliser la Proposition 2.7 : en effet, en utilisant les notations de la preuve ci-dessus, f coïncide presque partout avec la fonction $\widetilde{f}$ qui est mesurable car limite ponctuelle des $\widetilde{f}_j$ qui sont mesurables.

Variante 2. Si on ne suppose pas μ complète, on peut modifier l'énoncer du théorème en ne se donnant pas f a priori et en supposant seulement que les $f_j(x)$ ont une limite (finie) pour presque tout x. On peut alors affirmer *l'existence* d'une fonction f mesurable qui est, pour presque tout x, la limite de $f_j(x)$ et vérifie $\int_X |f_j - f| \, d\mu \to 0$.

Nous venons de voir que si $f_j \to f$ presque partout, avec une condition de domination, alors $\int_X |f_j - f| d\mu \to 0$. Voici une réciproque partielle de cette propriété.

Théorème 3.18. *Soient $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{L}^1(\mu)$ et $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telles que*

$$\int_X |f_j - f| \, d\mu \to 0, \qquad j \to \infty. \tag{3.13}$$

Alors, il existe une sous-suite $(f_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$f_{j_k} \to f, \qquad pp,$$

quand $k \to \infty$.

Lemme 3.19 (Borel-Cantelli)**.** *Soit $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables telles que*

$$\sum_j \mu(A_j) < +\infty.$$

Alors, presque tout x de X appartient à un nombre fini de A_j (éventuellement aucun).

Démonstration. Soit B le complémentaire, éventuellement vide, des x n'appartenant qu'à un nombre fini de A_j. On vérifie que

$$B = \cap_{n\in\mathbb{N}} \left(\cup_{j\geq n} A_j\right).$$

En particulier, B est mesurable. En utilisant (2.5) et (2.6), on en déduit que

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\cup_{j\geq n} A_j\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j\geq n} \mu(A_j) = 0,$$

d'où le résultat. □

Démonstration du Théorème 3.18. D'après (3.13), on peut extraire une sous suite $(f_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\int_X |f_{j_k} - f| \, d\mu \leq 2^{-2k}$. Posons $A_k = \{x \in X \mid |f_{j_k}(x) - f(x)| > 2^{-k}\}$. Par inégalité de Markov-Tchebichev, on a

$$\mu(A_k) \leq 2^k 2^{-2k} = 2^{-k}.$$

Mais alors, par le lemme de Borel-Cantelli, pour presque tout $x \in X$, il existe $k_x \in \mathbb{N}$ tel que $x \notin A_k$ pour tout $k \geq k_x$ [4] et donc $|f_{j_k}(x) - f(x)| \leq 2^{-k}$ pour $k \geq k_x$. □

4 La mesure de Lebesgue

La majorité des résultats présentés dans cette section seront donnés sans démonstration. C'est d'autant moins gênant que le programme officiel de l'agrégation autorise à admettre la construction de la mesure de Lebesgue.

Théorème 4.1. *On peut équiper $\mathbb{R}^d$ d'une mesure λ, définie sur une tribu $\mathcal{M}$, ayant les propriétés suivantes :*

1. *$\mathcal{M}$ contient la tribu borélienne ; de plus, pour tout $M \in \mathcal{M}$, il existe A, B boréliens tels que $A \subset M \subset B$ et $\lambda(B \setminus A) = 0$,*
2. *λ est complète,*

4. car être dans un nombre fini de A_k c'est être dans tous les A_k^c pour k assez grand

3. *pour tout pavé $P =]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_d, b_d[$, avec $a_j < b_j$ réels,*

$$\lambda(P) = \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j),$$

4. *λ est invariante par translation, ie*

$$\lambda(x + A) = \lambda(A),$$

pour tous $x \in \mathbb{R}^d$ et $A \in \mathcal{M}$.

En outre, une telle mesure est unique au sens suivant : si μ est une mesure définie sur une tribu contenant les boréliens, qui est invariante par translation et finie sur tous les compacts, alors μ est proportionnelle à λ sur les boréliens.

Définition 4.2. *λ s'appelle la mesure de Lebesgue. Si on veut faire apparaître la dimension, on note aussi λ_d.*

En pratique, on note plus souvent $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$ (voire $\int f$ tout simplement) que $\int_{\mathbb{R}^d} f \, d\lambda$. On note aussi $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ pour $\mathcal{L}^1(\lambda)$.

Une conséquence directe du Théorème 4.1 est que toute fonction mesurable par rapport à $\mathcal{M}$ (en particulier Borel mesurable ou, a fortiori, continue), bornée et nulle hors d'un compact est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. En effet, si f est une telle fonction nulle en dehors d'un compact K, on peut inclure K dans $]-R, R[^d$ avec R assez grand, et alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \, dx \leq ||f||_\infty (2R)^d < \infty,$$

où $||f||_\infty = \sup_{\mathbb{R}^d} |f|$. Un cas particulier important de fonctions verifiant ces conditions est celui des fonctions continues à support compact dont on rappelle la définition.

Définition 4.3. *On note $C_c(\mathbb{R}^d)$ l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact (ie s'annulant hors d'un compact, dépendant de la fonction considérée).*

Théorème 4.4 (Lusin)**.** *Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction Lebesgue-mesurable, bornée et nulle hors d'une partie de mesure de Lebesgue finie. Alors, il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $C_c(\mathbb{R}^d)$ telle que*

1. *pour tout n,*

$$||g_n||_\infty \leq ||g||_\infty \text{ [5]},$$

2. *pour λ-presque tout x,*

$$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = g(x).$$

Si f est nulle hors d'un compact K et si Ω est un voisinage arbitraire de K, on peut en plus supposer les g_n nulles en dehors de Ω.

Ce théorème, ainsi que le Théorème 4.1, reposent sur le fait que la mesure de Lebesgue s'obtient par le *Théorème de représentation de Riesz* sur les mesures de Radon positives (ie les formes linéaires continues positives sur $C_c(\mathbb{R}^d)$ [6]). Le Théorème 4.4 utilise une propriété de régularité de telles mesures, disant que tout ensemble mesurable A peut être approché "inférieurement" par un fermé et "supérieurement" par un ouvert, au sens où, pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver F fermé et O ouvert tels que $F \subset A \subset O$ et $\lambda(O \setminus F) < \epsilon$.

Nous verrons une application très importante du Théorème 4.4 dans la Section 5 (Théorème 5.14) sur la densité des fonctions continues à supports compacts dans les espaces de Lebesgue.

Comme la tribu de Lebesgue est définie abstraitement, la proposition suivante est souvent utile pour simplifier les questions de mesurabilité.

5. $||\cdot||_\infty$ est la norme uniforme usuelle $\sup_{\mathbb{R}^d} |\cdot|$
6. ou, de façon équivalente, les distributions positives (voir les TD de M1 en F-EDP)

Proposition 4.5. *Pour toute $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $[0, +\infty]$ Lebesgue-mesurable, il existe $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ borélienne, telle que $f = g$ presque partout.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la Proposition 2.10. □

Terminons par un théorème très important, la formule de changement de variables.

Théorème 4.6 (Changement de variables)**.** *Soit $\Phi : U \to V = \Phi(U)$ un C^1 difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^d$. Alors, pour toute f intégrable sur V, la fonction*

$$x \mapsto f(\Phi(x)) \left|\det \Phi'(x)\right|$$

est intégrable sur U et on a

$$\int_U f(\Phi(x)) \left|\det \Phi'(x)\right| \, dx = \int_{\Phi(U)} f(y) dy.$$

5 Les espaces L^p

Sauf dans le paragraphe 5.4, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ désignera partout un espace mesuré quelconque.

5.1 $p \geq 1$ fini

Dans la Section 3, on a vu $\mathcal{L}^1(\mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{C}$ telles que $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$. Plus généralement, pour $p \in [1, +\infty[$ on définit $\mathcal{L}^p(\mu)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{C}$ telle que $\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$. Autrement dit

$$f \in \mathcal{L}^p(\mu) \qquad \Leftrightarrow \qquad f^p \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Notons que $\mathcal{L}^p(\mu)$ est un espace vectoriel car, par convexité de la fonction $t \mapsto t^p$ sur $[0, +\infty[$, on a

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^{p-1} \left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right), \qquad x \in X, \tag{5.1}$$

dont on déduit facilement que $\alpha f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ si $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Si $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, on pose

$$||f||_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

On verra plus loin qu'on a l'inégalité triangulaire $||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$ (inégalité de Minkowski) et il est trivial que $||\alpha f||_p = |\alpha| ||f||_p$ si $\alpha \in \mathbb{C}$. Néanmoins, $|| \cdot ||_p$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p(\mu)$ puisque, d'après la Proposition 3.13,

$$||f||_p = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_X |f|^p \, d\mu = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |f|^p = 0 \ \text{ pp} \qquad \Leftrightarrow \qquad f = 0 \ \text{ pp},$$

donc la condition $||f||_p = 0$ n'assure (en général) pas que $f = 0$ partout. Pour cette raison, on considère la relation

$$f \sim g \qquad \Leftrightarrow \qquad f = g \ \text{ pp}.$$

On vérifie facilement que c'est une relation d'équivalence. On peut alors définir le "bon" espace qui est $L^p(\mu)$.

Définition 5.1. *L'ensemble $L^p(\mu)$ est le quotient*

$$L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu) / \sim .$$

Ses éléments sont donc les classes d'équivalences, relativement à $\sim$, des fonctions de $\mathcal{L}^p(\mu)$.

On vérifie sans difficulté que $L^p(\mu)$ est muni d'une structure d'espace vectoriel, par le raisonnement usuel sur les classes déquivalences : si $f_1 \sim f_2$ et $g_1 \sim g_2$ alors $\alpha f_1 + g_1 \sim \alpha f_2 + g_2$ (pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$) donc si $F, G \in L^p(\mu)$ admettent pour représentants respectifs $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ (ce qu'on note $F = \{f\}$, $G = \{g\}$) on peut défnir sans ambiguïté

$$\alpha F + G := \{\alpha f + g\}$$

car cela ne dépend pas du choix de f et g. De même, on peut poser

$$||F||_p := ||f||_p,$$

car si $f_1 \sim f_2$, ie $F = \{f_1\} = \{f_2\}$ alors $||f_1||_p = ||f_2||_p$.

En pratique, on confondra souvent un élément de $L^p(\mu)$ et l'un de ses représentants (on fait tous les jours ce genre d'abus avec les nombres rationnels) ; on dira par exemple "soit $f \in L^p(\mu)$" au lieu de "soit $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ un représentant de $F \in L^p(\mu)$".

La propriété essentielle des espaces $L^p(\mu)$ est la suivante.

Théorème 5.2. *Pour tout réel $p \geq 1$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach pour la norme $|| \cdot ||_p$.*

Nous verrons plus loin que ce résultat est encore vrai pour $p = \infty$.

L'énoncé du Théorème 5.2 contient le fait que $|| \cdot ||_p$ est une norme, ce que nous n'avons pas encore vérifié. Comme nous l'avons déjà dit plus haut, cela utilise l'inégalité de Minkowski (5.3) ci-dessous que nous commençons par démontrer. Notons que si $p = 1$, on a déjà démontré l'inégalité triangulaire (voir (3.7)). On suppose donc $p > 1$.

Proposition 5.3. *Soient $p > 1$ réel et $f, g : X \to [0, +\infty]$ mesurables.*
i) Inégalité de Hölder. Si q est l'exposant conjugué de p, ie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$\int_X fg \, d\mu \leq \left(\int_X f^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q \, d\mu\right)^{1/q} \tag{5.2}$$

ii) Inégalité de Minkowski.

$$\left(\int_X (f+g)^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p \, d\mu\right)^{1/p}. \tag{5.3}$$

Par convention, $(+\infty)^{1/p} = (+\infty)^{1/q} = +\infty$.

On verra plus loin que cet énoncé reste vrai pour $p = 1$ et $q = \infty$ (cf (5.7) et (5.8)).

Démonstration. i) On pose $A = \left(\int_X f^p \, d\mu\right)^{1/p}$ et $B = \left(\int_X g^q \, d\mu\right)^{1/q}$. Si l'un des deux est infini et l'autre non nul c'est évident car le membre de droite est infini. Si l'un des deux est nul, disons A, alors $f = 0$ pp, donc $fg = 0$ pp, de sorte que l'intégrale de gauche est nulle et le résultat est encore vrai. On peut donc supposer A et B finis et non nuls. On considère alors

$$f_1 = \frac{f}{A}, \qquad g_1 = \frac{g}{B}.$$

En particulier, $\int_X f_1^p \, d\mu = \int_X g_1^q \, d\mu = 1$. En tout point x où f_1 et g_1 sont finies simultanément, on a alors

$$f_1(x) g_1(x) \leq \frac{f_1(x)^p}{p} + \frac{g_1(x)^q}{q},$$

car si l'une des deux est nulle c'est trivial, sinon cela suit de la convexité de l'exponentielle sur l'intervalle d'extrémités $\log(f_1(x)^p)$ et $\log(g_1(x)^q)$. Comme f_1 et g_1 sont finies pp (Proposition 3.15 appliquée à f_1^p et g_1^q), cette égalité a lieu presque partout donc, en l'intégrant et en utilisant (3.12), on obtient $\int_X fg \, d\mu \leq AB$ qui est exactement le résultat.

ii) Si $\int_X (f+g)^p d\mu = 0$, c'est évident, tout comme si $\int_X f^p d\mu$ ou $\int_X g^p d\mu$ est infinie. On peut donc se limiter au cas où ces deux dernières intégrales sont finies, et $\int_X (f+g)^p d\mu > 0$. Notons qu'alors cette dernière est également finie en vertu de (5.1), en utilisant que f et g sont finies presque partout. Le résultat s'obtient alors en écrivant que $(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$ (où il n'y pas de risque de $(+\infty)^0$ car $p-1>0$) et en appliquant l'inégalité de Hölder

$$\int_X f(f+g)^{p-1}\ d\mu \leq \left(\int_X f^p\ d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X (f+g)^{q(p-1)}\right)^{1/p}.$$

En effet, en ajoutant à cette inégalité son analogue pour $g(f+p)^{p-1}$, on obtient

$$\int_X (f+g)^p\ d\mu \leq \left[\left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p\ d\mu\right)^{1/p}\right] \left(\int_X (f+g)^{q(p-1)}\ d\mu\right)^{1/q},$$

où on peut simplier par le dernier facteur de droite qui est réel >0 et vaut $\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}$ car $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. □

Démonstration du Théorème 5.2. Vérifions que $||\cdot||_p$ est une norme. L'homogénéité $||\lambda F||_p = |\lambda| ||F||_p$ est triviale et l'inégalité triangulaire est donnée par (5.3). Enfin si $F \in L^p(\mu)$, $||F||_p = 0$ signifie que $\int_X |f|^p d\mu = 0$ pour un représentant f de F (et donc pour tous). Cela implique que $f=0$ pp, et donc que $F=0$ (dans le quotient). On a donc bien une norme. Le point délicat est la complétude. On considère une suite de Cauchy $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour montrer qu'elle converge, il suffit qu'elle ait une valeur d'adhérence, ie qu'il existe une sous suite $(F_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge. Pour chaque n, on considère un représentant $f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$ de F_n ; pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n_0 > 0$ tel que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$

$$n, m \geq n_0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\int_X |f_n - f_m|^p\ d\mu\right)^{1/p} < \epsilon.$$

