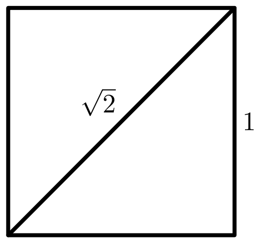
Arnaud Bodin
Université de Lille 1

Capes
2009-2010

$\sqrt{2}$ est irrationnel



Théorème. $\sqrt{2}$ *est un nombre irrationnel.*

Nous allons donner une démonstration différente de la preuve "habituelle". Avant de faire ce raisonnement remarquons les deux choses suivantes :

- Pour un nombre rationnel $\frac{a}{b}$, on peut toujours trouver un entier q tel que $q \times \frac{a}{b}$ soit un entier. Par exemple pour $\frac{12}{4}$ on peut prendre $q = 4$ mais aussi $q = 2$.
- On a les inégalités $\sqrt{2} > 1$ et $\sqrt{2} < 2$. (C'est très facile à démontrer par l'absurde !)

Nous commençons maintenant notre raisonnement par l'absurde. Supposons donc que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Notons par $\mathcal{Q}$ l'ensemble de tous les entiers n tel que $n\sqrt{2}$ soit un entier :

$$\mathcal{Q} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid n \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N} \right\}.$$

Comme nous avons supposé $\sqrt{2}$ rationnel alors l'ensemble $\mathcal{Q}$ est non vide (voir la remarque préliminaire). Puisque $\mathcal{Q}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ elle admet un plus petit élément, notons le q :

$$q = \min \mathcal{Q}.$$

Si on note $q' = q\sqrt{2} - q$ alors q' est un entier avec $q' \geq 1$ et surtout $q' < q$. Calculons alors $q'\sqrt{2}$:

$$q'\sqrt{2} = (q\sqrt{2} - q)\sqrt{2} = 2q - q\sqrt{2}.$$

Donc $q'\sqrt{2}$ est aussi un entier (car bien sûr $2q$ est un entier mais aussi $q\sqrt{2}$ par la définition de q). Autrement dit $q' \in \mathcal{Q}$ et $q' < q$. Ce n'est pas possible car nous avions choisi q comme étant le plus petit élément de l'ensemble $\mathcal{Q}$. Nous avons donc trouver une contradiction. Nous en déduisons que notre hypothèse de départ est fausse, donc $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Commentaires "spécial Capes" :

- Je trouve cette preuve beaucoup plus élégante que la preuve classique. La contradiction de la preuve classique est basée sur fait que l'on part d'une écriture irréductible de $\frac{p}{q}$, c'est une notion pas si évidente : elle est liée à la notion de pgcd, mais surtout il faut implicitemment distinguer la notion de nombre et l'écriture du nombre. Si on oublie de préciser que cette écriture est irréductible on est coincé !
- Pour cette preuve à part la notion de divisibilité, le seul truc de base à savoir est que toute partie (non vide) de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Cela fait parti de la construction de $\mathbb{N}$ (c'est par exemple une conséquence des axiomes de Péano ou alors cela peut être un des axiomes). Mais aucun élève de collège ou lycée ne mettra en doute ce fait (ce qui n'est pas si clair avec l'écriture irréductible de $\frac{p}{q}$).
- Cela peut aussi être l'occasion de présenter la méthode de Newton pour la fonction $x^2 - 2$ qui donne, en partant par exemple de $x_0 = 1$ une suite de très bonnes approximations de $\mathbb{Q}$ par des rationnels.
- D'un point de vue historique le fait que l'on s'interroge sur la rationnalité de $\sqrt{2}$ et qu'on le démontre est très important. Les civilisations égyptiennes et mésopotamiennes pensaient que tout pouvait s'exprimer comme multiple d'une unité, quitte à choisir l'unité assez petite. Cela cadrait avec leur pratique des mathématiques (calcul d'aire, de récolte, de partage de biens, ...). Ce sont les grecs (certainement les Pythagoriciens à la fin du cinquième siècle avant J.C.) qui démontrèrent que deux grandeurs pouvaient être incommensurables : ici 1 et $\sqrt{2}$ ne peuvent pas être des multiples entiers d'un même nombre.