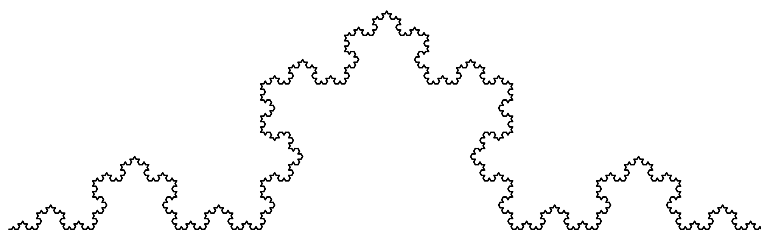


Système itéré de fonctions

1 Introduction

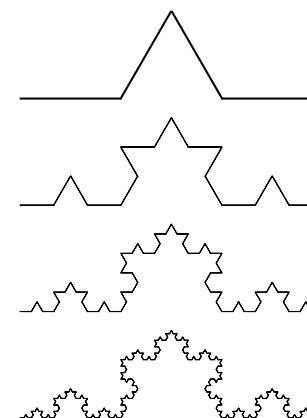
Les fractales sont des objets géométriques qui présentent la particularité d'être «auto-similaires», c'est-à-dire que si l'on zoome sur certaines parties de l'objet on retrouve presque l'objet initial. Il est plus simple de prendre un exemple : le flocon de Koch.



En inspectant cette figure on s'aperçoit de cette propriété d'auto-similarité. Cela devient beaucoup plus clair si l'on sait comment cette figure a été construite.

On part d'un segment horizontal de longueur 1. Nous réduisons ce segment d'un facteur 3 et produisons 4 copies de ce petit segment. Ces 4 copies forment maintenant une dent. Partons de cette dent, effectuons une réduction d'un facteur 3, et produisons 4 petites dents... On itère le processus indéfiniment et la «limite» est notre flocon de Koch. C'est un objet «fractal» différent des figures géométriques classiques. Il possède des propriétés surprenantes. Essayez par exemple de deviner quelle est sa longueur ? Nous calculerons aussi sa dimension : ce n'est pas une courbe (de dimension 1), ni une surface (de dimension 2) mais un objet intermédiaire ! Ce qui est aussi fascinant, c'est qu'avec des transformations extrêmement simples on arrive à fabriquer des objets d'une complexité et d'une beauté infini.

| | |
|--|-----------|
| 1 Introduction | 1 |
| 2 Topologie de \mathbb{R}^2 | 2 |
| 3 Attracteur | 4 |
| 4 Isométries, similitudes | 7 |
| 5 Exemples à partir de similitudes | 10 |
| 6 Transformations affines | 12 |
| 7 Exemples à partir des transformations affines | 15 |
| 8 Dimension de Hausdorff | 18 |
| 9 Le théorème du collage | 21 |



La seconde motivation de ce chapitre est la mise en pratique des transformations usuelles du plan : translations, réflexions, rotations, homothéties et plus généralement des transformations affines. L'usage des matrices facilite grandement l'usage de ces applications.

2 Topologie de \mathbb{R}^2

2.1 Distance

Nous choisissons comme distance la **distance euclidienne** : si $P(x, y)$ et $Q(x', y')$ sont deux points du plan \mathbb{R}^2 alors la distance entre P et Q est

$$\|P - Q\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

C'est bien sûr la distance associée à la **norme euclidienne** :

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Une **isométrie** est une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui préservent les distances, c'est-à-dire :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}^2 \quad \|f(P) - f(Q)\| = \|P - Q\|.$$

Nous démontrerons plus loin que les translations, rotations, réflexions sont des isométries.

Par contre une homothétie de rapport $k \neq +1, -1$ n'est pas une isométrie.

Pour un réel $k \geq 0$, une application f est dite **lipshitzienne de rapport k** si

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}^2 \quad \|f(P) - f(Q)\| \leq k\|P - Q\|.$$

Par exemple une isométrie est lipshitzienne de rapport 1, une homothétie de rapport $k \geq 0$ est lipshitzienne de rapport k .

Les applications dont nous aurons besoin devront réduire les distances : une application f est dite **contractante** (ou est une **contraction**) s'il existe $0 \leq k < 1$ telle que

$$\forall P, P' \in \mathbb{R}^2 \quad \|f(P) - f(Q)\| \leq k\|P - Q\|.$$

Autrement dit une application est contractante si et seulement si elle est lipshitzienne pour un rapport $k < 1$.

2.2 Compacts de \mathbb{R}^2

Voici des rappels.

- Un ensemble $F \subset \mathbb{R}^2$ est un **fermé** si toute suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $P_n \in F$ (pour tout n) et $P_n \rightarrow Q$ alors $Q \in F$.
- Un ensemble $O \subset \mathbb{R}^2$ est un **ouvert** si $\mathbb{R}^2 \setminus O$ est un fermé.
- Un ensemble est **borné** s'il est inclus dans un disque. Autrement dit $B \subset \mathbb{R}^2$ est bornée s'il existe un $R > 0$ tel que $B \subset D(O, R)$.
- Un ensemble est **compact** s'il est fermé et bornée.
- Exemple : les intervalles fermés et bornés de \mathbb{R} sont des compacts.

Théorème 1. Soit $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de compacts non vide. Si $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots$ alors

$$C = \bigcap_{n \geq 0} C_n$$

est un compact non vide.

Remarquez que vu l'emboîtement des compacts alors $C_1 \cap C_2 = C_2$, $C_1 \cap C_2 \cap C_3 = C_3, \dots$ Et donc en d'autres mots le théorème affirme qu'une famille de compacts emboîtés tend vers un compacts.

Voici le résultat fondamental concernant les fonctions continues sur les ensembles compacts, le premier point est pour une fonctions arrivant dans \mathbb{R} le second point est la version pour une fonction arrivant dans \mathbb{R}^2 .

- Théorème 2.**
1. Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit : si $C \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble compact et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue alors il d'une part la fonction est bornée et d'autre part le maximum et le minimum sont atteint en des points de C .
 2. Si $C \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble compact et $f : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une fonction continue alors $f(C)$ est un ensemble compact de \mathbb{R}^2 .

2.3 Distance de Hausdorff

Pour $E \subset \mathbb{R}^2$ et $r \geq 0$, notons

$$E(r) = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \|P - Q\| \leq r \text{ pour un } Q \in E\}$$

le *r-voisinage* de E . C'est l'ensemble des points situés dans E ou à une distance inférieure à r de E .

[[dessin]]

La *distance de Hausdorff* entre deux ensembles $E, F \subset \mathbb{R}^2$ est

$$\text{dist}_H(E, F) = \inf \{ r \geq 0 \mid F \subset E(r) \text{ et } E \subset F(r) \}.$$

C'est donc la plus petite valeur de r telle que F est inclus dans le r -voisinage de E , et E dans le r -voisinage de F .