De cette propriété, on tire l'existence d'une suite d'entiers $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que

$$||f_{n_{j+1}} - f_{n_j}||_p < 2^{-j}.$$

On définit alors les fonctions mesurables, à valeurs dans $[0,+\infty]$,

$$g_J = \sum_{j=1}^{J} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|, \qquad g = \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|,$$

(g est limite croissante des g_J). Par l'inégalité de Minkowski, $||g_J||_p \leq \sum_1^J 2^{-j} \leq 1$, donc par Lemme de Fatou

$$\int_X |g|^p d\mu = \int_X \left(\liminf_{J\to\infty} |g_J|^p\right)\ d\mu \leq \liminf_{J\to\infty} \left(\int_X |g_J|^p\ d\mu\right) \leq 1.$$

Comme $\int_X |g|^p d\mu \leq 1$, g est finie presque partout donc la série $\sum_{j\geq 1}(f_{n_{j+1}} - f_{n_j})(x)$ converge (absolument) pour presque tout x. Ceci implique l'existence d'une partie M mesurable, de mesure nulle, telle que $\sum_{j\geq 1}(f_{n_{j+1}} - f_{n_j})$ converge sur $X \setminus M$ et $\sum_{j\geq 1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| = g$ sur $X \setminus M$. Ainsi, en posant

$$f := f_{n_1} + \chi_{X\setminus M} \sum_{j\geq 1} f_{n_{j+1}} - f_{n_j},$$

qui est mesurable (Propositions 1.7 et 1.8 *i)*), on a

$$|f| \leq |f_{n_1}| + |g|,$$

de sorte que $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$. De plus, comme $f_{n_J} = f_{n_1} + \sum_{j=1}^{J-1} f_{n_{j+1}} - f_{n_j}$, on a

$$|f_{n_J}| \leq |f_{n_1}| + |g| \quad \text{pp} \qquad \text{et} \qquad f_{n_J} \to f \quad \text{pp}.$$

On peut alors appliquer le théorème de convergence dominé à la suite $|f_{n_J} - f|^p$, car elle est dans $\mathcal{L}^1(\mu)$, tend vers 0 presque partout et est dominée, indépendament de J, par $(2|f_{n_1}| + 2|g|)^p \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Ainsi $||f - f_{n_J}||_p \to 0$ et $\{f\}$ (la classe d'équivalence) est une valeur d'adhérence de la suite F_n. □

Théorème 5.4. *Pour tout $p \in [1, +\infty[$, les fonctions étagées de $L^p(\mu)$ sont denses dans $L^p(\mu)$.*

Cet énoncé ne dit pas que *toutes* les fonctions étagées sont dans $L^p(\mu)$ (ex. si $\mu(X) = +\infty$, les fonctions constantes non nulles ne sont pas dans $L^p(\mu)$), mais qu'il y en a assez pour qu'elles soient denses. On vérifie d'ailleurs facilement qu'une fonction étagée est dans $L^p(\mu)$ si et seulement si elle est dans $L^1(\mu)$.

Démonstration. Soit $f \in L^p(\mu)$. D'après la Proposition 1.11, il existe une suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions étagées convergeant ponctuellement vers f et telle que $|s_n(x)| \leq |f(x)|$ pour tout n et tout x. Ainsi, $s_n \in L^p(\mu)$ et

$$|s_n(x) - f_n(x)|^p \to 0 \qquad n \to \infty, \qquad \text{et} \qquad |s_n(x) - f(x)|^p \leq 2^p |f(x)|^p,$$

où $2^p|f|^p \in L^1(\mu)$ ne dépend pas de n. Cela permet d'appliquer le théorème de convergence dominée à $|s_n - f|^p$. Donc $||f - s_n||_p^p = \int_X |s_n - f|^p \; d\mu \to 0$, ce qui est le résultat. □

Une conséquence souvent utile de l'inégalité de Hölder est la suivante.

Proposition 5.5. *Soient $1 \leq p_1 < p_2$ deux réels et $f \in L^{p_2}(\mu)$. Alors*

$$\int |f|^{p_1} \; d\mu \leq \mu(\{f \neq 0\})^{1 - \frac{p_1}{p_2}} ||f||_{p_2}^{p_1}.$$

En particulier, si $\mu(X) < \infty$, on a $L^{p_2}(\mu) \subset L^{p_1}(\mu)$ et

$$||f||_{p_1} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} ||f||_{p_2}.$$

Démonstration. Notons $p = p_2/p_1$ et q son exposant conjugué, qui vaut $q = p_2/(p_2 - p_1)$. Comme $|f|^{p_1} = |f|^{p_1} \chi_{f \neq 0}$ et $\chi_{f \neq 0}^q = \chi_{f \neq 0}$, l'inégalité de Hölder nous donne

$$\int_X |f|^{p_1} \; d\mu \leq \left(\int_X |f|^{p_1 p} \; d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X \chi_{f \neq 0} \; d\mu \right)^{1/q} = ||f||_{p_2}^{p_1} \mu(\{f \neq 0\})^{1 - \frac{p_1}{p_2}}.$$

La conclusion est alors facile. □

5.2 Le cas $p = \infty$

Une fonction mesurable $g : X \to [0, +\infty]$ est dite essentiellement bornée si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$g(x) \leq M \qquad \text{pour presque tout } x \in X.$$

Définition 5.6. *On désigne par $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{C}$ essentiellement bornées (ie telles que $|f|$ est essentiellement bornée).*

On vérifie sans peine que $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ est un espace vectoriel.

On va maintenant construire le candidat à devenir la norme $||\cdot||_\infty$ (qui, comme pour les $\mathcal{L}^p(\mu)-L^p(\mu)$ ne sera une norme qu'après avoir quotienté).

Il n'est pas question de definir $||f||_\infty$ par $\sup_{x\in X}|f(x)|$ car cette quantité peut être infinie même si $|f|=0$ presque partout (penser à $f(x)=x\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ sur $\mathbb{R}$). Pour $f\in\mathcal{L}^\infty(\mu)$, on introduit

$$S=\{M\in\mathbb{R}\mid \mu\left(\{|f|>M\}\right)=0\}, \tag{5.4}$$

c'est-à-dire l'ensemble des M telle que $|f|\leq M$ presque partout. Comme $f\in\mathcal{L}^\infty(\mu)$, cet ensemble n'est pas vide. En outre, il est minoré par 0 car si $M<0$, on a $|f(x)|>M$ pour tout x et $\mu\left(\{|f|>M\}\right)=\mu(X)\neq 0$ (on suppose $\mu(X)\neq 0$ sinon la construction qui suit n'a aucun intérêt). On peut alors définir

$$||f||_\infty=\inf S.$$

On appelle $||f||_\infty$ la borne supérieure essentielle de $|f|$. Rappelons que la borne supérieure (usuelle) dans $\mathbb{R}$ est le plus petit élément (donc la borne inférieure) de l'ensemble des majorants. Ici il faut comprendre que S est l'ensemble des "majorants essentiels" et que la borne supérieure essentielle est la borne inférieure de ces majorants essentiels. Le parallèle avec la borne supérieure usuelle serait parfait si la borne inférieure S était en fait son plus petit élément, dont l'existence n'est pas claire a priori (il y a seulement une borne inférieure). Heureusement, c'est bien le cas ! En effet, si on note $\beta=\inf S$, par caractérisation de la borne inférieure, on peut trouver une suite M_n de S qui converge vers β et alors

$$\{|f|>\beta\}=\cup_{n\in\mathbb{N}^*}\{|f|>M_n\}$$

car $\{|f|>M_n\}\subset\{|f|>\beta\}$ pour tout n (car $M_n\geq\beta$) et si $|f(x)|>\beta$ alors $|f(x)|>M_n$ pour au moins un n (sinon $|f(x)|\leq\beta$). Ainsi $\{|f|>\beta\}$ est une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle donc est de mesure nulle, ie $\beta\in S$. Ainsi

$$||f||_\infty=\min S. \tag{5.5}$$

L'intérêt de cette remarque (importante) est que

$$|f|\leq M \ \text{ pp} \qquad\Leftrightarrow\qquad ||f||_\infty\leq M. \tag{5.6}$$

En effet, il est clair que si $|f|\leq M$ presque partout, $M\in S$ et donc $M\geq\inf S=||f||_\infty$. En revanche, si $||f||_\infty\leq M$ (en particulier si il y a égalité), il n'est pas clair que $|f|\leq M$ presque partout si on n'a pas vérifié que $||f||_\infty\in S$.

Cette équivalence implique notamment que, pour toutes $f,g\in\mathcal{L}^\infty(\mu)$ et tout $\alpha\in\mathbb{C}$,

$$||\alpha f+g||_\infty\leq|\alpha|||f||_\infty+||g||_\infty, \tag{5.7}$$

puisque pour presque tout x, $|\alpha f(x)+g(x)|\leq|\alpha||f(x)|+|g(x)|\leq|\alpha|||f||_\infty+||g||_\infty$. Avec $\alpha=1$, (5.7) est naturellement la version $p=\infty$ de l'inégalité de Minkowsi. Nous avons également l'inégalité de Hölder

$$\int|fg|\ d\mu\leq||f||_1||g||_\infty. \tag{5.8}$$

L'équivalence (5.6) implique aussi que

$$||f||_\infty=0 \qquad\Leftrightarrow\qquad f=0 \ \text{ pp}. \tag{5.9}$$

Notons enfin que,

$$f=g \ \text{ pp} \qquad\Rightarrow\qquad ||f||_\infty=||g||_\infty. \tag{5.10}$$

Une façon de le justifier est de remarquer que $|f(x)|\leq||f||_\infty$ pour presque tout x, donc $|g(x)|\leq||f||_\infty$ pour presque tout x et ainsi $||g||_\infty\leq||f||_\infty$. De même $||f||_\infty\leq||g||_\infty$.

On peut alors donner la définition de $L^\infty(\mu)$.

Définition 5.7. *L'ensemble $L^\infty(\mu)$ est le quotient $\mathcal{L}^\infty(\mu)/\sim$ pour la relation d'équivalence $\sim$ d'égalité presque partout.*

On vérifie à nouveau que c'est un espace vectoriel et que si $F \in L^\infty(\mu)$ admet pour représentant $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$, on peut poser

$$||F||_\infty := ||f||_\infty,$$

car c'est indépendant du choix du représentant d'après (5.10).

Théorème 5.8. *$L^\infty(\mu)$ est un espace de Banach pour la norme $||\cdot||_\infty$.*

Démonstration. Le fait que $||\cdot||_\infty$ soit une norme résulte de (5.7) et de (5.9) (pour voir que $||\alpha f||_\infty \geq |\alpha|||f||_\infty$, on peut supposer $\alpha \neq 0$ et on utilise $||f||_\infty \leq |\alpha|^{-1}||\alpha f||_\infty$). Montrons la complétude. Soient $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy et, pour chaque n, f_n un représentant de F_n. Pour tous $m,n \in \mathbb{N}$, il existe $N_{n,m} \subset X$ mesurable, de mesure nulle, tel que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty, \qquad \text{pour tout } x \in X \setminus N_{n,m}.$$

Notons $N = \cup_{n,m} N_{n,m}$ qui est mesurable et de mesure nulle, puis posons $\widetilde{f}_n = \chi_{X\setminus N} f_n$. Chaque $\widetilde{f}_n$ est encore un représentant de F_n et

$$|\widetilde{f}_n(x) - \widetilde{f}_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty, \qquad \text{pour tout } x \in X. \tag{5.11}$$

Or, pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_0 tel que $||f_n - f_m||_\infty < \epsilon$ pour tous $n, m \geq n_0$. Cela implique que, pour tout $x \in X$, $(\widetilde{f}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Si on note $f(x)$ sa limite, $f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable (Propositions 1.7 et 1.8 *i)*) et vérifie, en laissant tendre m vers $+\infty$ dans (5.11),

$$|\widetilde{f}_n(x) - f(x)| \leq \epsilon, \qquad \text{pour tout } n \geq n_0 \text{ et tout } x \in X.$$

Cela prouve d'une part que f est bornée sur X (car $\widetilde{f}_n$ l'est) et que $||\widetilde{f}_n - f||_\infty = ||f_n - f||_\infty \to 0$. □

Théorème 5.9. *Les fonctions étagées sont denses dans $L^\infty(\mu)$.*

Démonstration. Soit $f \in L^\infty(\mu)$. Quitte à séparer parties réelles et imaginaires, puis positives et négatives (qui sont toutes dans $L^\infty(\mu)$) on peut supposer f à valeurs positives. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction s_n donnée par (1.3). On a alors

$$0 \leq f(x) - s_n(x) = \sum_{j=1}^{n2^n} \left(f(x) - \frac{j-1}{2^n} \right) \chi_{f^{-1}\left([\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}[\right)} + (f(x) - n)\chi_{f^{-1}([n,+\infty])},$$

où le dernier terme est nul presque partout pour tout $n > ||f||_\infty$. Si $f(x) < n$, seul un des terme de la somme peut-être non nul, et il est compris entre 0 et 2^{-n}. Ainsi $|f(x) - s_n(x)| \leq 2^{-n}$ pour tout n assez grand et presque tout x donc $||f - s_n||_\infty \to 0$. □

5.3 Dualité $L^p - L^q$

Une conséquence immédiate et très utile du Théorème 5.2 est la suivante.

Théorème 5.10. *L'espace $L^2(\mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(f,g)_{L^2} = \int_X \overline{f} g \, d\mu.$$

On omet la vérification (immédiate) du fait que $(.,.)_{L^2}$ est un produit scalaire. Notons juste que $\overline{f}g$ est bien intégrable grâce à l'inégalité de Hölder. Comme dans tous les espaces de Hilbert, on a en particulier

$$||f||_2 = \sup_{||g||_2=1} |(f,g)_{L^2}|.$$

Cette propriété se généralise aux espaces L^p dans le sens suivant.

