Points singuliers

Exercice 1
Calculer la multiplicité d'intersection à l'origine des courbes d'équations $(x^2+y^2)^2+3x^2y-y^3$, $(x^2+y^2)^3-4x^2y^2$.

Exercice 2
Montrer que toute courbe projective plane non singulière est irréductible.

Exercice 3
Montrer qu'une courbe algèbrique projective de degré n sans facteurs multiples de $\mathbb{C}P^2$ a au plus $\frac{1}{2}n(n-1)$points singuliers. (Attention la courbe n'est pas supposée irréductible.)

Exercice 4
Utiliser le théorème de Bézout pour montrer que si une courbe projective C de $\mathbb{C}P^2$ de degré n contient strictement plus de $n/2$ points singuliers se trouvant sur une même droite L alors L est une composante de C.

Exercice 5 (Cubiques de $\mathbb{C}P^2$)
Une *cubique* de $\mathbb{C}P^2$ est une courbe projective de degré 3.

1. On suppose que $(0:0:1)$ est un point singulier de la cubique C. Montrer qu'une équation de C est de la forme :
$$(\text{une conique en } x \text{ et } y) \cdot z = \text{une cubique en } x \text{ et } y.$$
2. Montrer que l'on peut changer les coordonnées pour que l'équation de C soit
$$y^2z = \text{ une cubique en } x \text{ et } y, \quad \text{ou} \quad xyz = \text{ une cubique en } x \text{ et } y.$$
3. Montrer qu'après un changement du type $z \mapsto \alpha x+\beta y+\gamma z$, une équation devient $(b \in \mathbb{C})$:
$$y^2z = (x+by)^3, \quad \text{ou} \quad xyz = (x+y)^3.$$
4. Avec une tranformation supplémementaire, montrer qu'une cubique irréductible singulière est projectivement équivalente à :
$$y^2z = x^3, \quad \text{ou} \quad y^2z = x^2(x+z).$$
5. Quelles sont les points singuliers des cubiques de la liste précédente ?
6. Quels sont les points singuliers de la cubique : $y^2z = x(x-z)(x-\lambda z)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$.

Exercice 6 (Multiplicité en un point)

Soit C une courbe affine de $\mathbb{C}^2$, et $f \in \mathbb{C}[x,y]$ un polynôme minimal pour C. Pour $p=(a,b) \in \mathbb{C}^2$ on écrit le développement de Taylor de f en p.

$$f(x,y) = \sum_k f_k \quad \text{où} \quad f_k = \sum_{\alpha+\beta=k} c_{\alpha,\beta}(x-a)^\alpha (y-b)^\beta.$$

Ici

$$c_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\alpha!\beta!}\frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}.$$

La *multiplicité* de C en p est définie par

$$\mathrm{ord}_p(C) := \min\{k \mid f_k \neq 0\}.$$

Remarque : cela s'appelle aussi la multiplicité de f en p, ou l'*ordre* de f en p.
Fixons $p \in \mathbb{C}$, notons $m = \mathrm{ord}_p(C)$. p est un point *simple* si $m=1$ et un point *multiple* sinon. Pour $m=2$ on parle d'un point *double*, pour $m=3$, d'un point *triple*,... Le polynôme f_m est un homogène et se décompose donc en produit de forme linéaire : $f_m = \prod \ell_i$. Les droites $(\ell_i = 0)$ sont les *tangentes* de C en p. Un point multiple est dit *point multiple ordinaire* s'il a exactement m tangentes (on ne tient pas compte des éventuels exposants $\ell_i^{k_i}$).

1. Vérifier les propriétés suivantes :
   (a) $0 \leqslant \mathrm{ord}_p(C) \leqslant \deg C$.
   (b) $p \in C \Leftrightarrow \mathrm{ord}_p(C) > 0$.
   (c) C est singulier en $p \Leftrightarrow \mathrm{ord}_p(C) > 1$.
2. Trouver la multiplicité et les tangentes à l'origine de la courbe définie par

$$(x^2+y^2)^2 - 3x^2y - y^3.$$

3. Soit L est une droite passant par p.
   (a) Montrer que

$$\mathrm{ord}_p(C) \leqslant \mathrm{mult}_p(C,L).$$

   (b) Montrer que l'inégalité ci-dessus est stricte si et seulement si L est une tangente à C en p.
4. On peut montrer la formule suivante pour une courbe projective irréductible C de degré n.

$$\sum_{p \in \mathrm{Sing}\, C} \mathrm{ord}_p C(\mathrm{ord}_p C - 1) \leqslant (n-1)(n-2).$$

   C'est une une amélioration de la formule du cours sur le nombre de points singuliers. Que donne cette formule pour une courbe de degré 3 ? de degré 4 ? Que donne la courbe $X^n - Y^{n-1}Z = 0$.