[[dessin]]

Cela n'a rien à voir avec la distance usuelle entre deux ensembles (le distance la plus courte pour aller de l'un à l'autre).

Proposition 1. Sur l'ensemble \mathcal{C} des compacts de \mathbb{R}^2 , dist_H définie une distance, c'est-à-dire :

1. $\text{dist}_H(E, F) = 0$ si et seulement si $E = F$ (avec E, F compacts).
2. $\text{dist}_H(E, F) = \text{dist}_H(F, E)$.
3. $\text{dist}_H(E, G) \leq \text{dist}_H(E, F) + \text{dist}_H(F, G)$.

Démonstration. Pour la première propriété : si $E = F$ alors $E \subset F(0)$ ($F(0) = F$ est le 0-voisinage de F) et $F \subset E(0)$ donc $\text{dist}_H(E, F) = 0$. Réciproquement supposons que $E \neq F$ et montrons $\text{dist}_H(E, F) > 0$. Comme $E \neq F$ supposons par exemple qu'il existe $P \in F$ et $P \notin E$. Si l'on note r la distance entre P et E (ici il s'agit de la distance usuelle entre un point et un ensemble $d(P, E) = \inf \{ \|P - Q\| \mid Q \in E \}$). Alors $P \notin E(\frac{r}{2})$ et donc $\text{dist}_H(E, F) > \frac{r}{2} > 0$.

La deuxième propriété est évidente, la troisième se déduit de l'inégalité triangulaire pour la distance entre deux points (voir les exercices). \square

3 Attracteur

Soient $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ des fonctions, $i = 1, \dots, \ell$. Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble. Rappelons que l'*image directe* de E par f_i est

$$f_i(E) = \{ f_i(x, y) \mid (x, y) \in E \}.$$

Nous allons généraliser cette notion à une famille de fonction. L'*image directe* de la famille $f = \{f_i\}_{i=1, \dots, \ell}$ est :

$$f(E) = \bigcup_{i=1}^{\ell} f_i(E).$$

Si E est une partie compacte et que les f_i sont continues alors $f_i(E)$ et $f(E)$ sont aussi des parties compactes de \mathbb{R}^2 .

On note $f_i^2(E) = f_i(f_i(E))$, $f_i^3(E) = f_i(f_i(f_i(E)))$,... Et plus généralement $f_i^{k+1}(E) = f_i(f_i^k(E))$. De même pour notre famille, on définit par récurrence $f^{k+1}(E) = f(f^k(E))$.

3.1 Le théorème d'attraction

Théorème 3. Soit $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, \ell$ une famille de contraction. Il existe un unique compact non vide $C \subset \mathbb{R}^2$ qui est invariant par la famille $f = \{f_i\}$:

$$C = \bigcup_{i=1}^{\ell} f_i(C).$$

De plus pour toute partie compacte non vide $E \subset \mathbb{R}^2$ telle que $f_i(E) \subset E$, ($i = 1, \dots, \ell$) alors la suite des itérés $f^k(E)$ converge vers C :

$$C = \bigcap_{k=1}^{+\infty} f^k(E).$$

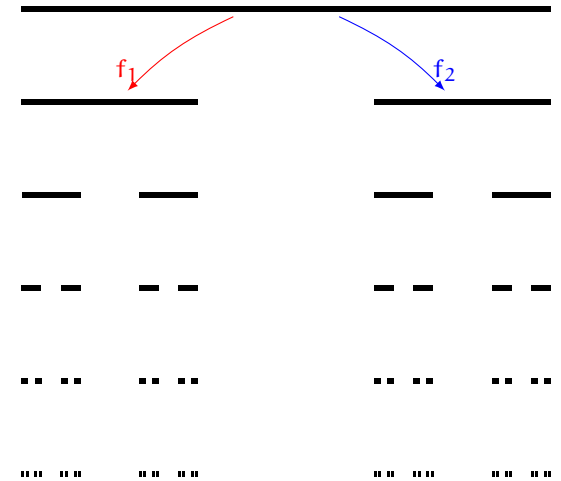
L'ensemble C obtenu est l'**attracteur** de la famille $f = \{f_i\}$.
[[dessin avec les premières itérations.]]

- Remarque.** – La première partie de ce théorème est un résultat théorique d'existence et d'unicité, la seconde partie est un résultat pratique qui permet de calculer l'attracteur.
- Si l'on considère une famille composée d'une seule fonction contractante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors on sait que notre fonction admet un unique point fixe $c \in \mathbb{R}$. Notre attracteur est ici $C = \{c\}$. De plus c s'obtient comme la limite d'une suite récurrente : partant de n'importe quel $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite (x_k) définie par $x_{k+1} = f(x_k)$ converge vers c .
 - Si les f_i ne sont pas des contractions le théorème n'est plus valide. Par exemple imaginez que les f_i soient des translations.

3.2 L'ensemble de Cantor

Nous illustrons ce théorème par un exemple simple, non pas du plan, mais de la droite. Considérons les deux fonctions

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad f_2(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x.$$



La famille $f = \{f_1, f_2\}$ est constituée d'applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} contractantes (elle sont toutes deux lipschitziennes de rapport $k = \frac{1}{3}$).

Soit C_0 le segment $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ alors $f_1(C_0) = [0, \frac{1}{3}]$ et $f_2(C_0) = [\frac{2}{3}, 1]$. Donc $C_1 = f(C_0) = f_1(C_0) \cup f_2(C_0) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Au cran suivant : $f_1(C_1) = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}]$ et $f_2(C_1) = [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{9}{9}]$. Donc $C_2 = f(C_1) = f_1(C_1) \cup f_2(C_1)$ est l'union de 4 segments. On itère le processus : $C_n = f(C_{n-1})$ est l'union de 2^n segments, chaque segment étant de longueur $\frac{1}{3^n}$.

Une autre façon de décrire le processus est qu'à chaque étape on divise chaque segment en trois et on retire celui du milieu.

L'attracteur C obtenu est l'*ensemble de Cantor*, appelé aussi joliment les *poussières de Cantor*. L'ensemble obtenu n'est pas vide, il est même non-dénombrable !

3.3 Preuve

Existence de l'attracteur. Comme les f_i sont des contractions il existe un disque fermé $D = D(O, r)$ (centré à l'origine de rayon r assez grand) tel que $f_i(D) \subset D$ pour tout $i = 1, \dots, \ell$. En d'autres termes $f(D) \subset D$. Cela implique $f(f(D)) \subset f(D)$, donc $f^2(D) \subset f^1(D)$ et par récurrence $f^{k+1}(D) \subset f^k(D)$.