Théorème 5.11. *Soit $p \in [1, +\infty[$ et notons par q son exposant conjugué (ie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si $p > 1$ et $q = \infty$ si $p = 1$). Pour toute $f \in L^p(\mu)$,*

$$||f||_p = \sup_{||g||_q = 1} \left| \int_X fg \; d\mu \right|.$$

Démonstration. Par inégalité de Hölder, si $g \in L^q(\mu)$, on a $fg \in L^1(\mu)$ et

$$\int_X |fg| \; d\mu \leq ||f||_p ||g||_q.$$

Cela prouve l'intégrabilité de fg et, par inégalité triangulaire, que $\left| \int_X fg \; d\mu \right| \leq ||f||_p$ si $||g||_q = 1$. On va voir que l'égalité est réalisée pour un g convenable. On peut clairement supposer $||f||_p \neq 0$ sinon le résultat est trivial. L'idée est de choisir g tel que $fg = \text{cste} \times |f|^p$, auquel cas la constante doit vérifier $\text{cste} \times ||f||_p^p = ||f||_p$. Cela suggère de considérer

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) = 0, \\ ||f||_p^{1-p} \frac{|f(x)|^p}{f(x)} & \text{si } f(x) \neq 0. \end{cases} \tag{5.12}$$

La mesurabilité est prouvée dans l'Exercice 4. Il y a juste à vérifier que $||g||_q = 1$. Si $p = 1$, $q = \infty$ et c'est évident. Si q est fini,

$$\int_X |g|^q \; d\mu = ||f||_p^{q-qp} \int_X |f|^{qp-q} \; d\mu = \frac{1}{||f||_p^p} \int_X |f|^p \; d\mu = 1,$$

en utilisant l'égalité $qp - q = p$ (puisque $qp = p + q$). □

Remarque. La démonstration montre que $\sup_{||g||_q=1} \left| \int_X fg \; d\mu \right| = \max_{||g||_q=1} \left| \int_X fg \; d\mu \right|$.

Terminons par un théorème que nous admettrons (sa preuve utilise le Théorème de Radon-Nikodym pour les mesures complexes) mais dont il est bon de connaître l'existence, d'autant plus que son énoncé est simple. Nous verrons une preuve dans le cas particulier de $\mathbb{R}^d$ dans le chapitre sur la Convolution.

Théorème 5.12. *Si μ est σ-finie, alors pour toute forme linéaire continue Φ sur $L^p(\mu)$, avec $p \in [1, \infty[$, il existe une unique $g \in L^q(\mu)$, $1 < q \leq \infty$ étant l'exposant conjugué de p, telle que*

$$\Phi(f) = \int_X fg \; d\mu, \qquad \textit{pour toute } f \in L^p(\mu).$$

En outre

$$||\Phi||_{L^p(\mu)^*} = ||g||_q.$$

Ce théorème dit que le dual (topologique) de $L^p(\mu)$ s'identifie à $L^q(\mu)$, si $p < \infty$. Noter que si $p = 2$, ce n'est qu'une conséquence du théorème de représentation de Riesz pour les espaces de Hilbert. Pour un contre-exemple lorsque $p = \infty$, voir l'Exercice 12.

5.4 Espaces L^p sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$

Dans cette partie, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert et on désigne par $L^p(\Omega)$ l'ensemble $L^p(\mu)$ lorsque $X = \Omega$ et $\mu = \lambda$ est la mesure de Lebesgue sur Ω.

Nous allons compléter les paragraphes précédents par quelques remarques et résultats plus spécifiques à la mesure de Lebesgue sur un ouvert.

Le premièr résultat a pour but de nous rassurer sur les notations : pour les fonctions *continues*, les notions de borne supérieure et borne supérieure essentielle coïncident.

Proposition 5.13. *Soit f une fonction continue et bornée sur Ω (par exemple si $\overline{\Omega}$ est compact et f continue sur $\overline{\Omega}$). Alors*

$$||f||_\infty = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|,$$

$||f||_\infty$ désignant le sup essentiel.

Démonstration. Comme $|f(x)| \leq \sup_\Omega |f|$ pour tout x, donc a fortiori pour presque tout x, (5.6) montre que $||f||_\infty \leq \sup_\Omega |f|$. En fait c'est une égalité, sinon $||f||_\infty < \sup_\Omega |f|$ et en choisissant un M tel que $||f||_\infty < M < \sup_\Omega |f|$, il y au moins un x_0 tel que $|f(x_0)| > M$, donc par continuité $|f(x)| > M$ sur une boule ouverte B, de sorte que $\lambda(\{|f| > M\}) \geq \lambda(B) > 0$ ce qui donne une contradiction car $\{|f| > M\} \subset \{|f| > ||f||_\infty\}$ qui doit être de mesure nulle. $\square$

Naturellement, les espaces $L^p(\Omega)$ ne contiennent pas que des fonctions continues (par exemple, la fonction caractéristique de $[0,1]$ dans $L^p(\mathbb{R})$) mais ils en contiennent beaucoup. Nous allons voir en particulier que, si p est fini, les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^p(\Omega)$. Les fonctions continues sont particulièrement agréables en vertu de la remarque suivante : si $f_1, f_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ sont continues, alors

$$f_1, f_2 \text{ continues sur } \Omega \text{ et } f_1 = f_2 \text{ presque partout} \qquad \Rightarrow \qquad f_1 = f_2 \text{ partout.}$$

Ceci se voit comme dans la Proposition 5.13 : si $|f_1 - f_2| = 0$ presque partout, elle est nulle partout sinon $|f_1 - f_2| > 0$ en un point donc sur une boule ouverte, ce qui implique que f_1 et f_2 diffèrent sur un ensemble de mesure non nulle. L'intérêt de cette remarque est le suivant : si une fonction f continue sur Ω est dans $L^p(\Omega)$, ie si la classe d'équivalence des fonctions mesurables égales presque partout à f est dans $L^p(\Omega)$, alors f est la seule fonction continue dans sa classe d'équivalence. Autrement dit, il y a au plus une fonction continue dans une classe d'équivalence. Cela permet d'identifier sans ambiguïté, ie de manière unique, une fonction continue et sa classe d'équivalence et rend particulièrement rassurant l'usage des fonctions continues

Théorème 5.14. *Pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace $C_c(\Omega)$, des fonctions continues à supports compacts dans Ω, est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 5.15. *Il existe une suite croissante de compacts $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω ($K_n \subset K_{n+1} \subset \Omega$), telle que $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. On peut en plus supposer que, pour chaque n, K_{n+1} est un voisinage de K_n*

On appelle parfois une telle suite de compacts une exhaustion de Ω.

Démonstration. Posons $\Omega^c := \mathbb{R}^d \setminus \Omega$. La fonction $d(x, \Omega^c) := \inf_{y\in\Omega^c} |x - y|$ (où $|\cdot|$ est la norme euclidienne) est continue sur $\mathbb{R}^d$ (c'est un exercice classique de montrer qu'elle est Lipschitzienne) et comme Ω^c est fermé, on a $x \in \Omega \Leftrightarrow d(x, \Omega^c) > 0$. On considère alors

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n+1} \text{ et } |x| \leq n\}.$$

C'est un compact de $\mathbb{R}^d$, car fermé (intersection de deux fermés), borné, et inclus dans Ω donc un compact de Ω. Les K_n sont clairement croissants. Enfin, $\cup_n K_n = \Omega$, car si $x \in \Omega$ il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x, r)$ est contenue dans Ω. Cela implique que $d(x, \Omega^c) \geq r$ et donc que $x \in K_n$ dès que $r \geq \frac{1}{n+1}$ et $n \geq |x|$, ce qui se produit pour n assez grand. Enfin K_{n+1} contient $\{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, \Omega^c) > \frac{1}{n+2} \text{ et } |x| < n+1\}$ qui est ouvert et contient K_n donc est un voisinage de K_n $\square$

Démonstration du Théorème 5.14. Soit $f \in L^p(\Omega)$. Il suffit de montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $g \in C_c(\Omega)$ telle que $||f - g||_p < \epsilon$. Fixons $\epsilon > 0$. D'après le Théorème 5.4, on peut trouver s étagée (et dans $L^p(\Omega)$) telle que

$$||f - s||_p < \frac{\epsilon}{3}.$$

Notons ensuite χ_n la suite des fonctions caractéristiques des K_n du Lemme 5.15. On a $\chi_n(x) \uparrow 1$ (convergence en croissant) pour tout $x \in \Omega$. Cela implique que $||s-\chi_n s||_p \to 0$ quand $n \to \infty$, par théorème de convergence dominée ($|s-\chi_n s|^p \to 0$ et $|s-\chi_n s|^p = |1-\chi_n|^p |s|^p \leq |s|^p \in L^1(\Omega)$). Donc, pour n_0 assez grand, $||s-\chi_{n_0} s||_p < \epsilon/3$ et

$$||f-\chi_{n_0} s||_p < \frac{2\epsilon}{3}.$$

On applique alors le théorème de Lusin 4.4 à $\chi_{n_0} s$: comme c'est une fonction bornée (elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs) nulle hors du compact K_{n_0}, on peut trouver une suite de fonctions $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ continues et supportées dans un voisinage de K_{n_0} contenu dans Ω, disons K_{n_0+1}, telles que

$$g_k(x) \to \chi_{n_0}(x)s(x), \qquad k \to \infty,$$

pour presque tout x, et $||g_k||_\infty \leq ||\chi_{n_0} s||_\infty$ pour tout k, ce qui implique la condition de domination

$$|g_k(x) - \chi_{n_0}(x)s(x)|^p \leq 2^p ||\chi_{n_0} s||_\infty^p \chi_{n_0+1}(x),$$

car le terme de gauche est nul si $x \notin K_{n_0+1}$. Par théorème de convergence dominée, on a alors $||\chi_{n_0} s - g_k||_p \to 0$ quand $k \to \infty$, donc $||\chi_{n_0} s - g_k||_p < \epsilon/3$ pour k assez grand. Cela montre que

$$||f-g_k||_p < \epsilon$$

si k est assez grand, ce qui est le résultat cherché. □

Complément. On (re)verra dans le chapitre sur la convolution que les fonctions C^∞ à support compact dans Ω sont denses dans les $L^p(\Omega)$ pour p fini.

Le Théorème 5.14 montre en particulier que $L^p(\Omega)$ est le complété de $C_c(\Omega)$ relativement à la norme $(\int |f|^p dx)^{1/p}$. C'est l'intérêt principal de la mesure (et l'intégrale) de Lebesgue : elle donne une description assez explicite de ce complété, certes en termes de classes d'équivalences de fonctions mesurables mais ceci est plus explicite qu'un complété abstrait, constitué de classes d'équivalences de suites de Cauchy !

Terminons avec une définition dont la connaissance et les propriétés élémentaires peuvent être utiles (à un agrégatif).

Définition 5.16. *Pour* $p \in [1,\infty]$,

$$f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega) \qquad \Leftrightarrow \qquad \textit{pour tout compact } K \subset \Omega,\ \chi_K f \in L^p(\Omega).$$

Ici χ_K *est la fonction caractéristique de* K.

Il est trivial, mais peut-être pas inutile, de noter que la condition $\chi_K f \in L^p(\Omega)$ est équivalente à $\chi_K f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, avec la convention usuelle de prolonger par 0 hors de Ω.

On a les inclusions :

$$L^p(\Omega) \subset L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega), \qquad 1 \leq p \leq \infty, \tag{5.13}$$

$$L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega), \qquad 1 \leq p \leq q \leq \infty. \tag{5.14}$$

En particulier,

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega), \qquad 1 \leq p \leq \infty.$$

L'inclusion (5.13) est évidente car si $f \in L^p(\Omega)$ et $K \subset \Omega$ est compact, on a $|\chi_K f| \leq |f|$ donc $\int |\chi_K f|^p \leq \int_\Omega |f|^p < \infty$. L'inclusion (5.14) est une conséquence de la Proposition 5.5 (ie l'inégalité de Hölder) et du fait que tout compact a une mesure de Lebesgue finie : si $f \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $K \subset \Omega$ est compact, on a

$$||\chi_K f||_p \leq \lambda(K)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} ||\chi_K f||_q.$$

6 Théorèmes de continuité et derivation sous le signe $\int$

Dans cette partie, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré. Conformément à la Définition 3.9, on notera $\mathcal{L}^1(X, d\mu)$ pour $\mathcal{L}^1(\mu)$ afin de spécifier le domaine (et surtout la variable) d'intégration.

Théorème 6.1. *Soient Y un espace métrique, $Z \subset Y$, y_∞ un point adhérent à Z et*

$$F : X \times Z \to \mathbb{C},$$

une application telle que

1. *pour tout $y \in Z$, $x \mapsto F(x, y) \in \mathcal{L}^1(X, d\mu)$,*
2. *il existe $f \in \mathcal{L}^1(X, d\mu)$ telle que,*

$$\text{pour presque tout } x \in X, \qquad \lim_{y \to y_\infty} F(x, y) = f(x), \tag{6.1}$$

3. *il existe $g \in \mathcal{L}^1(X, d\mu)$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ telle que,*

$$\text{pour tout } y \in Z, \quad \text{pour presque tout } x \in X, \qquad |F(x, y)| \leq g(x). \tag{6.2}$$

Alors

$$\lim_{y \to y_\infty} \int_X F(x, y) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x).$$

La condition *1* autorise à considérer la quantité $\int_X F(x, y) d\mu(x)$. La condition *2* donne le candidat naturel à être la limite de cette intégrale quand $y \to y_\infty$. La condition *3* est une condition de domination qui permet de se ramener au théorème de convergence dominée.

Commentaire sur la condition 3. Telle qu'elle est écrite, elle signifie signifie que pour chaque $y \in Z$, il existe $N_y \subset X$ négligeable tel que $|F(x, y)| \leq g(x)$ pour tout $x \in X \setminus N_y$. Il faut a priori faire attention à la permutation du "pour tout y" et du "pour presque tout x" car, l'énoncé

$$\text{pour presque tout } x \in X, \text{ pour tout } y \in Z, \qquad |F(x, y)| \leq g(x), \tag{6.3}$$

signifie qu'il existe $N \subset X$ négligeable tel que $|F(x, y)| \leq g(x)$ pour tout $x \in X \setminus N$ et tout $y \in Y$. La condition (6.3) est donc plus restrictive que (6.2) car elle demande qu'on puisse choisir N_y indépendant de y. Mais bien sûr, si (6.3) est vraie, (6.2) l'est aussi.

Pour se ramener au théorème de convergence dominée usuel, ie à une famille dénombrable de fonctions, on utilise le lemme classique suivant (preuve en exercice).

Lemme 6.2. *Soient Y un espace métrique, $Z \subset Y$ et y_∞ adhérent à Z. Soient $\varphi : Z \to \mathbb{C}$ et $l \in \mathbb{C}$. Alors*

$$\lim_{y \to y_\infty} \varphi(y) = l \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{pour toute suite } (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ de } Z, \ (y_n \to y_\infty \quad \Rightarrow \quad \varphi(y_n) \to l).$$

Démonstration du Théorème 6.1. D'après le Lemme 6.2, il suffit de montrer que pour toute suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Z tendant vers y_∞, on a $\int_X F(x, y_n) d\mu(x) \to \int_X f(x) d\mu(x)$. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une telle suite et notons

$$f_n(x) = F(x, y_n).$$

D'après (6.2), pour chaque n on a

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad \text{pour presque tout } x \in X,$$

avec $\int_X g d\mu < \infty$. De plus $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ pour presque tout x. D'après le Théorème 3.17, on a alors $\int_X f_n(x) d\mu \to \int_X f(x) dx$, ce qui est le résultat cherché. □

Théorème 6.3 (Continuité)**.** *Soient Y un espace métrique et $F : X \times Y \to \mathbb{C}$, une application telle que*

1. *pour tout $y \in Y$, $x \mapsto F(x,y) \in \mathcal{L}^1(X, d\mu)$,*
2. *pour presque tout $x \in X$, $y \mapsto F(x,y)$ est continue sur Y,*
3. *il existe $g \in \mathcal{L}^1(X, d\mu)$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ telle que,*

$$\textit{pour tout } y \in Y, \quad \textit{pour presque tout } x \in X, \qquad |F(x,y)| \leq g(x). \tag{6.4}$$

Alors $y \mapsto \int_X F(x,y)d\mu(x)$ est continue sur Y.

