Université Lille I Année 2008-2009
Master 2ème année **Feuille 4**

Théorème de préparation de Weierstrass

Exercice 1 (Convergence formelle)
Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ on note

$$\mathfrak{m}^k = \{f \in \mathbb{C}[[X]] \mid \operatorname{ord} f \geqslant k\}.$$

On note aussi $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^1$.
La suite (f_n) de $\mathbb{C}[[X]]$ *converge formellement* vers $f \in \mathbb{C}[[X]]$ si

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geqslant N \Rightarrow f - f_n \in \mathfrak{m}^k.$$

La suite (f_n) de $\mathbb{C}[[X]]$ est une *suite de Cauchy* si

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q \geqslant N \Rightarrow f_p - f_q \in \mathfrak{m}^k.$$

1. Montrer que
$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}^k = \{0\}.$$
2. Montrer que toute suite de Cauchy de $\mathbb{C}[[X]]$ est formellement convergente.
3. Pour $f \in \mathbb{C}[[X]]$ montrer l'équivalence entre
   (a) f est inversible dans $\mathbb{C}[[X]]$,
   (b) $\operatorname{ord} f = 0$,
   (c) $f \notin \mathfrak{m}$.

Exercice 2 (Série convergente)
Monter que la série formelle $\sum_k X_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{k_n}$ est une série convergente pour $|x_k| < 1$ et que

$$\sum_k x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n} = \frac{1}{(1 - x_1) \cdot \ldots \cdot (1 - x_n)}.$$

Exercice 3
Prouver le théorème de préparation de Weierstrass à partir du théorème de division.

Exercice 4 (Complément au théorème de préparation)
Dans le théorème de préparation de Weierstrass montrer que si la série de départ f est en fait dans $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{n-1}\}[X_n]$ (au lieu de $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}$). Alors l'unité α tel que $f = \alpha g$ (où g est le polynôme de Weierstrass) vérifie aussi $\alpha \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_{n-1}\}[X_n]$.

Exercice 5 (Théorème des fonctions implicites)
À l'aide du théorème de préparation de Weierstrass pour une série d'ordre 1 montrer le théorème des fonctions implicites suivant : Soit $f \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n, Y\}$ tel que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial Y}(0) \neq 0,$$

alors il existe un unique $\phi \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}$ tel que

$$\phi(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(X_1, \dots, X_n, \phi(X_1, \dots, X_n)) = 0.$$

Exercice 6 (Lemme d'Hensel)
Soit $A = \mathbb{C}\{X_1, \ldots, X_n\}$. Pour $f \in A[y]$ on note $\bar{f}(Y) = f(0, Y) \in \mathbb{C}[Y]$. $f = a_0 Y^k + a_1 Y^{k-1} + \cdots a_k \in A[Y]$ est *unitaire* si $a_0 = 1$. Montrer que si $\bar{f}(Y) = (Y - \alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (Y - \alpha_p)^{k_p}$ où les $\alpha_i \in \mathbb{C}$ sont distincts alors il existe des polynômes unitaires $f_1, \ldots, f_p \in A[Y]$ tels que

$$f = f_1 \cdot \ldots \cdot f_p, \quad \deg f_i = k_i \quad \text{et} \quad \bar{f}_i = (Y - \alpha_i)^{k_i}, \quad i = 1, \ldots p.$$

Indication : faire une récurrence sur p.

Exercice 7 (Branches locales)
Calculer les équations des branches locales de $y^2 = x^2(1 + x)$.