L'ensemble de départ D est un fermé borné de \mathbb{R}^2 donc un compact. Les applications f_i sont contractantes donc continues, ainsi les $f_i(D)$ sont des compacts et $f(D)$ également, de même pour $f^k(D)$. Donc $(f^k(D))_k$ est une suite de compact non vide, décroissante pour l'inclusion. Alors $C = \bigcap_{k=1}^{+\infty} f^k(D)$ est un ensemble compact non vide. Remarquez que, comme les ensembles $f^k(D)$ sont emboîtés, prendre cette intersection infinie n'est juste qu'une façon rigoureuse d'écrire la limite de $f^k(D)$ quand $k \rightarrow +\infty$.

Comme à chaque étape $f(f^k(D)) \subset f^k(D)$ alors $f(\bigcap_{k=1}^{+\infty} f^k(D)) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} f^{k+1}(D) = \bigcap_{k=2}^{+\infty} f^k(D) = C$ donc $f(C) = C$.

Ce que nous venons de faire pour le disque D fonctionne pour n'importe quelle partie compacte non vide E tel que $f(E) \subset E$. Nous avons donc aussi prouvé la seconde partie du théorème.

Unicité. Nous allons utiliser la distance de Hausdorff introduite plus haut (paragraphe 2.3). Si f_i est contractante de rapport $k_i < 1$ alors pour deux compacts $C, C' \subset \mathbb{R}^2$ nous avons $\text{dist}_H(f_i(C), f_i(C')) \leq k_i \cdot \text{dist}_H(C, C')$ (voir les exercices). Donc $\text{dist}_H(f(C), f(C')) \leq \max_{i=1, \dots, \ell} k_i \cdot \text{dist}_H(C, C')$.

Supposons que C et C' soient deux compacts invariants : $f(C) = C$ et $f(C') = C'$. Alors $\text{dist}_H(C, C') \leq \max_{i=1, \dots, \ell} k_i \cdot \text{dist}_H(C, C')$. Comme $\max k_i < 1$ alors $\text{dist}_H(C, C') = 0$ et par la proposition 1 alors $C = C'$.

4 Isométries, similitudes

Nous allons étudier quelques transformations élémentaires du plan.

4.1 Transformations élémentaires

Translation.

Notons $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ un élément de \mathbb{R}^2 . La **translation de vecteur** $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ est l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Rotation.

La **rotation** de centre l'origine et d'angle θ est l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}.$$

À ce point il est plus facile d'utiliser l'écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

On notera M_θ la matrice de la rotation d'angle θ :

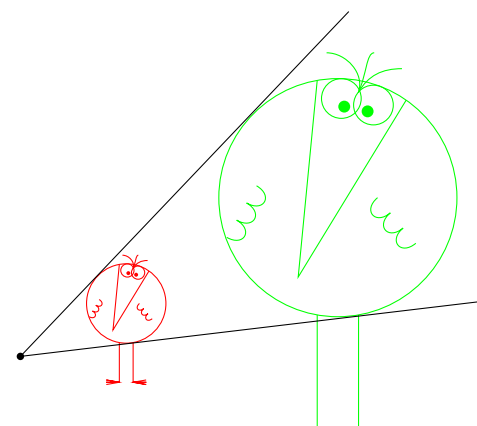
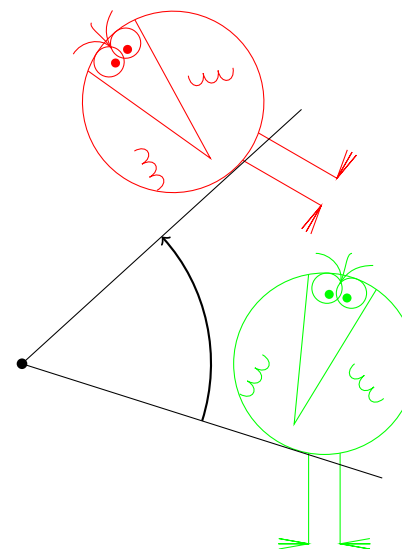
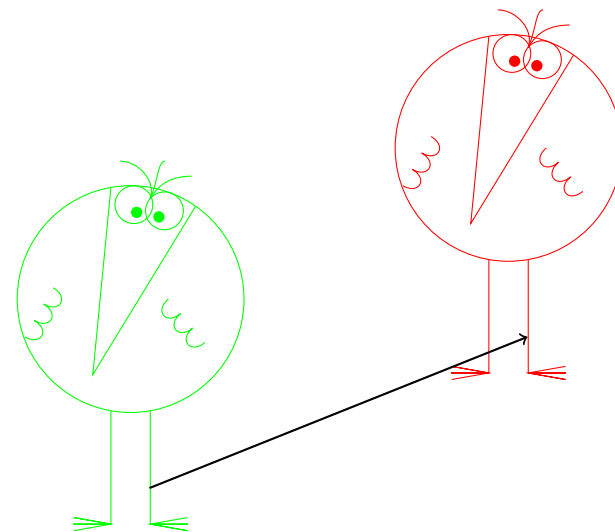
$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Homothétie.

L'**homothétie** de centre l'origine et de rapport $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est l'application de \mathbb{R}^2 dans lui-même définie par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}.$$

Notez que $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ peut aussi s'écrire $k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Réflexion.

Nous commençons par regarder la réflexion par rapport à l'axe des abscisses, c'est l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

En terme de matrice l'écriture est la suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Plus généralement l'expression d'une réflexion par rapport à un axe passant par l'origine est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

4.2 Similitude

À partir de ces transformations élémentaires nous pouvons en inventer de nouvelles. Ce qui est remarquable c'est qu'en composant un nombre quelconque de translations, rotations, homothétie, réflexion la fonction qui en résulte est l'une de deux suivantes :

Similitude directe.

C'est une application de \mathbb{R}^2 dans lui-même définie par

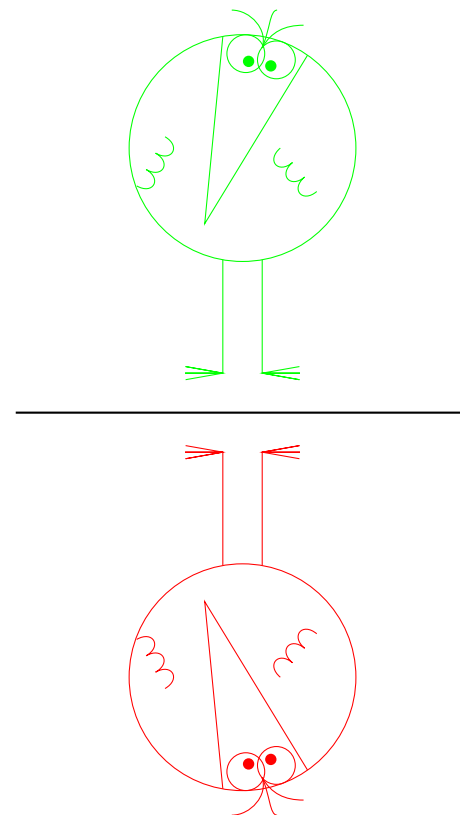
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto k \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

où $k > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$, $e, f \in \mathbb{R}$. C'est la composée d'une homothétie, d'une rotation, d'une translation.