Démonstration. C'est une application directe du Théorème 6.1. Pour montrer la continuité en un point (arbitraire) $y_0 \in Y$, on se ramène au Théorème 6.1 en posant $f(x) = F(x, y_0)$ et en posant $y_\infty = y_0$. $\square$

Remarque pratique. Dans les cas concrets, par exemple où Y est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ (ou un espace métrique localement compact), la condition de domination (6.4) n'est pas toujours valable globalement sur Y, mais le plus souvent sur tout compact de Y au sens où, pour tout K compact de Y, il existe $g_K \in \mathcal{L}^1(X, d\mu)$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ telle que

$$\text{pour tout } y \in K, \quad \text{pour presque tout } x \in X, \qquad |F(x,y)| \leq g_K(x).$$

En appliquant le Théorème 6.3 à F restreinte à $X \times K$, on voit alors que $y \mapsto \int F(x,y)d\mu(x)$ est continue sur K, pour tout compact K de Y et donc continue sur Y.

Théorème 6.4 (Dérivabilité à une variable)**.** *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $F : X \times I \to \mathbb{C}$ une application telle que*

1. *pour tout $y \in I$, $x \mapsto F(x,y) \in \mathcal{L}^1(X, d\mu)$,*
2. *pour presque tout $x \in X$, $y \mapsto F(x,y)$ est dérivable sur I,*
3. *il existe $g \in \mathcal{L}^1(X, d\mu)$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ telle que,*

$$\textit{pour presque tout } x \in X, \quad \textit{pour tout } y \in I, \qquad \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \right| \leq g(x). \tag{6.5}$$

Alors, pour tout $y \in I$, $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ est intégrable et surtout

$$x \mapsto \int_X F(x,y)d\mu(x)$$

est dérivable sur I de dérivée

$$\frac{d}{dy}\left(\int_X F(x,y)d\mu(x) \right) = \int_X \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)d\mu(x).$$

Remarque. La condition *3* dit, en l'explicitant, qu'il existe $N \subset X$ négligeable tel que

$$\text{pour tout } x \in X \setminus N, \quad \text{pour tout } y \in I, \qquad \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \right| \leq g(x).$$

C'est une condition plus forte que de demander : pour tout $y \in I$, $|\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)| \leq g(x)$ pour presque tout x. En effet, cette dernière condition dit que

$$\text{pour tout } y \in I, \text{ il existe } N_y \text{ négligeable tel que pour tout } x \in X \setminus N_y, \quad \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \right| \leq g(x).$$

On verra dans la démonstration qu'il est important que N ne dépende pas de y.

On peut observer de même que la condition *2* signifie l'existence de $N \subset X$ négligeable tel que

$$\text{pour tout } x \in X \setminus N, \quad \text{pour tout } y_0 \in I, \quad y \mapsto F(x,y) \text{ est dérivable } y_0,$$

ce qui est plus fort que de demander : pour tout y_0, $y \mapsto F(x,y)$ est dérivable en y_0 pour presque tout x.

Démonstration. Soit $N \subset X$ négligeable tel que $y \mapsto F(x,y)$ est dérivable sur I pour tout $x \in X \setminus N$. Soit M mesurable de mesure nulle tel que $N \subset M$ et posons

$$\widetilde{F}(x,y) = \chi_{X \setminus M}(x) F(x,y).$$

La fonction $x \mapsto \widetilde{F}(x,y)$ reste intégrable pour chaque y et, bien sûr,

$$\int_X F(x,y) d\mu(x) = \int_X \widetilde{F}(x,y) d\mu(x). \tag{6.6}$$

De plus, $y \mapsto \widetilde{F}(x,y)$ est dérivable pour tout $x \in X$: si $x \notin M$, $x \notin N$ et c'est l'hypothèse, puis si $x \in M$, $y \mapsto \widetilde{F}(x,y)$ est constante et nulle. En particulier, pour tout $y \in I$ et tout $x \in X$,

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y}(x,y) = \lim_{n \to \infty} \frac{\widetilde{F}(x, y + \frac{1}{n}) - \widetilde{F}(x,y)}{\frac{1}{n}},$$

ce qui prouve la mesurabilité de $x \mapsto \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y}(x,y)$ comme limite simple de fonctions mesurables. Comme $\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ pour presque tout x (ie $x \in X \setminus M$) la condition (6.5) implique que

$$\text{pour tout } y \in I, \ x \mapsto \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y}(x,y) \ \text{ est intégrable sur } X,$$

ce qui est le sens précis de la condition "$x \mapsto \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ est intégrable", ie cette dernière fonction, qui n'est définie que presque partout, coïncide presque partout avec la fonction définie partout $x \mapsto \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y}(x,y)$. Là encore, pour tout $y \in I$,

$$\int_X \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) d\mu(x) = \int_X \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y}(x,y) d\mu(x).$$

Il reste à vérifier que (6.6) est dérivable et de dérivée donnée par l'expression ci-dessus. Fixons $y_0 \in I$ et considérons la fonction définie sur $X \times Z := X \times (I \setminus \{y_0\})$,

$$G(x,y) = \frac{\widetilde{F}(x,y) - \widetilde{F}(x,y_0)}{y - y_0}.$$

Vérifions les conditions du Théorème 6.1. D'abord y_0 est adhérent à Z. Puis, pour chaque $y \in Z$, c'est une fonction intégrable sur X. On vient aussi de voir que, pour tout $x \in X$,

$$G(x,y) \to \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y}(x,y_0), \qquad y \to y_0,$$

dont la limite est intégrable. Il ne reste donc qu'à obtenir la condition de domination. Par théorème des accroissements finis (si F est à valeurs réelles, sinon on sépare parties réelles et imaginaires), on a pour chaque $x \in X$,

$$|G(x,y)| \leq \sup_{z \in I} \left| \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y}(x,z) \right|.$$

Comme $\frac{\partial F}{\partial y}$ et $\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y}$ coïncident sur $(X \setminus M) \times I$, l'hypothèse (6.5) donne l'existence de $\widetilde{N}$ négligeable tel que $|G(x,y)| \leq g(x)$ pour tout $x \in X \setminus \widetilde{N}$ et tout $y \in Z$ ce qui donne la condition de domination souhaitée. $\square$

Théorème 6.5 (Continue différentiabilité)**.** *Soient Y un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $F : X \times Y \to \mathbb{C}$ une application telle que*

1. *pour tout $y \in Y$, $x \mapsto F(x,y) \in \mathcal{L}^1(X, d\mu)$,*
2. *pour presque tout $x \in X$, $y \mapsto F(x,y)$ est de classe C^1 sur Y,*
3. *il existe $g \in \mathcal{L}^1(X, d\mu)$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ telle que, pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$,*

$$\text{pour presque tout } x \in X, \quad \text{pour tout } y \in Y, \qquad \left| \frac{\partial F}{\partial y_j}(x,y) \right| \leq g(x). \tag{6.7}$$

Alors, pour tout $y \in Y$ et tout $j \in \{1, \dots, d\}$, $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial y_j}(x,y)$ est intégrable. De plus,

$$y \mapsto \int_X F(x,y) d\mu(x)$$

est de classe C^1 sur Y et pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(\int_X F(x,y) d\mu(x) \right) = \int_X \frac{\partial F}{\partial y_j}(x,y) d\mu(x).$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que $y \mapsto \int_X F(x,y) d\mu(x)$ a des dérivées partielles (obtenues en dérivant sous le signe intégral) et que ces dérivées sont continues. Pour l'existence de dérivées partielles, on se ramène au cas 1-dimensionnel : tout point y_0 de Y a un voisinage de la forme $I_1 \times \cdots \times I_d$, avec $I_1, \cdots, I_d$ intervalles ouverts et on obtient l'existence des dérivées partielles sur un tel pavé par le Théorème 6.4. Pour voir la continuité des dérivées partielles, on applique le Théorème 6.3 à $\int_X \frac{\partial F}{\partial y_j}(x,y) d\mu(x)$. $\square$

Théorème 6.6 (Holomorphie)**.** *Soient Z un ouvert de $\mathbb{C}$ et $F : X \times Z \to \mathbb{C}$ une application telle que*

1. *pour tout $z \in Z$, $x \mapsto F(x,z) \in \mathcal{L}^1(X, d\mu)$,*
2. *pour presque tout $x \in X$, $z \mapsto F(x,z)$ est holomorphe sur Z,*
3. *il existe $g \in \mathcal{L}^1(X, d\mu)$ à valeurs dans $[0, +\infty]$ telle que,*

$$\text{pour presque tout } x \in X, \quad \text{pour tout } z \in Z, \qquad |F(x,z)| \leq g(x). \tag{6.8}$$

Alors, pour tout $z \in Z$, $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial z}(x,z)$ est intégrable. De plus,

$$z \mapsto \int_X F(x,z) d\mu(x)$$

est holomorphe sur Z et

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\int_X F(x,z) d\mu(x) \right) = \int_X \frac{\partial F}{\partial z}(x,z) d\mu(x).$$

Rappelons qu'une fonction f est holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ si et seulement si elle est de classe C^1 sur l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ correspondant, vue comme fonction de $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$, et si elle satisfait la condition de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{\partial f}{\partial \mathrm{Re(z)}} + i \frac{\partial f}{\partial \mathrm{Im(z)}} \equiv 0.$$

On a donc envie de croire que le Théorème 6.6 est une conséquence du Théorème 6.5. Nous allons voir que c'est bien le cas, mais ce n'est pas clair a priori car les conditions de dominations (6.7) et (6.8) ne sont pas les mêmes : l'une estime les dérivées partielles, l'autre la fonction elle-même. La clef est la formule de Cauchy qui permet d'estimer les dérivées d'une fonction holomorphe par la fonction elle-même.

Démonstration. Exercice 5.

7 Espaces produits, théorème de Fubini

Dans cette section, on admet encore les résultats ; on s'attache plutôt à décrypter les énoncés, notamment à préciser le sens de la mesurabilité des intégrales "partielles" (ie $\int_X F(x,y)d\mu(x)$ et $\int_Y F(x,y)d\nu(y)$) dans le théorème de Fubini.

Définition 7.1. *Soient $(X,\mathcal{M})$ et $(Y,\mathcal{N})$ deux espaces mesurables. On appelle* <u>*tribu produit,*</u> *notée $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$, la tribu engendrée par*

$$\{A\times B \mid A\in\mathcal{M} \text{ et } B\in\mathcal{N}\}.$$

Attention, $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ n'est bien sûr pas le produit cartésien de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$.

Proposition 7.2. *i) Les projections $\pi_X : X\times Y\to X$ et $\pi_Y : X\times Y\to Y$ sont mesurables.*
ii) Pour chaque $y\in Y$, l'application $r^y : X\ni x\mapsto (x,y)\in X\times Y$ est mesurable. De même, pour chaque $x\in X$, $r_x : y\mapsto (x,y)$ est mesurable de Y vers $X\times Y$.

L'intérêt de cette proposition est donner des critères de mesurabilité. Par exemple, si $f : X\to\mathbb{C}$ et $g : Y\to\mathbb{C}$ sont mesurables, l'application $f\otimes g$, ie

$$(f\otimes g)(x,y) = f(x)g(y), \qquad x\in X,\ y\in Y,$$

est mesurable sur $X\times Y$ car s'écrit comme le produit des fonctions mesurables $(f\circ\pi_X)$ et $(g\circ\pi_Y)$ (voir les Propositions 1.6 *i)*, 1.8 *ii)* et 7.2 *i)*). Dans "l'autre sens", si $F : X\times Y\to\mathbb{C}$ est mesurable, alors pour tout $y\in Y$, $F^y : X\to\mathbb{C}$ définie par

$$F^y(x) = F(x,y)$$

est mesurable sur X car s'écrit $F\circ r^y$. De même, pour chaque $x\in X$, $F_x : Y\to\mathbb{C}$, définie par

$$F_x(y) = F(x,y),$$

ie $F\circ r_x$, est mesurable sur Y.

Hypothèse importante. Dans ce qui suit, on se donne des espaces mesurés $(X,\mathcal{M},\mu)$ et $(Y,\mathcal{N},\nu)$ avec

$$\mu \text{ et } \nu \text{ mesures } \sigma\text{-finies.}$$

Théorème 7.3. *Il existe une unique mesure, notée $\mu\times\nu$, définie sur $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ telle que*

$$(\mu\times\nu)(A\times B) = \mu(A)\nu(B),$$

pour tous $A\in\mathcal{M}$ et $B\in\mathcal{N}$.

Définition 7.4. *La mesure $\mu\times\nu$ s'appelle la mesure produit.*

Un critère très commode pour prouver l'intégrabilité d'une fonction sur $X\times Y$ est le suivant.

Théorème 7.5 (Tonelli). *Soit $F : X\times Y\to\mathbb{C}$ une fonction mesurable (relativement à $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$). Alors, les fonctions à valeurs dans $[0,+\infty]$*

$$X\ni x\mapsto \int_Y |F(x,y)|\,d\nu(y) \qquad \text{et} \qquad Y\ni y\mapsto \int_X |F(x,y)|\,d\mu(x), \tag{7.1}$$

sont définies partout et mesurables (respectivement par rapport à $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$). De plus

$$\int_X\left(\int_Y |F(x,y)|\,d\nu(y)\right)\,d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X |F(x,y)|\,d\mu(x)\right)\,d\nu(y) \le +\infty,$$

et si cette valeur commune est finie alors F est $\mu\times\nu$-intégrable.

Notons que les intégrales de (7.1) sont bien définies car les applications $|F_x|$ et $|F^y|$ sont positives et mesurables, d'après la Proposition 7.2.

Théorème 7.6 (Fubini)**.** *Soit $F : X \times Y \to \mathbb{C}$ une fonction $\mu \times \nu$ intégrable. Alors*

1. *pour μ-presque tout $x \in X$, F_x est ν-intégrable sur Y et*
$$x \mapsto \int_Y F(x,y)\ d\nu(y) \tag{7.2}$$
est μ-intégrable sur X,
2. *pour ν-presque tout $y \in Y$, F^y est μ-intégrable sur X et*
$$y \mapsto \int_X F(x,y)\ d\mu(x)$$
est ν-intégrable sur Y,
3. *on a*
$$\int_X \left(\int_Y F(x,y)\ d\nu(y) \right)\ d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X F(x,y)\ d\mu(x) \right)\ d\nu(y) = \int_{X\times Y} F\ d(\mu \times \nu).$$

C'est naturellement le point *3* qui est le plus intéressant (pour les calculs) ; les points *1* et *2* servent d'abord à justifier l'existence des intégrales intervenant en *3*. Il ne faut pas pour autant les oublier ! On verra d'ailleurs qu'ils sont utiles pour défnir la convolution.

