Courbes algébriques projectives, théoréme de Bézout

Exercice 1 (Polynômes homogènes de deux variables)
Montrer qu'un polynôme homogène de $\mathbb{C}[x, y]$ se décompose en produit de formes linéaires $\ell = ax + by$.

Exercice 2
Soit $f \in \mathbb{C}[x, y]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$. Donner une équation de la courbe projective $\bar{C}_t \subset \mathbb{C}P^2$ correspondant à la courbe affine $V(f - t)$, $t \in \mathbb{C}$. Monter que $\bar{C}_t$ intersecte la droite à l'infini en un nombre fini de points et que ces points sont indépendants de $t \in \mathbb{C}$.

Exercice 3

1. Trouver toutes les droites de $\mathbb{C}P^2$ passant par $(0 : 1 : 0)$.
2. Montrer que pour tout ensemble fini de points de $\mathbb{C}P^2$ il existe une droite droite passant par aucun de ces points.

Exercice 4
Soit C une courbe algébrique de $\mathbb{C}^2$ et soit L un droite qui n'est pas incluse dans C. En paramétrisant la droite L, montrer le théorème de Bézout dans cette situation :

$$\#(C \cap L) \leqslant \deg C.$$

Exercice 5
Calculer les points d'intersection et les multiplicités d'intersection des courbes suivantes :

1. $V(Y^2Z - X^3)$ intersectée avec $V(Y^2Z - X^2(X + Z))$.
2. $V(Y^2Z - X^2(X + Z))$ intersectée avec $V(Z^2 + 2X^2 + Y^2 + 3XZ)$.

Exercice 6

1. Soit $F \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ un polynôme homogène. Écrivons

$$F = a_0Y^m + a_1Y^{n-1} + \cdots + a_m, \quad a_i \in \mathbb{C}[X, Z].$$

   Montrer que si $C = V(F)$ est une courbe projective ne contenant pas $(0 : 1 : 0)$ et si $L = V(Y)$ est une droite alors

$$\mathrm{Res}(F, Y) = \pm a_m.$$

2. La partie affine de L étant paramétrisée par $(t : 0 : 1)$, $t \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\mathrm{mult}_0(C, L) = \mathrm{ord}_t\, F(t, 0, 1).$$

   Plus généralement si $\phi(t) = (\alpha t : \beta t : 1)$ est une paramétrisation d'un droite L alors $\mathrm{mult}_0(C, L) = \mathrm{ord}_t\, F(\phi(t))$.

Exercice 7 (Dégénérescence de l'hexagone de Pascal)
Dans le théorème de l'hexagone de Pascal on autorise certains points à coïncider (dans ce cas l'arête de l'hexagone correspondante devient la tangente à la conique). Si $p_1, p_2, \dots, p_6$ sont les sommets de l'hexagone. Qu'obtient-on dans les cas suivants ?

1. $p_1 = p_2$, $p_3 = p_4$, $p_5 = p_6$.
2. $p_1 = p_2$ et les quatre autres sommets sont distincts.

Exercice 8 (Théorème de Brianchon)
Montrer que si l'on considère six tangentes (distinctes) à une conique irréductible, constituant ainsi un hexagone circonscrit à la conique, alors les trois diagonales reliant deux sommets opposés sont concourantes