Similitude indirecte.

C'est une application de \mathbb{R}^2 dans lui-même définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto k \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$



où $k > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$, $e, f \in \mathbb{R}$. C'est la composée d'un homothétie, d'une rotation, d'une réflexion et d'une translation.

Ce qui va nous intéresser ici c'est la chose suivante :

Proposition 2. – Les translations, rotations, réflexions conservent les distances (ce sont des isométries),

- Une homothétie de rapport k multiplie les distances d'un facteurs $|k|$.
- Une similitude est contractante si et seulement si son rapport vérifie $0 \leq k < 1$.
- La composition de similitudes contractantes est une similitude contractantes.

Démonstration. 1. – Si f est une translation de vecteur (e, f) , notons $P(x, y)$ et $Q(x', y')$ deux points du plan. $f(P) - f(Q) = f(x, y) - f(x', y') = (x + e, y + f) - (x' + e, y' + f) = (x, y) - (x', y') = P - Q$ donc en particulier pour les distances $\|f(P) - f(Q)\| = \|P - Q\|$. Ce qui en fait une isométrie.

- Pour montrer qu'une application linéaire f est une isométrie il suffit de montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \|f(x, y)\| = \|(x, y)\|. \quad (1)$$

C'est-à-dire que l'on regarde seulement la distance entre les points et l'origine. En effet si (1) est vraie alors pour tout $(x, y), (x', y')$ nous obtenons $\|f(x, y) - f(x', y')\| = \|f(x - x', y - y')\| = \|(x - x', y - y')\| = \|(x, y) - (x', y')\|$ (la linéarité joue un rôle essentiel).

Appliquons ceci à une rotation d'angle θ , $f(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$. Donc $\|f(x, y)\|^2 = (x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + (x \sin \theta + y \cos \theta)^2 = x^2 + y^2 = \|(x, y)\|^2$. (On utilise que $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.)

- Pour une réflexion les calculs sont similaires.
2. On peut supposer que le centre de l'homothétie est à l'origine. L'expression de f est alors $f(x, y) = (kx, ky)$ et donc $\|f(x, y)\| = |k| \cdot \|(x, y)\|$.
 3. Une similitude de rapport $k \geq 0$ est la composition d'isométrie et d'une homothétie de rapport k . Elle est donc contractante si et seulement si l'homothétie l'est.
 4. Ce point découle du fait qu'une similitude de rapport k composée avec une similitude de rapport k' est une similitude de rapport $k \cdot k'$.

□

Proposition 3. L'ensemble des similitudes (directes ou indirectes) forme un groupe pour la composition.

À faire en exercice !

5 Exemples à partir de similitudes

Nous avons déjà vu l'ensemble de Cantor. Reprenons maintenant l'exemple introductif à ce chapitre.

5.1 Le flocon de Koch

Soient les transformations affines suivantes :

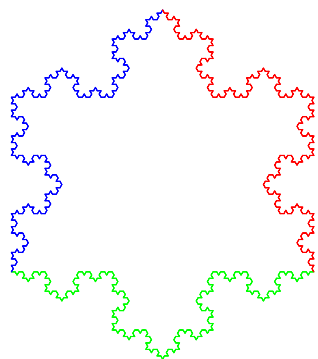
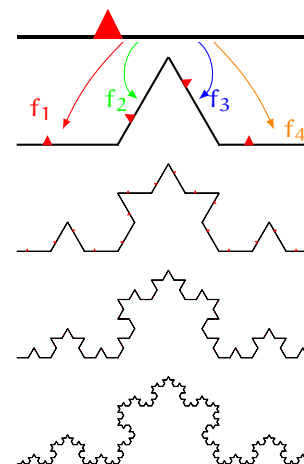
$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} M_{\frac{\pi}{3}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} M_{-\frac{\pi}{3}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}, f_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ce sont toutes des similitudes de rapports $\frac{1}{3}$. Rappelons que $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est la matrice de la rotation d'angle θ .

Chacune des ces transformations envoie le segment $K_0 = [0, 1] \times \{0\}$ sur un petit segment. (Le triangle rouge sert seulement ici à distinguer le «haut» du «bas», on a représenté K_0, \dots, K_4 .) K_1 est donc la figure composée d'une «dent». L'attracteur obtenu en itérant le processus indéfiniment est le flocon de Koch.

En fait pour obtenir un vrai flocon il faut réunir trois attracteurs.

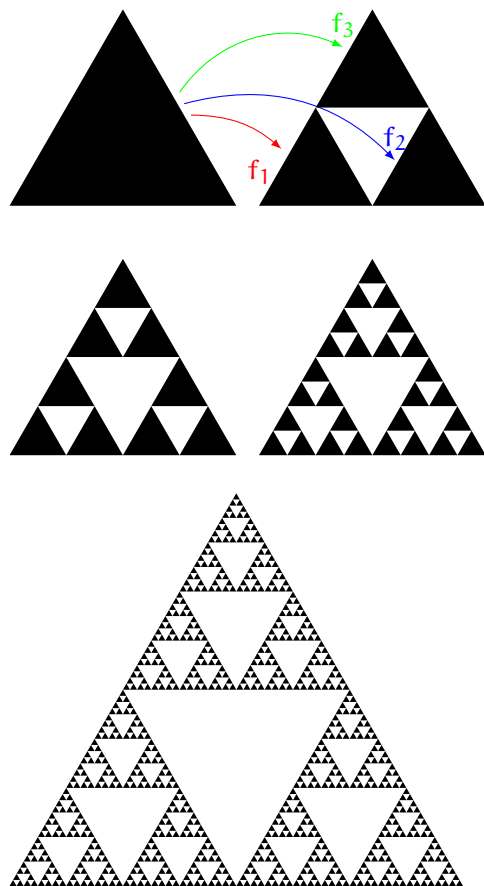


5.2 Le triangle de Sierpinski

On part de S_0 le triangle équilatéral dont les sommets sont $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. On considère 3 transformations affines :

$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$

Géométriquement on retire des triangles au centre de chaque plus gros triangles. On a représenté S_0 , S_1 , S_2 , S_3 et S_6 . Ce qui donne une bonne idée de l'attracteur appelé le *triangle de Sierpinski*.



5.3 D'autres fractales

[[Ici d'autres (belles) figures ou alors en exercice ?]]

6 Transformations affines

6.1 Définition

Une **transformation affine** du plan est une application de \mathbb{R}^2 dans lui-même définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

où a, b, c, d, e, f sont des réels.

En d'autres termes, à un point (x, y) du plan on associe le point (x', y') défini par

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

En fait une transformation affine f est la composée d'une transformation linéaire g et d'une translation $t : f = t \circ g$. Ici la transformation linéaire est l'application :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

6.2 Exemples

Bien sûr les translations, rotations, réflexions, homothéties et similitudes sont des transformations affines. Mais voici des nouveaux exemples.