Remarque. D'après *1* (et de façon analogue pour *2*), F_x est ν-intégrable pour μ-presque tout x. Cela signifie en particulier que la fonction (7.2) n'est en fait définie que μ-presque partout. Précisons donc sa définition. En séparant parties réelles et imaginaires, on peut supposer F à valeurs réelles et on l'écrit $F = F^+ - F^-$ (parties positives et négatives). D'après le Théorème de Tonelli, $\int_Y F^+(x,y)\ d\nu(y)$ et $\int_Y F^-(x,y)\ d\nu(y)$ sont des fonctions définies partout sur X, mesurables, et à valeurs dans $[0,+\infty]$. Ce même théorème de Tonelli combiné à l'intégrabilité de F montrent qu'elles sont intégrables car
$$\int_X \left(\int_Y F^{\pm}(x,y)\ d\nu(y) \right)\ d\mu(x) = \int_{X\times Y} F^{\pm}\ d(\mu\times\nu) \le \int_{X\times Y} |F|\ d(\mu\times\nu) < \infty.$$
En particulier, $\int_Y F^{\pm}(x,y)\ d\nu(y)$ sont finies pour μ-presque tout x et on peut définir
$$\int_Y F(x,y)\ d\nu(y) = \int_Y F^+(x,y)\ d\nu(y) - \int_Y F^-(x,y)\ d\nu(y)$$
dès que chaque intégrale du membre de droite est finie. Autrement dit, si M est une partie $\mathcal{M}$-mesurable telle que $\mu(M) = 0$ et telle que $\int_Y F^{\pm}(x,y)\ d\nu(y)$ sont finies pour tout $x \in X \setminus M$, on a pour tout $x \in X \setminus M$
$$\int_Y F(x,y)\ d\nu(y) = \chi_{X\setminus M}(x) \int_Y F^+(x,y)\ d\nu(y) - \chi_{X\setminus M}(x) \int_Y F^-(x,y)\ d\nu(y),$$
où la fonction de droite est définie (et finie) pour tout $x \in X$ et mesurable. Elle est aussi intégrable. Ainsi le point *1* du Théorème 7.6 se précise de la façon suivante :

1. (7.2) coïncide μ-presque partout avec une fonction $\mathcal{M}$-mesurable qui est μ-intégrable.

Le cas particulier de $\mathbb{R}^d$.

On note par λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Outre le fait qu'elle est σ-finie, le résultat fondamental qui permet d'utiliser le théorème de Fubini dans $\mathbb{R}^{d_1+d_2} \simeq \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ est le suivant.

Théorème 7.7. *Soient $d_1, d_2 \ge 1$ entiers. Alors $\lambda_{d_1+d_2}$ est la complétée de la mesure produit $\lambda_{d_1} \times \lambda_{d_2}$.*

On peut donc énoncer la version euclidienne du Théorème de Fubini-Tonelli.

Théorème 7.8. *Soit $F : \mathbb{R}^{d_1+d_2} \to \mathbb{C}$ une fonction Lebesgue mesurable.*
i) Les fonctions

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_2}} |F(x,y)| \, d\lambda_{d_2}(y) \qquad \text{et} \qquad y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} |F(x,y)| \, d\lambda_{d_1}(x)$$

sont définies respectivement pour λ_{d_1}-presque tout x et λ_{d_2}-presque tout y. De plus

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} |F(x,y)| \, d\lambda_{d_2}(y) \right) d\lambda_{d_1}(x) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} |F(x,y)| \, d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(x),$$

et si cette valeur commune est finie, alors F est Lebesgue intégrable.
ii) Si F est Lebesgue intégrable,

1. *pour λ_{d_1}-presque tout $x \in \mathbb{R}^{d_1}$, F_x est λ_{d_2}-intégrable sur $\mathbb{R}^{d_2}$ et*

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_2}} F(x,y) \; d\lambda_{d_2}(y)$$

est λ_{d_1}-intégrable sur $\mathbb{R}^{d_1}$,

2. *pour λ_{d_2}-presque tout $y \in \mathbb{R}^{d_2}$, F^y est λ_{d_1}-intégrable sur $\mathbb{R}^{d_1}$ et*

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} F(x,y) \; d\lambda_{d_1}(x)$$

est λ_{d_1}-intégrable sur $\mathbb{R}^{d_1}$,

3. *on a*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} F(x,y) d\lambda_{d_2}(y) \right) d\lambda_{d_1}(x) &= \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} F(x,y) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d_1+d_2}} F \; d\lambda_{d_1+d_2}. \end{aligned}$$

Remarque 1. Le point *i)* est la partie "Tonelli". Il faut observer le changement par rapport au Théorème 7.5, avec l'introduction du presque partout. La subtilité vient du fait qu'être Lebesgue mesurable (ie $\mathcal{M}_{d_1+d_2}$-mesurable) est une notion plus générale qu'être $\mathcal{M}_{d_1} \times \mathcal{M}_{d_2}$ mesurable.

Remarque 2. Rappelons aussi qu'intégrer des fonctions définies presque partout sous-entend que ces fonctions coïncident presque partout avec des fonctions Lebesgue mesurables et intégrables ou à valeurs dans $[0, +\infty]$ (voir la Remarque après le Théorème 7.6).

Remarque 3. Répétons que la mesure de Lebesgue est σ-finie.

Dans le reste de cette section, on explique comment déduire le Théorème 7.8 des Théorèmes 7.5 et 7.6.

Si on note par $\mathcal{M}_d$ la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, $\lambda_{d_1} \times \lambda_{d_2}$ n'est définie que sur $\mathcal{M}_{d_1} \times \mathcal{M}_{d_2}$ et il n'y a aucune raison a priori pour que $\mathcal{M}_{d_1+d_2}$ coïncide avec cette tribu produit. Néanmoins, la tribu produit est suffisament "grosse" au sens où on peut vérifier que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1+d_2}) \subset \mathcal{M}_{d_1} \times \mathcal{M}_{d_2} \subset \mathcal{M}_{d_1+d_2}, \tag{7.3}$$

si $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d_1+d_2})$ est la tribu borélienne. L'intérêt de cette remarque est le suivant. Si F est une fonction $\mathcal{M}_{d_1+d_2}$-mesurable, la Proposition 4.5 montre qu'il existe une fonction borélienne G telle que $F = G$ $\lambda_{d_1+d_2}$ presque partout. Mais comme G est borélienne, elle est $\mathcal{M}_{d_1} \times \mathcal{M}_{d_2}$-mesurable d'après (7.3). Ainsi, F coïncide $\lambda_{d_1+d_2}$-presque partout, donc $\lambda_{d_1} \times \lambda_{d_2}$-presque partout, avec une fonction borélienne G. C'est la première étape pour se ramener à une fonction borélienne. La seconde étape est donnée par la proposition suivante, disant les applications partielles coïncident presque partout :

Proposition 7.9. *Soient $F : \mathbb{R}^{d_1+d_2} \to \mathbb{C}$ $\mathcal{M}_{d_1+d_2}$-mesurable et $G : \mathbb{R}^{d_1+d_2} \to \mathbb{C}$ borélienne telles que $F = G$ $\lambda_{d_1} \times \lambda_{d_2}$-presque partout. Alors, pour λ_{d_1}-presque tout $x \in \mathbb{R}^{d_1}$,*

$$F_x = G_x \qquad \lambda_{d_2}\text{-presque partout sur } \mathbb{R}^{d_2}.$$

L'énoncé analogue a lieu pour F^y et G^y lorsque $y \in \mathbb{R}^{d_2}$.

Démonstration. Quitte à changer F en $F - G$, on peut supposer que $G = 0$. Soit alors $N = \{F \neq 0\}$. Par hypothèse, il existe $M \in \mathcal{M}_{d_1} \times \mathcal{M}_{d_2}$ tel que

$$N \subset M \qquad \text{et} \qquad (\lambda_{d_1} \times \lambda_{d_2})(M) = 0.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{d_1}$, on note alors

$$M_x := \{y \in \mathbb{R}^{d_2} \mid (x, y) \in M\}, \qquad N_x := \{y \in \mathbb{R}^{d_2} \mid (x, y) \in N\} = \{y \in \mathbb{R}^{d_2} \mid F_x(y) \neq 0\},$$

et il s'agit de vérifier que, pour λ_{d_1}-presque tout x, N_x est λ_{d_2}-négligeable. Par le théorème de Fubini appliqué à la fonction indicatrice χ_M, qui est $\mathcal{M}_{d_1} \times \mathcal{M}_{d_2}$ mesurable, on a

$$(\lambda_{d_1} \times \lambda_{d_2})(M) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \chi_M(x, y) d\lambda_{d_2}(y) \right) d\lambda_{d_1}(x) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \lambda_{d_2}(M_x) d\lambda_{d_1}(x) = 0,$$

où la fonction $x \mapsto \lambda_{d_2}(M_x) \in [0, +\infty]$ est définie partout et mesurable par le théorème de Tonelli. Comme elle est d'intégrale nulle, elle est nulle λ_{d_1}-presque partout (Proposition 3.13), ie

$$A := \{x \in \mathbb{R}^{d_1} \mid \lambda_{d_2}(M_x) > 0\}$$

est λ_{d_1}-négligeable. Si $x \notin A$, on a $\lambda_{d_2}(M_x) = 0$ et comme $N_x \subset M_x$ (car $N \subset M$), N_x est λ_{d_2}-négligeable donc mesurable par complétude de la mesure de Lebesgue. On a ainsi exactement le résultat : pour λ_{d_1}-presque tout x (ie $x \notin A$), $F_x = 0$ λ_{d_2}-presque partout (ie sur $\mathbb{R}^{d_2} \setminus N_x$). □

Démonstration du Théorème 7.8. Il suffit d'appliquer les Théorèmes 7.5 (pour *i)*) et 7.6 (pour *ii)*) à une fonction borélienne G qui coïncide avec F $\lambda_{d_1+d_2}$-presque partout et de remarquer que

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} |F(x, y)| d\lambda_{d_2}(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} |G(x, y)| d\lambda_{d_2}(y),$$

pour λ_{d_1}-presque tout x d'après la Proposition 7.9, et de même pour les intégrations par rapport à y ou en remplaçant $|F|$ et $|G|$ par F et G. □

A Exercices

Exercice 1. *1) Montrer que tout ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ est une union au plus dénombrable de pavés ouverts.*
2) Montrer que tout ouvert non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ est une réunion au plus dénombrable d'intervalles de la forme (1.1).

La question 1) est utilisée dans la preuve de la Proposition 1.8 et la 2) dans la preuve de la Proposition 1.7.

Solution. 1) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$, on note

$$B(x, r) =]x_1 - r, x_1 + r[\times \cdots \times]x_d - r, x_d + r[,$$

qui est la boule relative à la norme $|x|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x|_d)$. Pour tout $q \in \mathbb{Q}^d \cap U$ (on peut remplacer $\mathbb{Q}^d$ par n'importe quelle partie dénombrable dense dans $\mathbb{R}^d$), notons

$$I(q) = \{r > 0 \mid B(q, r) \subset U\}.$$

Chaque $I(q)$ est non vide car U est ouvert. Si l'un d'eux est non majoré, alors il existe une suite $r_n \in I(q)$ telle que $r_n \to \infty$, auquel cas on a $\mathbb{R}^d = \cup_{n\in\mathbb{N}} B(q, r_n) \subset U$, et le résultat est clair ($U = \mathbb{R}^d$). Sinon, tous les $I(q)$ sont majorés et on peut considérer, pour chaque $q \in \mathbb{Q}^d \cap U$,

$$r(q) := \sup I(q).$$

On va montrer que

$$I(q) =]0, r(q)]. \tag{A.1}$$

Tout d'abord, $I(q)$ est un intervalle : si $r_1, r_2 \in I(q)$ avec $r_1 < r_2$, alors $[r_1, r_2] \subset I(q)$ car si $r \in [r_1, r_2]$, on a $B(q, r) \subset B(q, r_2) \subset U$. De plus $\inf I(q) = 0$ car si $r \in I(q)$, alors $]0, r] \subset I(q)$ par le même argument. Comme $0 \notin I(q)$, on a $I(q) =]0, r(q)]$ ou $]0, r(q)[$. En fait $r(q) \in I(q)$, car si r_n est une suite de $I(q)$ tendant vers $r(q)$, on a $B(q, r(q)) = \cup_n B(q, r_n)$ et cette union est incluse dans U comme union d'ouverts contenus dans U. Ceci prouve (A.1). On en déduit que $B(q, r(q)) \subset U$ pour tout $q \in \mathbb{Q}^d \cap U$ ce qui implique que

$$\cup_{q\in\mathbb{Q}^d\cap U} B(q, r(q)) \subset U. \tag{A.2}$$

Vérifions que c'est une égalité, ce qui donnera le résultat. Si $x \in U$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \subset U$. Par densité de $\mathbb{Q}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, il existe $q \in \mathbb{Q}^d$ tel que

$$q \in B(x, \epsilon/3).$$

Comme $|q - x|_\infty < \epsilon/3$, on a alors

$$B(x, \epsilon/3) \subset B(q, 2\epsilon/3) \subset B(x, \epsilon) \subset U.$$

Cela implique que $q \in U$ et que $r(q) \geq 2\epsilon/3$; ainsi $x \in B(x, \epsilon/3) \subset B(q, r(q))$, ce qui prouve que x est dans l'ensemble de droite de (A.2). D'où le résultat.
2) Par définition de la topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ tout ouvert est une réunion quelconque d'intervalles de la forme (1.1). Commençons par remarquer que, pour une famille $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ quelconque (non vide) de réels,

$$\cup_{\lambda\in\Lambda}]a_\lambda, +\infty] =]\inf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda, +\infty],$$

avec la convention que $\inf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = -\infty$ si la famille des a_λ n'est pas minorée. Si l'inf est réel (ie $> -\infty$), cette union s'écrit comme un seul intervalle $]a, +\infty]$, sinon on écrit par exemple

$$] - \infty, +\infty] = \cup_{n\in\mathbb{N}}] - n, +\infty].$$

Une union d'intervalles de la forme $[-\infty, a_\lambda[$ se traite de façon similaire. Il reste à considérer une union de la forme

$$U = \cup_{\lambda\in\Lambda}]a_\lambda, b_\lambda[,$$

avec les $a_\lambda < b_\lambda$ réels, c'est-à-dire un ouvert de $\mathbb{R}$ pour lequel on peut utiliser 1). □

Exercice 2. *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in X$, on note par $P_n(x)$ une proposition quelconque (ex. $f_n(x) > 0$). Vérifier l'équivalence de i) et ii) :*

i)	*pour tout $n \in \mathbb{N}$,*	*$P_n(x)$ est vraie pour presque tout x,*
ii)	*pour presque tout $x \in X$,*	*$P_n(x)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

(Ceci prouve en particulier la Remarque qui suit le Théorème 3.17.)

