Université Lille I Année 2008-2009
Master 2ème année **Feuille 0**

Introduction : courbes algébriques et singularités

Exercice 1 (Quintique de Klein)
Soit $f_1(x,y) = x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 1$ et $f_2(x,y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2 - 1$. Pour de petits ε prochent de 0 on regarde la courbe d'équation $f_1 \cdot f_2 = \varepsilon$.

1. Dessiner la courbe pour $\varepsilon = 0$, puis $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 0$.
2. Une *bitangente* est une droite qui est tangente à la courbe en deux points distincts. Compter le nombre de bitangente pour $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon < 0$.

Exercice 2 (Cycloïde)

1. Un cercle de rayon 1 roule sur une droite. Dessiner la courbe d'un point fixe de ce cerlce : c'est une *cycloïde.*
2. Donner une équation paramétrique de cette cycloïde.
3. Est-ce une courbe algébrique ?

Exercice 3 (Hypocycloïde)
Un cercle C de rayon r roule à l'intérieur d'un cercle fixe C' de rayon r'. Un point fixe de C décrit une *hypocycloïde.*

1. Dessiner cette courbe pour $\frac{r}{r'} = \frac{1}{3}$ et pour $\frac{r}{r'} = \frac{2}{3}$.
2. Pour $\frac{r}{r'} = \frac{1}{3}$ donner une équation paramétrique.
3. Pour $\frac{r}{r'} = \frac{1}{3}$ vérifier qu'une équation algébrique est :
$$3(x^2+y^2)^2 + 8x(3y^2 - x^2) + 6(x^2+y^2) = 1.$$

Exercice 4 (Singularités élémentaires)
Dessiner les courbes définies par les équations suivantes :

1. le *nœud* : $y^2 = x^2(1+x)$;
2. le *cusp* : $y^2 = x^3$;
3. le *tacnode* : $y(y-x^2) = 0$.

Exercice 5 (Déformations du cusp)

1. Soit $F_s(x,y) = y^2 - x^3 + sx$. Dessiner les courbes d´équations $(F_s = 0)$ pour $s \in [0,1]$.
2. Soit $G_s(x,y) = y^2 - x^3 - sx^2$. Dessiner les courbes d´équations $(G_s = 0)$ pour $s \in [0,1]$.

Exercice 6 (Fronce de Whitney)
Dessiner la surface d'équation $y = z^3 + xz$.

Exercice 7 (Parapluie de Whitney)
Dessiner la surface d'équation $y^2 = zx^2$.

Exercice 8 (Courbe de Bézier)
Nous construisons les courbes de Bézier par récurrence sur le nombre de points de contrôle. Soit (A, B) deux points du plan affine. La courbe de Bézier pour les deux points de contrôle A, B est le segment $[A, B]$ paramétrisé par le point courant $P(t) = (1-t)A + tB$, $t \in [0, 1]$. Soit maintenant $(A_0, \ldots, A_n)$ $n+1$ points de contrôles. La courbe de Bézier pour $(A_0, \ldots, A_n)$ est la courbe paramétrisée par $P(t) = (1-t)P_1(t) + tP_2(t)$, où $P_1(t)$ (resp. $P_2(t)$) est le point courant de la courbe de Bézier pour les points $(A_0, \ldots, A_{n-1})$ (resp. $(A_1, \ldots, A_n)$).

1. Dessiner une courbe de Bézier pour trois points de contrôle, quatre points de contrôles.
2. Le polynôme de Bernstein B_n^k est défini par :

   $$B_n^k(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}.$$

   (C_n^k est le cœfficient binomial.) Montrer $B_n^k(t) = (1-t)B_{n-1}^k(t) + tB_{n-1}^{k-1}(t)$ (on a par définition $B_0^0(t) = 1$ et $B_n^k(t) = 0$ si $k < 0$ ou si $k > n$). Montrer que le point courant $P(t)$ de la courbe de Bézier pour $(A_0, \ldots, A_n)$ vérifie

   $$P(t) = \sum_{k=0}^{n} B_n^k(t) A_k,$$

   autrement dit $P(t)$ est la barycentre de $\{(A_k, B_n^k(t)) \mid k = 0, \ldots, n\}$.
3. Soit C une courbe paramétrisée par $(P(t), Q(t))$ où P, Q sont des polynômes de degrés p et q. À l'aide du résultant donner une équation algébrique de C et montrer que le degré du polynôme définissant C est de degré $\max(p, q)$. En déduire qu'une courbe de Bézier définie par $n+1$ points de contrôle est une courbe algébrique de degré n.