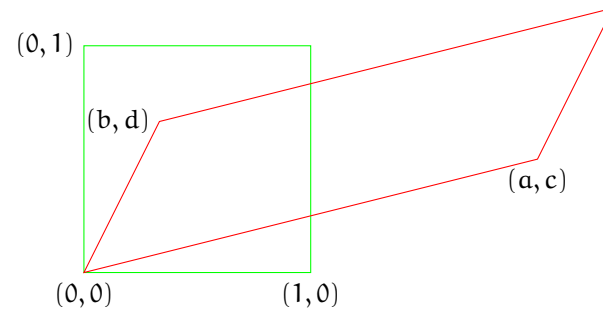
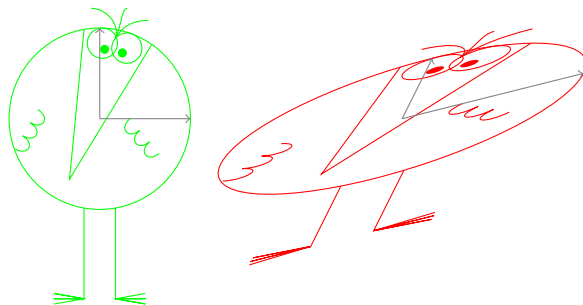
Exemple général

Oublions la translation et concentrons nous sur l'application f définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Nous avons $f(0,0) = (0,0)$, $f(1,0) = (a,c)$, $f(0,1) = (b,d)$. En termes de vecteurs nous avons juste écrit que l'image du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ était le premier vecteur colonne $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, alors que l'image du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le second vecteur colonne $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

L'image du carré unitaire est donc un parallélogramme. Remarquez que sur ce dessin un coté vertical du carré est envoyé sur un petit coté du parallélogramme et un coté horizontale sur un grand coté. Ni les longueurs, ni les proportions ne sont conservées. Voici notre personnage et sa déformation :



Dilatation ou contraction suivant l'axe vertical.

Pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ et $e = f = 0$. Cette application dilate (si $k > 1$) ou contracte (si $k < 1$) la figure verticalement.

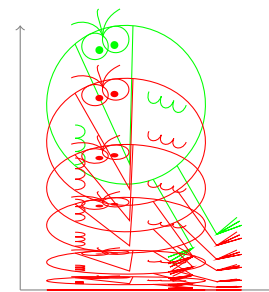
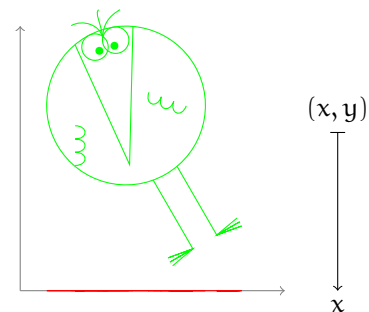
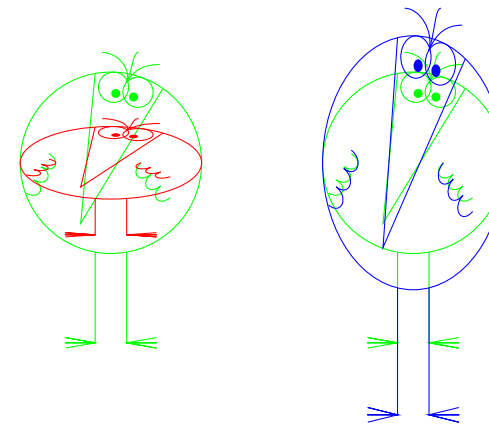
Projection sur un axe.

Pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $e = f = 0$. La transformation affine est alors la projection $(x, y) \mapsto x$. Ce n'est bien sûr pas une application bijective. En particulier beaucoup d'information est perdue au cours de cette transformation : on ne peut pas retrouver l'ensemble de départ en connaissant l'ensemble image et la projection ! Cette projection est la limite, lorsque $k \rightarrow 0$ des contractions verticales du paragraphe précédent.

6.3 Propriétés

- Proposition 4.**
1. Une transformation affine est une bijection si et seulement si la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, autrement dit si et seulement si $\det M = ad - bc \neq 0$.
 2. Une transformation affine bijective conserve le parallélisme.
 3. Soit f est une transformation affine. Si $F = f(E)$ alors $\mathcal{A}(F) = |\det M| \times \mathcal{A}(E)$.

Admis.



Remarque. En particulier si $|\det M| = 1$ alors la transformation affine envoie une surface sur une surface de même aire. Par exemple prenons la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ qui est de déterminant 1. La transformation affine associée (avec $e = f = 0$) conserve les aires. Par contre cette transformation ne conserve pas les distances. Il n'y a pas de lien évident entre les aires et les distances. Soit

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voici une transformation qui divise les aires par 2 (car $\det M = \frac{1}{2}$) mais certaines distances sont multipliées par 2 (par exemple le segment qui va de $(0,0)$ à $(0,1)$) et d'autres sont réduites (le segment qui va de $(0,0)$ à $(1,0)$ aura une image de longueur $\frac{3}{4}$).

Voici une propriété qui caractérise les transformations affines contractantes, donc importantes pour nos attracteurs.

Proposition 5. Une transformation affine $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, est contractante si et seulement si

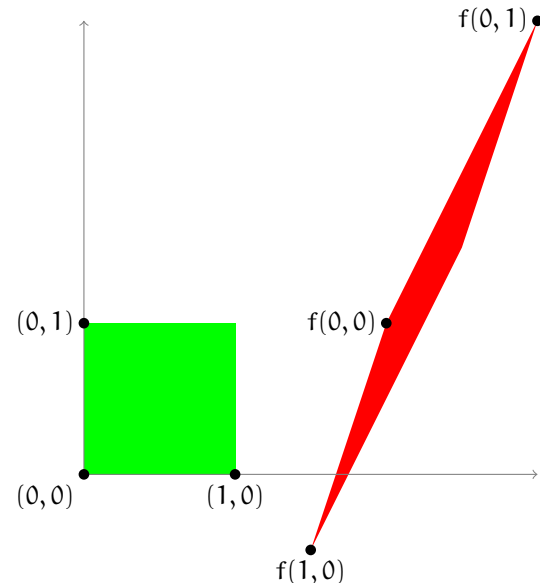
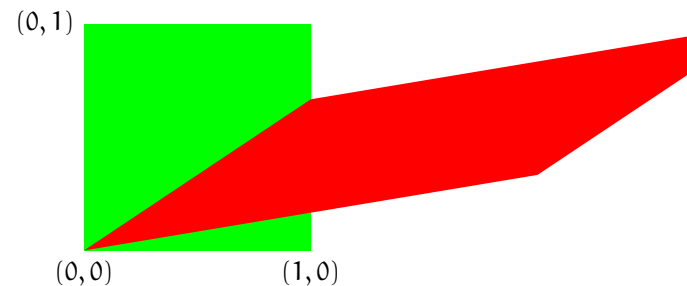
$$\begin{cases} a^2 + c^2 < 1 \\ b^2 + d^2 < 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (ad - bc)^2 < 1 \end{cases}$$

Démonstration. Tout d'abord la translation de vecteur $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ étant une isométrie il suffit de prouver que l'application f définie par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est contractante. Comme f est une application linéaire, c'est équivalent à prouver qu'il existe $0 \leq k < 1$ tel que $\|f(x, y)\| \leq k\|(x, y)\|$.