Solution. Explicitons *i)* et *ii)*. *i)* signifie

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe } N_n \subset X \text{ négligeable tel que } P_n(x) \text{ est vraie pour tout } x \in X \setminus N_n,$$

alors que *ii)* signifie

$$\text{il existe } N \subset X \text{ négligeable tel que } P_n(x) \text{ est vraie pour tout } x \in X \setminus N \text{ et tout } n \in \mathbb{N}.$$

Clairement, $ii) \Rightarrow i)$ car, si *ii)* est vraie, on obtient *i)* en prenant $N_n = N$. Pour voir que $i) \Rightarrow ii)$, on suppose *i)* vraie et on considère

$$N := \cup_{n\in\mathbb{N}} N_n.$$

C'est un ensemble négligeable (réunion dénombrable d'ensembles négligeables). Mais alors, pour tout n, $P_n(x)$ est vraie pour tout $x \in X \setminus N$, car $x \in X \setminus N_n$ puisque

$$X \setminus N = N^c = \cap_{j\in\mathbb{N}} N_j^c \subset N_n^c = X \setminus N_n.$$

Donc *ii)* est vraie. □

Exercice 3. *1) Soit $\mathcal{M}$ une tribu sur un ensemble X. Soit $Y \subset X$ une partie quelconque de X. Vérifier que*

$$\mathcal{M}_Y := \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{M}\}$$

est une tribu sur Y.
2) Soient $\mathcal{M}$ une tribu sur un ensemble X, $Y \in \mathcal{M}$ une partie mesurable de X et $f : Y \to \mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, une application. Soit $\widetilde{f} : X \to \mathbb{K}$ le prolongement de f par 0 hors de Y. Montrer que

$$\widetilde{f} \text{ est mesurable relativement à } \mathcal{M} \qquad \Leftrightarrow \qquad f \text{ est mesurable relativement à } \mathcal{M}_Y.$$

(On suppose $\mathbb{K}$ équipé de la tribu borélienne).
3) Supposons $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mesuré et $Y \subset X$ mesurable. Avec les notations précédentes, montrer que

$$\mu_Y(A \cap Y) := \mu(A \cap Y), \qquad A \in \mathcal{M},$$

définit une mesure μ_Y sur $(Y, \mathcal{M}_Y)$ et que, pour toute fonction mesurable $f : Y \to [0, +\infty]$,

$$\int_Y f \, d\mu_Y = \int_X \widetilde{f} \, d\mu.$$

4) Supposons X topologique et notons $\mathcal{B}(X)$ la tribu borélienne. Soit Y un borélien de X. Montrer que

$$\mathcal{B}(X)_Y = \mathcal{B}(Y),$$

où $\mathcal{B}(X)_Y = \mathcal{M}_Y$ avec $\mathcal{M} = \mathcal{B}(X)$, et $\mathcal{B}(Y)$ est la tribu borélienne de Y.
5) Si μ est complète relativement à $\mathcal{M}$ et si $Y \in \mathcal{M}$, montrer alors que μ_Y est complète relativement à $\mathcal{M}_Y$.

Commentaire. Le but de cet exercice est de justifier la Définition 3.12. La question 4) montre qu'il n'y a pas de piège quand on considère les tribu boréliennes, au sens où considérer les boréliens de Y (pour la topologie induite sur Y) ou les traces (ie intersection avec Y) des boréliens de X revient au même.

Solution. 1) est une vérification directe qui ne pose de problème.
2) On vérifie aisément que si $B \subset \mathbb{K}$, on a

$$f^{-1}(B) = \widetilde{f}^{-1}(B) \cap Y \qquad \text{et} \qquad \widetilde{f}^{-1}(B) = \begin{cases} f^{-1}(B) & \text{si } 0 \notin B, \\ f^{-1}(B) \cup Y^c & \text{si } 0 \in B. \end{cases}$$

Donc, si $\widetilde{f}$ est mesurable et B un borélien de $\mathbb{K}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}_Y$. Réciproquement, si f est mesurable, $\widetilde{f}^{-1}(B)$ est de la forme $A \cap Y$ ou $(A \cap Y) \cup Y^c$ avec $A \in \mathcal{M}$ et donc, dans chaque cas, $\widetilde{f}^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ car $Y \in \mathcal{M}$.
3) Le fait que μ_Y soit une mesure, ie la σ-additivié de μ_Y, est immédiat. Puis, si $f : Y \to [0, +\infty]$ est $\mathcal{M}_Y$ mesurable, on vérifie que l'application

$$\{0 \leq s \leq f \mid s \text{ étagée sur } Y\} \ni s \mapsto \widetilde{s} \in \{0 \leq t \leq \widetilde{f} \mid t \text{ étagée sur } X\},$$

où $\widetilde{s}$ est l'extension de s par 0 sur Y^c, est bijective. L'injectivité est triviale. Pour prouver la surjectivité on choisit $t = \sum \alpha_k \chi_{S_k}$ dans l'ensemble d'arrivée (la somme est finie, les S_k $\mathcal{M}$-mesurables, les $\alpha_k \geq 0$ et $0 \leq t \leq \widetilde{f}$). Si $\alpha_k \neq 0$, on a nécessairement $S_k \subset Y$ car $\widetilde{f}$ (et donc t) est nulle sur Y^c. Il est alors facile de voir que $t = \widetilde{s}$ en posant $s = \sum_{\alpha_k \neq 0} \alpha_k \chi_{S_k} + 0\chi_{\{t=0\}\cap Y}$ ce qui prouve la surjectivité. Enfin, comme

$$\int_Y s \, d\mu_Y = \sum \alpha_k \mu(S_k \cap Y) = \sum \alpha_k \mu(S_k) = \int_X \widetilde{s} \, d\mu$$

(vérification facile en utilisant que $S_k \subset Y$ si $\alpha_k \neq 0$), on en déduit que

$$\sup_{\substack{s \text{ étagée,} \\ 0 \leq s \leq f}} \int_Y s \, d\mu_Y = \sup_{\substack{s \text{ étagée,} \\ 0 \leq s \leq f}} \int_X \widetilde{s} \, d\mu = \sup_{\substack{t \text{ étagée,} \\ 0 \leq t \leq \widetilde{f}}} \int_X t \, d\mu,$$

ce qui est exactement le résultat.
4) D'après 1), $\mathcal{B}(X)_Y$ est une tribu contenant tous les $\Omega \cap Y$, avec Ω ouvert de X, ie tous les ouverts de Y. Donc $\mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X)_Y$. Pour montrer que $\mathcal{B}(X)_Y \subset \mathcal{B}(Y)$, on considère

$$\mathcal{T} = \{B_1 \cup B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}(Y) \text{ et } B_2 \in \mathcal{B}(Y^c)\} \subset \mathcal{P}(X).$$

Il est facile de vérifier que $\mathcal{T}$ est une tribu sur X. De plus, tout ouvert Ω de X est dans $\mathcal{T}$ car s'écrit $(\Omega \cap Y) \cup (\Omega \cap Y^c)$, ie réunion d'un ouvert de Y et d'un ouvert de Y^c. Donc $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{T}$. Comme Y est un borélien de X, on a $A \cap Y \in \mathcal{B}(X)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$. Donc $A \cap Y \in \mathcal{T}$ et s'écrit $B_1 \cup B_2$ avec $B_1 \in \mathcal{B}(Y)$ et $B_2 \in \mathcal{B}(Y^c)$; comme B_2 est clairement vide, on a $A \cap Y = B_1 \in \mathcal{B}(Y)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$, d'où le résultat.
5) Soit $N \subset Y$ une partie μ_Y-négligeable. Il existe donc $M = A \cap Y \in \mathcal{M}_Y$, avec $A \in \mathcal{M}$, telle que $N \subset M = A \cap Y$ et $\mu(A \cap Y) = 0$. Comme $A \cap Y$ est μ-négligeable et comme $N \subset A \cap Y$, on a donc $N \in \mathcal{M}$, par complétude de μ. Par conséquent $N = N \cap Y \in \mathcal{M}_Y$. $\square$

Exercice 4. *Prouver la mesurabilité de (5.12).*
Solution. Il suffit de prouver la mesurabilité de

$$A(x) := \begin{cases} \frac{|f(x)|}{f(x)} = \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} & \text{si } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{si } f(x) = 0. \end{cases}$$

Pour $x \in X$ et $n \geq 1$ entier, on considère

$$a_n(x) = \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)| + \frac{1}{n}}.$$

Elle est mesurable (composée de la fonction continue $\bar{z}/(|z| + \frac{1}{n})$ avec f). De plus, $a_n(x) \to \overline{f(x)}/|f(x)|$ si $f(x) \neq 0$. On en déduit que

$$A_n := a_n \times \chi_{f \neq 0} \to A, \qquad \text{partout},$$

ce qui prouve la mesurabilité de A car A_n est mesurable pour chaque n. $\square$

Exercice 5. *Démontrer le Théorème 6.6.*

Solution. Via la caractérisation par la condition de Cauchy-Riemann, il suffit de montrer que $z \mapsto \int_X F(x,z)d\mu(x)$ est C^1 comme fonction de $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ et se dérive sous le signe intégral. Il suffit même de voir qu'autour de chaque $z_0 \in Z$, il y a une boule $B(z_0, r)$ sur laquelle c'est le cas. Ceci sera garanti par le Théorème 6.5 si on montre que pour chaque z_0 il existe $r > 0$ et g_r à valeurs dans $[0, +\infty]$ et intégrable sur X telle que

$$\text{pour presque tout } x \in X, \text{ pour tout } z \in B(z_0, r), \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial \mathrm{Re(z)}}(x,z)\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial \mathrm{Im(z)}}(x,z)\right| \leq g_r(x).$$

Prouvons cette propriété. Soit $N \subset X$ négligeable tel que $z \mapsto F(x,z)$ est holomorphe sur Z pour tout $x \in X \setminus N$ et tel que

$$|F(x,z)| \leq g(x), \qquad \text{pour tous } x \in X \setminus N, \quad z \in Z.$$

Soient alors $z_0 \in Z$ et $r > 0$ telle que $B(z_0, 2r) \subset Z$. Alors, par formule de Cauchy, pour tout $x \in X \setminus N$, on a pour tout $z \in B(z_0, r)$,

$$F(x,z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta - z_0| = 2r} \frac{F(x,\zeta)}{\zeta - z} d\zeta := \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(x, z_0 + 2re^{i\theta})}{z_0 + 2re^{i\theta} - z} 2ire^{i\theta} d\theta.$$

Cette expression se dérive sous le signe intégral (en utilisant par exemple le Théorème 6.5 !) par rapport à $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$. Comme $|z - z_0| < r$ et $|\zeta - z_0| = 2r$, on a $|(\zeta - z)^2| \geq r^2$ et donc

$$\left|\frac{\partial F}{\partial \mathrm{Re(z)}}(x,z)\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial \mathrm{Im(z)}}(x,z)\right| \leq \frac{4}{r} g(x),$$

pour tout $x \in X \setminus N$ et tout $z \in B(z_0, r)$. Le résultat en découle. □

Exercice 6. *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $1 \leq p < q$ deux réels.*
1) Montrer que, pour tout $r \in]p, q[$, il existe un unique $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}. \tag{A.3}$$

2) Supposons que $f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$. Montrer que, pour tout $r \in]p, q[$, $f \in L^r(\mu)$ et que,

$$||f||_r \leq ||f||_p^\theta ||f||_q^{1-\theta}, \tag{A.4}$$

où θ est défini comme en i).
3) Montrer que si $f \in L^p(\mu) \cap L^\infty(\mu)$, alors $f \in L^r(\mu)$ pour tout $r \in]p, \infty[$ et

$$||f||_r \leq ||f||_p^{\frac{p}{r}} ||f||_\infty^{1-\frac{p}{r}}.$$

(Remarque : formellement, cette inégalité n'est autre que (A.4) en faisant $q = \infty$.)

Solution. *1)* Il suffit de résoudre l'équation (en θ) qui donne $\theta = (\frac{1}{r} - \frac{1}{q})/(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$.
2) En remarquant que

$$\frac{1}{p_1} = \frac{r\theta}{p} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{q_1} = \frac{r(1-\theta)}{q}$$

défnissent des exposants conjugués (ie $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$) et que $|f|^r = |f|^{\frac{p}{p_1}} |f|^{\frac{q}{q_1}}$, l'inégalité de Hölder nous donne

$$\int_X |f|^r \, d\mu \leq \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{r\theta}{p}} \left(\int_X |f|^q \, d\mu\right)^{\frac{r(1-\theta)}{q}}$$

dont on tire immédiatement le résultat.
3) C'est encore plus simple ! On majore simplement

$$\int_X |f|^r \, d\mu = \int_X |f|^{r-p} |f|^p \, d\mu \leq ||f||_\infty^{r-p} \int_X |f|^p \, d\mu = ||f||_\infty^{r-p} ||f||_p^p,$$

qui donne le résultat. □

Exercice 7. *Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. On rappelle que $\{f > t\}$ signifie $f^{-1}(]t, +\infty])$.*
1) Montrer que

$$\int_X f \, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\}) \, dt. \tag{A.5}$$

Montrer que cette formule reste vraie si on remplace $\{f > t\}$ par $\{f \geq t\}$.
2) En déduire que, pour $p \geq 1$ réel,

$$\int_X f^p \, d\mu = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu(\{f > t\}) \, dt. \tag{A.6}$$

Solution. *1)* On peut commencer par noter que $t \mapsto \mu(\{f > t\})$ est décroissante, donc borélienne, et à valeurs dans $[0, +\infty]$ donc son intégrale est bien définie (et vaut éventuellement $+\infty$). Pour comprendre, l'idée de la preuve, supposons d'abord que $f = \alpha \chi_S$, ie est proportionnelle à la fonction indicatrice d'une partie mesurable S (on suppose $\alpha \geq 0$). On a, par définition même de l'intégrale,

$$\int_X f \, d\mu = \alpha \mu(S).$$

Par ailleurs, on vérifie facilement que, pour tout $t > 0$,

$$\{f > t\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } t \geq \alpha, \\ S & \text{si } 0 < t < \alpha. \end{cases}$$

Ainsi

$$\int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\}) \, dt = \int_0^{\alpha} \mu(S) dt = \alpha \mu(S),$$

ce qui donne le résultat dans ce cas simple. Supposons à présent f étagée, ie

$$f = \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{S_k}, \qquad \text{avec } \ 0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N \ \text{ et } \ S_1, \ldots, S_N \quad \text{mesurables disjoints.}$$

Dans ce cas, on vérifie que

$$\{f > t\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } t \geq \alpha_N, \\ S_k \cup \cdots \cup S_N & \text{si } \alpha_{k-1} \leq t < \alpha_k, \\ S_1 \cup \cdots \cup S_N & \text{si } 0 < t < \alpha_1, \end{cases}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\}) \, dt &= \int_0^{\alpha_1} \mu(S_1 \cup \cdots \cup S_N) dt + \sum_{k=2}^N \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} \mu(S_k \cup \cdots \cup S_N) dt \\ &= \alpha_1 (\mu(S_1) + \cdots + \mu(S_N)) + \sum_{k=2}^N (\alpha_k - \alpha_{k-1}) (\mu(S_k) + \cdots + \mu(S_N)) \\ &= \sum_{k=1}^N \alpha_k \mu(S_k) = \int_X f \, d\mu. \end{aligned}$$

D'où le résultat si f est étagée. Enfin, pour le cas général, on choisit une suite de fonction étagées $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge en croissant vers f. La croissance de la suite assure que, pour tout $t > 0$,

$$\{f_n > t\} \subset \{f_{n+1} > t\}.$$

D'autre part, on a $\{f > t\} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n > t\}$, car si $f(x)$ est réel et $> t$, on aura $f(x) \geq f_n(x) > t$ pour un n assez grand et si $f(x) = +\infty$, alors $f_n(x) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ de sorte que $f_n(x) > t$ pour n assez grand. Ainsi, pour tout $t > 0$,

$$\mu(\{f_n > t\}) \uparrow \mu(\{f > t\}), \qquad n \to +\infty,$$

où $\uparrow$ signifie "converge en croissant vers". On peut donc passer à la limite avec le théorème de convergence montone dans les deux membres de $\int_X f_n \, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{f_n > t\})dt$, ce qui termine la preuve de (A.5).