Remarquons tout d'abord que si f est contractante alors $\|f(1, 0)\| < \|(1, 0)\|$ et donc que $\|(a, c)\| < 1$, c'est-à-dire $a^2 + c^2 < 1$. De même $\|f(0, 1)\| < \|(0, 1)\|$ conduit à $b^2 + d^2 < 1$. Nous allons montrer que le système (S) est équivalent à ce que

$$\|f(x, y)\| < \|(x, y)\| \tag{2}$$

pour tout vecteur non nul. C'est plus faible que le résultat souhaité. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur non nul. Si $x = 0$ alors $f(x, y) = f(0, y) = y \cdot f(0, 1) = y(b, d)$. Donc $\|f(0, y)\| =$



$\|(0, y)\| \cdot \|(b, d)\|$. Donc si (2) est vérifié alors $b^2 + d^2 < 1$ et si (S) est vraie alors (2) est vérifié pour $(0, y)$.

Prenons maintenant (x, y) avec $y \neq 0$. Alors $f(x, y) = x \cdot f(1, \frac{y}{x})$ et donc $\|f(x, y)\| < \|(x, y)\|$ si et seulement si $\|f(1, t)\| < \|(1, t)\|$ avec $t = \frac{y}{x}$. Comparons la norme de $f(1, t) = (1 + tb, td)$ avec celle de $(1, t)$. Soit $S(t) = \|f(1, t)\|^2 - \|(1, t)\|^2$. Alors $S(t) = \|(1 + tb, td)\|^2 - \|(1, t)\|^2 = (b^2 + d^2 - 1)t^2 + 2(ab + cd)t + a^2 + c^2 - 1$. Nous souhaitons savoir à quelles conditions $S(t)$ est négative pour tout t . Remarquons que $S(t)$ est négative pour t grand si et seulement si $b^2 + d^2 < 1$ et que pour $t = 0$, $S(0) < 0$ si et seulement si $a^2 + c^2 < 1$. $S(t)$ est une équation du second degré en t , son graphe est une parabole et seul le cas où la parabole est dirigée vers le bas nous intéresse (le coefficient dominant est négatif). En calculant $S'(t) = 2(b^2 + d^2 - 1)t + 2(ab + cd)$ on trouve que le maximum de la parabole est atteint en $t_0 = -\frac{ab+cd}{b^2+d^2-1}$ où $S(t_0) = -\frac{(ab+cd)^2}{b^2+d^2-1} + a^2 + c^2 - 1$. Donc $S(t)$ est tout le temps négative si et seulement si $S(t_0) < 0$, c'est-à-dire si $(a^2+c^2-1)(b^2+d^2-1) > (ab+cd)^2$ (attention b^2+d^2-1 est négatif). En développant, cette condition est équivalente à $a^2+b^2+c^2+d^2 < 1-(ad-bc)^2$. Mis à part les vecteurs du type $(0, 1)$ ou $(1, 0)$ (traités à part) nous avons montré que le système (S) est équivalent à ce que $\|f(x, y)\| < \|(x, y)\|$.

Nous avons presque ce que nous souhaitons, cependant pour être contractante il faut trouver un $k < 1$ tel que $\|f(x, y)\| \leq k\|(x, y)\|$. Cela ne découle pas immédiatement de l'inégalité stricte précédente. (C'est assez subtile, réfléchissez-y!). Nous allons nous en sortir par un argument de compacité. Soit \mathcal{C} le cercle unité $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Supposons que f vérifie l'inégalité (2), en particulier f est une application continue. L'application $N : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $N(x, y) = \|f(x, y)\|$ est aussi continue. N est donc une fonction continue sur le compact \mathcal{C} , N est donc une fonction bornée qui atteint ses bornes et donc en particulier son maximum. Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ un point où N atteint son maximum et notons $N(x_0, y_0) = k$ ce maximum. On sait par l'équation (2) que $N(x_0, y_0) = \|f(x_0, y_0)\| < \|(x_0, y_0)\|$ et donc $k < 1$ (car $x_0^2 + y_0^2 = 1$).

Maintenant k étant le maximum de N , pour tout $(x, y) \in \mathcal{C}$ nous avons $N(x, y) \leq k$ autrement dit $\|f(x, y)\| \leq k\|(x, y)\|$ (car $\|(x, y)\| = 1$). Enfin pour un point non nul $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ quelconque alors $\frac{1}{\|(x, y)\|}(x, y)$ est un point de \mathcal{C} et par linéarité de f on en déduit que $\|f(x, y)\| \leq k\|(x, y)\|$. Et donc f est contractante. \square

7 Exemples à partir des transformations affines

Jusqu'ici les exemples que nous avons vus étaient assez géométriques, mais avec les transformations affines, en quelques équations on crée des figures qui ont un premier abord très

complexes.