Pour obtenir l'analogue avec $\{f \geq t\}$, on peut remarquer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\{f \geq t + \frac{1}{n}\} \subset \{f > t\} \subset \{f \geq t\}$$

ce qui nous donne

$$\int_0^{+\infty} \mu\left(\{f \geq t + \frac{1}{n}\}\right) dt \leq \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\})\, dt \leq \int_0^{+\infty} \mu(\{f \geq t\})\, dt. \tag{A.7}$$

Par le changement de variable $t + \frac{1}{n} = s$, l'intégrale à gauche vaut $\int_{1/n}^{+\infty} \mu(\{f \geq s\})\, ds$ et converge vers $\int_0^{+\infty} \mu(\{f \geq s\})\, ds$, par théorème de convergence monotone. On en déduit le résultat en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (A.7).

2) La formule (A.6) s'obtient par le changement de variable $s = t^p$ (sur $]0, +\infty[$) en appliquant (A.5) avec f^p, ie

$$\int_X f^p \, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{f^p > s\})\, ds = \int_0^{+\infty} \mu\left(\{f > s^{1/p}\}\right) ds = \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\})\, pt^{p-1} dt. \qquad \square$$

Exercice 8 (Lien avec l'intégrale de Riemann)**.** *Soient $a < b$ deux réels.*

1) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On note (temporairement) $\int_a^b f(x)dx_{\mathrm{R}}$ son intégrale de Riemann et on rappelle que

$$\int_a^b f(x)dx_{\mathrm{R}} = \lim_{n\to 0} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right). \tag{A.8}$$

Montrer que

$$\int_a^b f(x)dx_{\mathrm{R}} = \int_{]a,b[} f(x)dx,$$

où l'intégrale à droite est l'intégrale de Lebesgue.

Supposons à présent f continue sur $]a, b]$. On rappelle que, sous réserve d'existence de la limite (finie), on pose

$$\int_a^b f(x)dx_{\mathrm{R}} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx,$$

auquel cas on dit que f a une intégrale de Riemann généralisée (en a) convergente. Si cette limite existe quand on remplace f par $|f|$ on dit que l'intégrale est absolument convergente (et on rappelle qu'absolue convergence $\Rightarrow$ convergence).

2) Montrer que f a une intégrale de Riemann généralisée absolument convergente si et seulement si f est Lebesgue intégrable sur $]a, b[$ et qu'alors les deux intégrales coïncident.

Commentaire. Naturellement, (A.8) est l'expression de la convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale de Riemann de f, mais ce n'est pas la définition de l'intégrale de Riemann. Toutefois, ce cadre (un peu) simplifié capture l'essentiel des arguments qui montrent que les intégrales de Riemann et de Lebesgue coïncident pour les fonctions continues, lorsqu'il y a absolue convergence.

Solution. Vue en TD.

Exercice 9. *Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ de classe C^1. On suppose que, pour un $p \in [1,\infty[$, $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$ et $f' \in L^p(\mathbb{R}^+)$. Montrer que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to \infty$.*

Solution. Il suffit de montrer que $|f|$ a une limite à l'infini car, si c'est le cas, cette limite doit être nulle (sinon, il existerait $c > 0$ et $R > 0$ tels que $|f(x)| \geq c$ pour $x > R$ auquel cas on aurait $\int |f|^p \geq \int_{x>R} c^p = +\infty$). Supposons $p > 1$ (le cas $p = 1$ est facile) et admettons un instant que

$$|f(x)|^p = |f(0)|^p + \frac{p}{2}\int_0^x \left(f' \frac{\overline{f}}{|f|} + \frac{f}{|f|}\overline{f}' \right) \chi_{f\neq 0}|f|^{p-1}dt, \tag{A.9}$$

qui n'est formellement que l'identité $g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t)dt$ avec $g(t) = |f(t)|^p$. La fonction entre parenthèses est dans L^p car majorée en module par $|f'| + |\overline{f}'| = 2|f'|$. Par ailleurs, si q est l'exposant conjugué de p, on vérifie (ou on sait bien) que $|f|^{p-1} \in L^q$. Ainsi, par l'inégalité de Hölder, la fonction sous l'intégrale dans (A.9) est dans $L^1(\mathbb{R}^+)$ et l'intégrale donc une limite (finie) quand $x \to +\infty$, par théorème de convergence dominée. Ainsi $|f|^p$ a une limite en $+\infty$ donc $|f|$ aussi et $f \to 0$.

Le problème est donc de préciser le sens de (A.9) et de prouver cette formule. Si f ne s'annule pas, $|f|^p$ est C^1 et (A.9) est effectivement donnée par $g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t)dt$ avec $g(t) = |f(t)|^p$. Pour le cas général, on va approcher $|f|$ par

$$F_n := \left(|f|^2 + \frac{1}{n} g \right)^{1/2}, \qquad g(t) = e^{-t^2}.$$

Clairement $F_n(t) \to |f(t)|$ pour tout t. De plus, comme F_n ne s'annule pas, elle est C^1 et

$$F_n'(t) = \frac{1}{2F_n(t)} \left((f'\overline{f} + f\overline{f}')(t) - \frac{2t}{n} g(t) \right).$$

Enfin, en <u>tout</u> point,

$$pF_n'F_n^{p-1} \to \frac{p}{2}\left(f' \frac{\overline{f}}{|f|} + \frac{f}{|f|}\overline{f}' \right) \chi_{f\neq 0}|f|^{p-1},$$

car si $f(t) \neq 0$ c'est clair et si $f(t) = 0$ le terme de droite est nul et celui de gauche vaut

$$-pt(g(t)/n)^{p/2}$$

qui tend aussi vers 0 quand $n \to \infty$. Notons au passage que cela justifie la mesurabilité de la fonction sous l'intégrale dans (A.9). Pour conclure, on note que $0 \leq t(g(t)/n)^{1/2} \leq xg(t)^{1/2} \leq x$ sur $[0, x]$ et que $F_1 \geq F_n \geq |f|$ et on en déduit que

$$|pF_n'(t)F_n^{p-1}(t)| \leq pF_1^{p-1}(t) \left(|f'(t)| + x \right) \in L^1([0, x], dt),$$

ce qui permet, à x fixé, d'utiliser le théorème de convergence dominée et ainsi de justifier (A.9).
□

Exercice 10. *Montrer que, pour tout $p \in [1, \infty[$, $L^p(\mathbb{R}^d)$ est séparable (ie qu'il existe une famille dénombrable dense).*

Solution. Pour $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, posons

$$C_k = [\, k_1 - \frac{1}{2}, k_1 + \frac{1}{2}\,[\, \times \cdots \times [\, k_d - \frac{1}{2}, k_d + \frac{1}{2}\,[\,.$$

Il est clair que $\cup_{k\in\mathbb{Z}^d} C_k = \mathbb{R}^d$ et que les cubes C_k sont disjoints. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$C_{k,n} = 2^{-n} C_k, \qquad \chi_{k,n} = \chi_{C_{k,n}}$$

Il est à nouveau clair que la famille dénombrable $(C_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}}$ est une partition de $\mathbb{R}^d$ en cubes de côté 2^{-n}. Notons $c_{k,n}$ les centres de ces cubes, ie

$$c_{k,n} = 2^{-n}\,(k_1, \cdots, k_d)\,.$$

Soit alors $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$, et notons

$$\varphi_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \varphi(c_{k,n})\chi_{k,n}.$$

Remarquons alors que si φ est à support dans un assez grand cube dyadique $2^N C_0$, toutes les φ_n sont nulles hors de ce cube, et seuls un nombre fini de k ont une contribution non nulle dans cette somme. Plus précisément, il existe $K(n)$ fini tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\varphi_n(x) = \sum_{k\in K(n)} \varphi(c_{k,n})\chi_{k,n}(x)$$

et

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| \le \max_{k\in K(n)} \sup_{C_{k,n}} |\varphi(x) - \varphi(c_{k,n})|.$$

Si ce maximum est nul, la fonction est nulle. Sinon, il n'est pas nul, on peut alors trouver pour chaque $j \in K(n)$ un rationnel $q_{j,n}$ tel que

$$|q_{j,n} - \varphi(c_{j,n})| \le \max_{k\in K(n)} \sup_{C_{k,n}} |\varphi(x) - \varphi(c_{k,n})|,$$

de sorte que, si on pose

$$\widetilde{\varphi}_n(x) = \sum_{j\in K(n)} q_{j,n}\chi_{j,n}(x),$$

on a

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x) - \widetilde{\varphi}_n(x)| &\le \sup_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x) - \varphi_n(x)| + \sup_{\mathbb{R}^d} |\varphi_n(x) - \widetilde{\varphi}_n(x)| \\
&\le 2 \max_{k\in K(n)} \sup_{C_{k,n}} |\varphi(x) - \varphi(c_{k,n})|
\end{aligned}$$

Par uniforme continuité de φ, le terme de droite tend vers 0 quand $n \to \infty$ (car $C_{k,n}$ est de côté 2^{-n}), et on en déduit que

$$||\varphi - \widetilde{\varphi}_n||_p \to 0,$$

en utilisant que φ et les $\widetilde{\varphi}_n$ sont nulles hors d'un cube fixe $2^N C_0$ et majorées uniformément par $3||\varphi||_\infty$.

Conclusion. Si N est fixé, n est fixé et si $K(n)$ est un ensemble fini arbitraire, la famille des fonctions de la forme $\widetilde{\varphi}_n$, qui est indexée par $(q_{j,n})_{j\in K(n)} \in \mathbb{Q}^{K(n)}$, est dénombrable car $\mathbb{Q}^F$ est dénombrable si F est fini. Puis, si on garde seulement N fixe, l'ensemble de toutes les fonctions $\widetilde{\varphi}_n$, lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $K(n)$ est comme dans la construction ci-dessus, est dénombrable comme union dénombrable de dénombrables, car on peut l'indexer par $\cup_n \mathbb{Q}^{K(n)}$. Puis, si on prend la réunion sur $N \in \mathbb{N}$ des ensembles ainsi construits, on obtient encore un ensemble dénombrable. Cette partie dénombrable de $L^p(\mathbb{R}^d)$ approche arbitrairement les éléments de $C_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Comme $C_c(\mathbb{R}^d)$ est lui-même dense, cette famille est dense. $\square$

Exercice 11. *Montrer que $L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas séparable.*

Solution. Par l'absurde. On suppose qu'il y a une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^\infty(\mathbb{R})$ dense. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $I_n = [n, n+1[$ et χ_{I_n} la fonction caractéristique associée. On introduit

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad ||f_n||_{L^\infty(I_n)} \le 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad ||f_n||_{L^\infty(I_n)} > 1/2 \end{cases},$$

et on considère la fonction mesurable bornée

$$f := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \epsilon_n \chi_{I_n}.$$

Il suffit alors de remarquer que pour chaque $n \in \mathbb{Z}$,

$$||f - f_n||_{L^\infty(\mathbb{R})} \ge ||f - f_n||_{L^\infty(I_n)} \ge \left| ||f||_{L^\infty(I_n)} - ||f_n||_{L^\infty(I_n)} \right| = \left| \epsilon_n - ||f_n||_{L^\infty(I_n)} \right| \ge 1/2,$$

pour obtenir une contradiction. □

Exercice 12. *Montrer qu'il existe une forme linéaire continue sur $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui n'est pas de la forme $f \mapsto \int fg$ avec $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. (Indication : Théorème de Hahn-Banach.)*

Solution. Soit $f_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui n'est pas dans $C_c(\mathbb{R}^d)$. Par Théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire Φ sur $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\Phi \equiv 0 \ \text{ sur } C_c(\mathbb{R}^d) \qquad \text{et} \qquad \Phi(f_0) = 1.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\Phi(f) = \int fg$, pour toute $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors, on a $\int \varphi g = 0$ pour toute $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Si on admet un instant que ceci implique que $g = 0$ pp, alors $f_0 g = 0$ pp et donc $\Phi(f_0) = \int f_0 g = 0$ donne une contradiction. Montrons que $g = 0$ pp. Considérons ψ_n une suite de fonctions continues à supports compacts telle que

$$\psi_n(x) = 1 \ \text{ pour tout } x \in [-n, n]^d \qquad \text{et} \qquad 0 \le \psi_n \le 1.$$

C'est facile d'en construire à partir du cas $d = 1$ avec une fonction affine par morceaux. Par théorème de convergence dominée, on a

$$\int |\psi_n g - g| \to 0.$$

Il suffit donc de prouver que $\int |\psi_n g| = 0$ pour tout n. Par théorème de Lusin, il existe une suite $\varphi_k \in C_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $||\varphi_k||_\infty \le 1$ et

$$\varphi_k(x) \to \frac{\overline{\psi_n(x)g(x)}}{|\psi_n(x)g(x)|} \chi_{\psi_n g \ne 0}(x), \qquad k \to \infty,$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ (la mesurabilité de la fonction à droite se prouve comme dans l'Exercice 4). Par théorème de convergence dominée, on a

$$\int \psi_n g \varphi_k \to \int |\psi_n g|, \qquad k \to \infty.$$

Or, pour toute $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$, on a $\int \psi_n g \varphi = \Phi(\psi_n \varphi) = 0$ car $\psi_n \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Ainsi $\int \psi_n g \varphi_k = 0$ pour tout k donc $\int |\psi_n g| = 0$. Comme n est arbitraire, $\int |g| = 0$. □