7.1 La fougère de Barnsley

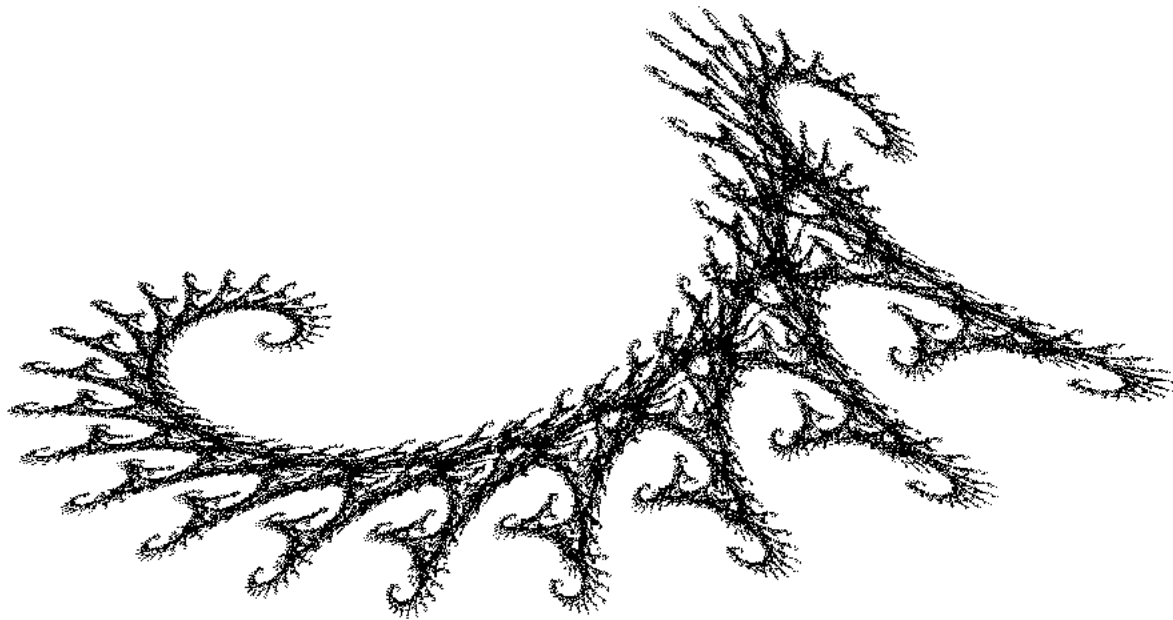


| | a | b | c | d | e | f |
|-------|-------|-------|-------|------|---|------|
| f_1 | 0 | 0 | 0 | 0.16 | 0 | 0 |
| f_2 | 0.85 | 0.04 | -0.04 | 0.85 | 0 | 1.6 |
| f_3 | 0.2 | -0.26 | 0.23 | 0.22 | 0 | 1.6 |
| f_4 | -0.15 | 0.28 | 0.26 | 0.24 | 0 | 0.44 |

[[Explications de chaque transformations]]

7.2 L'hippocampe

Avec seulement deux transformations, on construit déjà des objets fascinants. Voici un exemple de courbe qui n'est pas s'en rappeler un hippocampe.

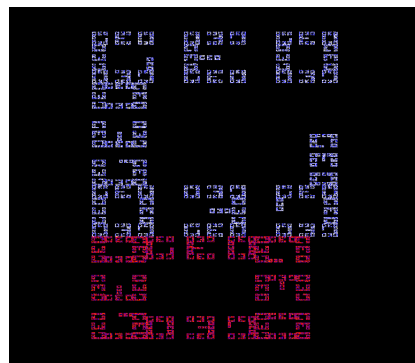
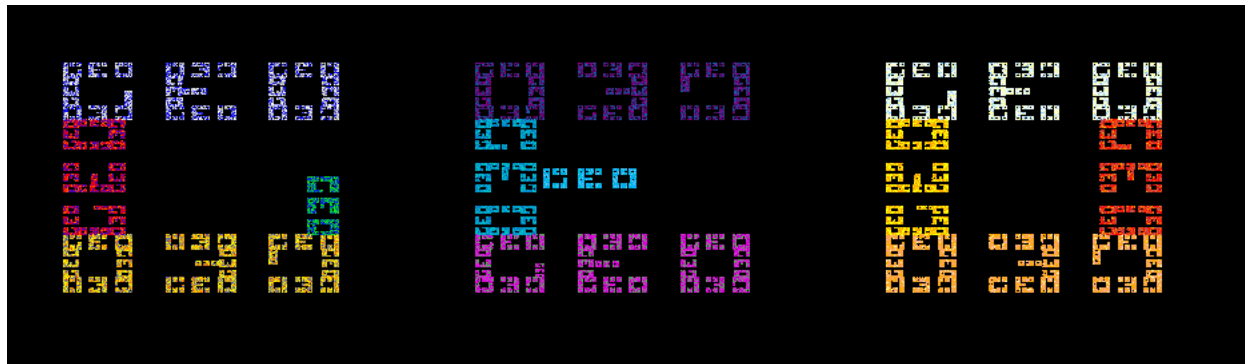


Les transformations sont :

| | a | b | c | d | e | f |
|----------------|------|------|-------|-------|-------|------|
| f ₁ | 0.82 | 0.28 | -0.21 | 0.86 | -1.88 | 0.11 |
| f ₂ | 0.88 | 0.52 | 0.46 | -0.37 | 0.78 | 8.09 |

7.3 Vive la géométrie

Enfin avec un peu de patience et 12 transformations -que nous vous laissons le soin de retrouver- vous pouvez exprimer votre passion pour la géométrie à l'infini !

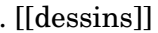



La seconde image est un zoom du coin supérieur gauche.

8 Dimension de Hausdorff

8.1 Définition

Il serait dommage de ne pas parler de dimension d'un ensemble fractal. Nous allons définir de façon intuitive la notion de dimension. On doit retrouver que la dimension d'un segment est 1, d'un carré est 2 et d'un cube est 3.

Prenons l'exemple d'un carré, si on le réduit d'un facteur $m = 2$ alors il faut $\ell = 4 = m^2$ petits carrés pour reconstituer le carré initial. L'exposant 2 est la dimension du carré. Remarquez que si on décide de réduire notre carré initial d'un facteur $m = 3$, alors $\ell = 9 = m^2$. On retrouve le même exposant $d = 2$. 

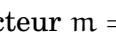
Prenons un cube, si on le réduit d'un facteur $m = 2$, il faut $\ell = 8 = m^3$ petits cubes pour reconstituer le cube initial. Si on réduit notre cube initial d'un facteur m il faut $\ell = m^3$ petits cubes. La dimension est l'exposant $d = 3$. 

Pour un segment, si on le réduit d'un facteur m alors on retrouve $\ell = m^1$ petits segments, la dimension est donc $d = 1$.

Nous définissons la **dimension de Hausdorff** d'un ensemble E comme étant le réel $d > 0$ vérifiant :

$$\ell = m^d$$

tel qu'après une réduction d'un facteur m , il faut ℓ objets réduits pour reconstituer l'ensemble initial. Nous noterons ce réel d par $\dim_H E$.

Nous allons calculer notre première dimension fractale : prenons l'exemple du flocon de Koch :  après réduction d'un facteur $m = 3$ (les contractions sont de rapport $\frac{1}{3}$) il faut $\ell = 4$ ensembles réduits pour reconstituer le flocon. Donc la dimension du flocon est le réel d tel que $4 = 3^d$. En prenant le logarithme on obtient $\ln 4 = d \cdot \ln 3$ et donc $d = \frac{\ln 4}{\ln 3}$. La dimension de Hausdorff du flocon de Koch est donc $d = 1,2628\dots$. C'est donc «plus gros» qu'une courbe de dimension 1 mais «plus petit» qu'une surface de dimension 2.

Si on reformule ceci à l'aide de notre famille d'itération $f = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ alors chacune est une contraction de rapport $k = \frac{1}{3}$ (donc le facteur de réduction est $m = 3$) on trouve la relation

$$\ell \cdot k^d = 1$$

avec $\ell = 4$ le nombre de fonctions dans notre famille.