Exercice 13 (Continuité des translations dans les $L^p(\mathbb{R}^d)$). *. Soit $p \in [1, \infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et toute $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on définit*

$$(\tau_x f)(y) = f(y - x),$$

pour presque tout y. Montrer que si $x \to x_0$ dans $\mathbb{R}^d$, alors $\tau_x f \to \tau_{x_0} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Solution. C'est une application classique de la densité de $C_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Si $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $x \mapsto \tau_x\varphi$ est continue de $\mathbb{R}^d$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$,

$$||\tau_x\varphi - \tau_{x_0}\varphi||_p \to 0, \qquad x \to x_0.$$

En effet, si φ est nulle hors de $B(0, n)$, $\tau_x\varphi(y) = \varphi(y - x)$ est nulle si $y \notin B(x, n)$ donc si x reste au voisinage de x_0, disons si $|x - x_0| \leq 1$, alors $\varphi(y - x)$ est nulle si $y \notin B(x_0, n + 1)$ (car $|y - x| \geq |y - x_0| - |x_0 - x| \geq n$). Ainsi, on a la condition de domination

$$|\varphi(y - x) - \varphi(y - x_0)| \leq 2||\varphi||_\infty \chi_{B(x_0,n+1)}(y), \qquad y \in \mathbb{R}^d, x \in B(x_0, 1),$$

qui s'élève à la puissance p en $|\varphi(y-x)-\varphi(y-x_0)|^p \leq 2^p||\varphi||_\infty^p \chi_{B(x_0,n+1)}(y)$ et dont le second membre est intégrable et indépendant de x. Comme $\varphi(y - x) - \varphi(y - x_0) \to 0$ quand $x \to 0$, par continuité de φ, on en déduit que

$$||\tau_x\varphi - \tau_{x_0}\varphi||_p^p = \int |\varphi(y - x) - \varphi(y - x_0)|^p dy \to 0, \qquad x \to x_0.$$

Si maintenant $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ est une fonction quelconque, alors en remarquant que τ_x est linéaire sur $L^p(\mathbb{R}^d)$ et que

$$||\tau_x f||_p^p = \int |f(y - x)|^p dy = \int |f(z)|^p dz = ||f||_p^p$$

(via le changement de variable $y - x = z$, qui est de jacobien 1), on voit que, pour toute $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} ||\tau_x f - \tau_{x_0} f|| &= ||\tau_x(f - \varphi) + (\tau_x\varphi - \tau_{x_0}\varphi) - \tau_{x_0}(f - \varphi)||_p \\ &\leq 2||f - \varphi||_p + ||\tau_x\varphi - \tau_{x_0}\varphi||_p. \end{aligned} \tag{A.10}$$

Fixons alors $\epsilon > 0$. Par densité de $C_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, on peut trouver $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ telle que $||f - \varphi||_< \epsilon/3$. Puis, comme $\tau_x\varphi \to \tau_{x_0}\varphi$ quand $x \to x_0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que $||\tau_x\varphi - \tau_{x_0}\varphi||_p < \epsilon/3$ si $|x - x_0| < \delta$. Ainsi, d'après (A.10), $||\tau_x f - \tau_{x_0} f|| < \epsilon$ dès que $|x - x_0| < \delta$, ce qui est le résultat cherché. □

Exercice 14 (Inégalité de Jensen). *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace probabilisé (ie $\mu(X) = 1$). Soient I un intervalle ouvert et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $f \in L^1(\mu)$ est à valeurs dans I.*
1) Montrer que $(\varphi \circ f)^-$ (la partie négative de $\varphi \circ f$) est intégrable.
2) Montrer que $\int_X f\ d\mu \in I$.
3) Montrer que si $(\varphi \circ f)^+$ est intégrable, alors

$$\varphi\left(\int_X f\ d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ f\ d\mu.$$

Indication. On pourra utiliser (et redémontrer) que φ est convexe si et seulement si

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} \leq \frac{\varphi(z) - \varphi(y)}{z - y}, \tag{A.11}$$

pour tous $x < y < z$ dans I.

Il existe une preuve très courte, mais astucieuse, de l'inégalité de Jensen (voir Rudin par exemple). On voudrait ici présenter une preuve intuitive, en révisant au passage quelques propriétés des fonctions convexes.

Intuitivement, le point 3) (ie l'inégalité de Jensen) devrait suivre du fait suivant. Si $s = \sum_k \alpha_k \chi_{S_k}$ est une fonction étagée (avec $\sqcup_k S_k = X$), on a

$$\varphi\left(\int_X s \; d\mu\right) = \varphi\left(\sum_k \alpha_k \mu(S_k)\right) \leq \sum_k \mu(S_k)\varphi(\alpha_k) = \int_X \varphi \circ s \; d\mu, \tag{A.12}$$

où le point clef est l'inégalité, qui utilise le fait que $\sum_k \mu(S_k) = 1$ ie que $\sum_k \alpha_k \mu(S_k)$ est une combinaison convexe des α_k. On voudrait alors obtenir le résultat pour une fonction $f \in L^1(X, d\mu)$ quelconque via un passage à la limite en l'approchant par des fonctions étagées. Ceci utiliserait notamment la propriété

$$\int_X s_n \; d\mu \to \int_X f \; d\mu \qquad \Rightarrow \qquad \varphi\left(\int_X s_n \; d\mu\right) \to \varphi\left(\int_X f \; d\mu\right),$$

qui est garantie si φ est continue. Nous allons pour cela revoir qu'une fonction convexe sur un intervalle ouvert est continue.

Solution. On commence par quelques préliminaires sur les fonctions convexes. Montrons d'abord la caractérisation de la convexité par (A.11). En effet, (A.11) équivaut à

$$\varphi(y) \leq \frac{z-y}{z-x}\varphi(x) + \frac{y-x}{z-x}\varphi(z), \tag{A.13}$$

et comme y s'écrit comme la combinaison convexe $\frac{z-y}{z-x}x + \frac{y-x}{z-x}z$ (avec $x < y < z$), la convexité de φ entraîne (A.11). Réciproquement, si (A.11) est vraie pour tous $x < y < z$, alors (A.13) aussi et en explicitant cette dernière avec $y = tx + (1-t)z$ et $0 < t < 1$, on obtient la convexité de φ.

Si I est ouvert, φ est continue. On montre la continuité à gauche puis à droite. Soit $y_0 \in I$. Alors, comme I est ouvert, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $[y_0 - \epsilon_0, y_0 + \epsilon_0] \subset I$. Si $0 < h < \epsilon_0$, (A.11) nous donne

$$\varphi(y_0) - \varphi(y_0 - h) \leq h\left(\frac{\varphi(y_0 + \epsilon_0) - \varphi(y_0)}{\epsilon_0}\right),$$

en prenant $x = y_0 - h$, $y = y_0$ et $z = y_0 + \epsilon_0$. On obtient de même

$$\varphi(y_0) - \varphi(y_0 - h) \geq h\left(\frac{\varphi(y_0) - \varphi(y_0 - \epsilon_0)}{\epsilon_0}\right),$$

avec $x = y_0 - \epsilon_0$, $y = y_0 - h$ et $z = y_0$. On en déduit la continuité de φ à gauche. La continuité de φ s'obtient de façon similaire.

On remarque enfin que φ ne peut pas décroître plus vite que linéairement. Fixons $y_0 \in I$ et $\epsilon_0 > 0$ comme ci-dessus. D'après (A.11) avec $x = y_0 - \epsilon_0$, $y = y_0$ et $z > y_0$, on a

$$\varphi(z) \geq (z - y_0)\left(\frac{\varphi(y_0) - \varphi(y_0 - \epsilon_0)}{\epsilon_0}\right) + \varphi(y_0).$$

De même (A.11) avec $x < y_0$, $y = y_0$ et $z = y_0 + \epsilon_0$ donne facilement

$$\varphi(x) \geq (x - y_0)\left(\frac{\varphi(y_0 + \epsilon_0) - \varphi(y_0)}{\epsilon_0}\right) + \varphi(y_0).$$

On en déduit l'existence de $C > 0$ telle que, pour tout $x \in I$,

$$\varphi(x) \geq -C(|x| + 1). \tag{A.14}$$

1) Notons d'abord que $\varphi \circ f$ est mesurable car f l'est et φ est continue. D'après (A.14), lorsque $\varphi(x) = -\varphi^-(x) < 0$, on a $\varphi^-(x) \leq C(|x| + 1)$. On en déduit que $0 \leq (\varphi \circ f)^- \leq C|f| + C$ où la fonction à droite est intégrable car $|f|$ est intégrable et 1 est intégrable (car $\mu(X) < \infty$). Donc $(\varphi \circ f)^-$ est intégrable.
2) Il s'agit de prouver que $\int_X f d\mu > \inf I$ et $\int_X f d\mu < \sup I$. Si le sup est $+\infty$ ou l'inf $-\infty$ c'est clair. Supposons par exemple $\sup I = a \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, $f(x) < a$ pour presque tout x donc $\int_X f d\mu \leq a$. Il ne peut pas y avoir égalité sinon $\int_X (a - f) d\mu = 0$ avec $a - f \geq 0$ presque partout donc $a = f$ presque partout ce qui est exclu. On procède de même avec l'inf si il est fini.
3) On va obtenir le résultat en approchant f par des fonctions étagées, pour lesquelles on sait le résultat vrai d'après (A.12). On commence par remarquer que, sans perte de généralité, on peut supposer $0 \in I$ (sinon, on choisit $c \in I$ et on remplace $\varphi(x)$ par $\varphi(x + c)$ et f par $f - c$). On décompose ensuite $f = f^+ - f^-$ et on choisit deux suites de fonctions étagées s_n^+ et s_n^- telles que $0 \leq s_n^\pm \leq f^\pm$ et $s_n^\pm \to f^\pm$. On pose $f_n = s_n^+ - s_n^-$. Par convergence dominée, puisque $|f_n| \leq |f|$, on a $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$ donc, par continuité de φ,

$$\varphi\left(\int_X f_n d\mu\right) \to \varphi\left(\int_X f d\mu\right).$$

On veut maintenant voir que

$$\int_X \varphi \circ f_n \, d\mu \to \int_X \varphi \circ f \, d\mu.$$

Comme φ est continue, on a $\varphi \circ f_n \to \varphi \circ f$. Pour appliquer le théorème de convergence dominée, il reste à obtenir une condition de domination. D'après (A.14) et le fait que $|f_n| \leq |f|$, on a

$$-C(|f| + 1) \leq -C(|f_n| + 1) \leq \varphi \circ f_n.$$

Cela nous donne une minoration. Pour avoir une majoration, on va prouver que

$$\varphi \circ f_n \leq |\varphi(0)| + (\varphi \circ f)^+,$$

ce qui permettra de conclure car le membre de droite est intégrable. En effet, si $f(\omega) \geq 0$, alors $f(\omega) = f^+(\omega)$ et $f^-(\omega) = s_n^-(\omega) = 0$ donc $f_n(\omega) = s_n^+(\omega)$. Dans ce cas, on a $0 \leq f_n(\omega) \leq f(\omega)$ et on peut écrire $f_n(\omega)$ comme combinaison convexe de 0 et $f(\omega)$, ce qui nous donne, pour un $t \in [0, 1]$

$$\varphi(f_n(\omega)) \leq t\varphi(0) + (1 - t)\varphi(f(\omega)) \leq |\varphi(0)| + (\varphi \circ f)^+(\omega).$$

On procède de même si $f(\omega) < 0$ auquel cas $f(\omega) \leq f_n(\omega) \leq 0$. $\square$

Exercice 15 (Estimation de Schur). *Soit $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ continue et telle que*

$$C_1 := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int |K(x, y)| dy < \infty, \qquad C_2 := \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int |K(x, y)| dx < \infty.$$

1) Montrer que pour chaque $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$, la fonction

$$x \mapsto (A\varphi)(x) := \int K(x, y)\varphi(y) dy$$

est bien définie sur $\mathbb{R}^d$ et continue.
2) Montrer que pour tout $p \in [1, \infty]$, $A\varphi \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et

$$||A\varphi||_p \leq C_1^{1-1/p} C_2^{1/p} ||\varphi||_p,$$

avec la convention que $C_1^{1-1/p} C_2^{1/p} = C_1$ si $p = \infty$.
(Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Hölder par rapport à y.)

Solution. 1) À x fixé, la fonction $y \mapsto K(x,y)\varphi(y)$ est continue à support compact donc intégrable. $(A\varphi)(x)$ est donc bien définie pour tout x. Pour montrer la continuité de $A\varphi$, il suffit de montrer que $A\varphi$ est continue sur $B(0,n)$ pour tout $n > 0$. Soit $R > 0$ tel que $\varphi = 0$ à l'exterieur de $\bar{B}(0,R)$. Alors, par continuité de K sur le compact $\bar{B}(0,n) \times \bar{B}(0,R)$, il existe C telle que

$$|K(x,y)| \leq C, \qquad (x,y) \in \bar{B}(0,n) \times \bar{B}(0,R),$$

ce qui implique que

$$|K(x,y)\varphi(y)| \leq C|\varphi(y)|, \qquad (x,y) \in \bar{B}(0,n) \times \mathbb{R}^d,$$

puisque le deux membres de l'inégalité sont nuls si $y \notin \bar{B}(0,R)$. Cette condition de domination et la continuité de $x \mapsto K(x,y)\varphi(y)$ sur $B(0,n)$, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, montrent que $x \mapsto \int K(x,y)\varphi(y)dy$ est continue sur $B(0,n)$. Comme n est arbitraire, $A\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}^d$.
2) Si $p = \infty$, le résultat suit simplement de

$$|A\varphi(x)| \leq \int |K(x,y)\varphi(y)|dy \leq ||\varphi||_\infty \int |K(x,y)|dy \leq C_1 ||\varphi||_\infty.$$

Supposons donc $p \in [1,\infty[$ et notons q son exposant conjugué. Par souci de clarté, on suppose d'abord $p > 1$ pour assurer que q est fini. Alors

$$\begin{aligned} |A\varphi(x)| &\leq \int |K(x,y)\varphi(y)|dy = \int |K(x,y)|^{\frac{1}{q}} |K(x,y)|^{\frac{1}{p}} |\varphi(y)|dy, \\ &\leq \left(\int |K(x,y)|dy\right)^{1/q} \left(\int |K(x,y)||\varphi(y)|^p dy\right)^{1/p}, \end{aligned} \tag{A.15}$$

en utilisant l'ingalité de Hölder. Ainsi

$$|A\varphi(x)|^p \leq C_1^{p/q} \int |K(x,y)||\varphi(y)|^p dy,$$

et par théorème de Tonelli, puisque $(x,y) \mapsto |K(x,y)\varphi(y)|$ est continue sur $\mathbb{R}^{2d}$ donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d})$-mesurable et donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-mesurable, on a

$$\int \left(\int |K(x,y)||\varphi(y)|^p dy\right) dx = \int \left(\int |K(x,y)||\varphi(y)|^p dx\right) dy \leq C_2 ||\varphi||_p^p$$

de sorte que

$$\int |A\varphi(x)|^p dx \leq C_1^{p/q} C_2 ||\varphi||_p^p,$$

qui est exactement le résultat. Pour $p = 1$ la preuve est complètement identique si ce n'est qu'il faut remplacer (A.15) par $\int |K(x,y)||\varphi(y)|dy$. $\square$

Références

[R] W. Rudin *Analyse réelle et complexe*, Dunod.