8.2 Dimension pour un système itéré de fonctions

Nous allons énoncer un théorème qui permet de calculer la dimension de Hausdorff d'un attracteur obtenu par un système itéré de fonctions $f = \{f_i\}$. Les fonctions considérées sont

ici des transformations affines et l'on note $0 < k_i < 1$ le réel tel que

$$\|f_i(P) - f_i(Q)\| = k_i \|P - Q\|.$$

Il nous faut en plus un **condition de non-recouvrement** : on suppose qu'il existe un ouvert $O \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\bigcup_{i=1}^{\ell} f_i(O) \subset O$ et tel que $f_i(O)$ et $f_j(O)$ soient disjoints (si $i \neq j$).

Théorème 4. Soit $f = \{f_i\}_{i=1, \dots, \ell}$ une famille de similitudes de rapport k_i , vérifiant la condition de non-recouvrement alors la dimension de Hausdorff est le réel $d > 0$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{\ell} k_i^d = 1.$$

[[Admis]]

Premier exemple (en dimension 1) : l'ensemble de Cantor C . $f_1(x) = \frac{1}{3}x$, $f_2(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x$. Les transformations sont bien des similitudes de rapport $k_1 = k_2 = \frac{1}{3}$. Si l'on prend $O =]0, 1[$ (un ouvert de \mathbb{R}) alors $f_1(O) =]0, \frac{1}{3}[$, $f_2(O) =]\frac{2}{3}, 1[$. La condition de non-recouvrement est vérifiée car $f_1(O) \cup f_2(O) \subset O$ et $f_1(O) \cap f_2(O) = \emptyset$. Nous cherchons donc d tel que :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^d + \left(\frac{1}{3}\right)^d = 1.$$

Cela revient à l'équation $2 = 3^d$ ou encore $\ln 2 = d \ln 3$ et donc

$$\dim_{\text{H}} C = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

La dimension de l'ensemble de Cantor vaut donc environ 0,6309...

Deuxième exemple : la triangle de Sierpinski S . Les fonctions f_1, f_2, f_3 sont des similitudes de rapport $k_i = \frac{1}{2}$. Pour la condition de non-recouvrement on prend O le triangle ouvert. Le théorème nous donne alors la dimension de Hausdorff

$$\left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1.$$

Et donc $\dim_{\text{H}} S = \frac{\ln 3}{\ln 2}$.

Bien sûr on aurait pu calculer la dimension directement à partir de la définition : après une réduction d'un facteur $m = 2$, il faut $\ell = 3$ triangles réduits pour reconstituer le triangle initial, donc la dimension d vérifie $3 = 2^d$.

9 Le théorème du collage

Vu le caractère «chaotique» de certaines figures il est important d'avoir un résultat qui affirme que nos attracteurs sont stables pour l'unicité : si l'on prend un ensemble E qui est proche de $f(E)$ alors en fait E est proche de l'attracteur C .

Proposition 6. Soit $f = \{f_i\}$ une famille de contractions de rapports $k_i < k < 1$. Soit C l'attracteur de la famille f . Alors pour tout compact non vide $E \subset \mathbb{R}^2$

$$\text{dist}_H(E, C) \leq \frac{1}{1-k} \text{dist}_H(E, f(E)).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{dist}_H(E, C) &\leq \text{dist}_H(E, f(E)) + \text{dist}_H(f(E), C) \quad \text{par l'inégalité triangulaire.} \\ &= \text{dist}_H(E, f(E)) + \text{dist}_H(f(E), f(C)) \quad \text{car } f(C) = C \\ &= \text{dist}_H(E, f(E)) + k \cdot \text{dist}_H(E, C) \quad \text{car } f \text{ est une famille de contractions.} \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Enfin quelles sont les figures que l'on peut représenter par des attracteurs? Réponses : toutes ! La proposition suivante, appelée le théorème de collage, affirme que pour n'importe quelle partie compacte E , on peut trouver une famille de contractions dans l'attracteur C approxime E .

Proposition 7. Soit E une partie non vide et compacte de \mathbb{R}^2 . Pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une famille $f = \{f_i\}$ de contractions ayant pour attracteur un ensemble C tel que

$$\text{dist}_H(E, C) < \varepsilon.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Nous recouvrons notre compact E par un nombre fini de disques D_1, \dots, D_ℓ , chacun de rayon $\frac{\varepsilon}{4}$ et dont les centres appartiennent à E . Pour chaque disque D_i nous construisons une contraction f_i , de rapport $k_i < \frac{1}{2}$, telle que $f_i(E) \subset D_i$.

Nous allons calculer la distance de Hausdorff entre E et $f(E)$ pour appliquer la proposition 6. Comme $f_i(E) \subset D_i$ alors $f(E) = \bigcup_i f_i(E) \subset \bigcup_i D_i \subset E(\frac{\varepsilon}{4})$, où $E(\frac{\varepsilon}{4})$ est le $\frac{\varepsilon}{4}$ -voisinage de E .

Pour l'autre inclusion nous avons $D_i \subset (f_i(E))(\frac{\varepsilon}{2})$ (car D_i est de rayon $\frac{\varepsilon}{4}$ et $f_i(E) \subset D_i$).
[[dessin]] Donc $E \subset \bigcup_i D_i \subset \bigcup_i (f_i(E))(\frac{\varepsilon}{2}) = f(E)(\frac{\varepsilon}{2})$.

Donc $\text{dist}_H(E, f(E)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, nous appliquons alors la proposition 6 pour en déduire $\text{dist}_H(E, C) < \varepsilon$. □

Au début de la preuve nous avons implicitement utiliser le théorème suivant sur les compacts.

Théorème 5. Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ un compact. Si on a un recouvrement de C par des disques ouverts alors on peut en extraire un recouvrement fini.

Nous l'avons appliqué de la façon suivante : On prend pour chaque $P \in C$ on considère le disque D_P centré en P et de rayon r (ici r était $\varepsilon/4$). Alors on a bien un recouvrement de C par tous les disques $D_P : C \subset \bigcup_{P \in C} D_P$. Le théorème nous affirme que, parmi tous ces disques, un nombre fini est suffisant. Donc il existe des points P_1, \dots, P_ℓ tels que $C \subset \bigcup_{i=1, \dots, \ell} D_{P_i}$.

La proposition 6 explique aussi que les calculs numériques (et donc approchés) des ordinateurs sont justifiés. La façon la plus efficace de tracer un attracteur à l'aide d'un ordinateur est la suivante, appelée «jeux du chaos» : partant d'un point quelconque $P_0 \in \mathbb{R}^2$, on construit une suite de points par récurrence. Si P_k est construit, alors on choisit aléatoirement l'une des transformations f_i de la famille f et on définit $P_{k+1} = f_i(P_k)$. On laisse de côté les premiers points (disons les 100 premiers qui peuvent être «loin» de l'attracteur) et l'on trace les points suivants : ces points sont des éléments très proches de l'attracteur et en traçant suffisamment de points ils représentent tout l'attracteur. On améliore le processus en attribuant à chacune des transformations f_i une probabilité p_i pour le choix.

Bibliographie (en anglais) : Kenneth Falconer *Fractal Geometry*, 1990, John Wiley & Sons.