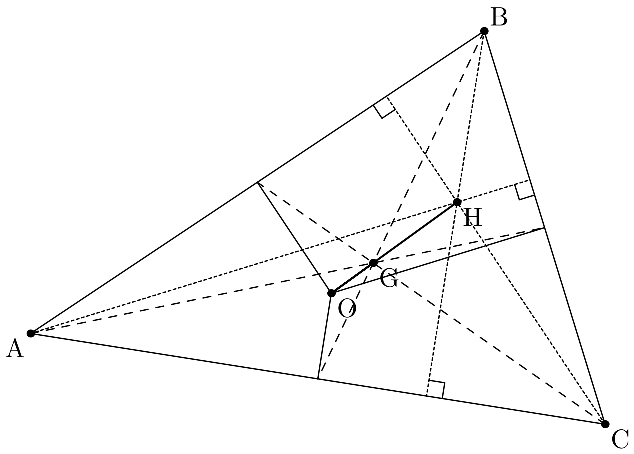
Arnaud Bodin
Université de Lille 1

Capes
2009-2010

Droite d'Euler

Théorème. *Dans un triangle quelconque le centre O du cercle circonscrit, le centre de gravité G et l'horthocentre H sont alignés. De plus ces points vérifient la relation :*

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$



Démonstration. Soit ABC le triangle. On considère que nous sommes dans le plan et que les coordonnées sont données par les nombres complexes. On place l'origine en O (qui est donc maintenant d'affixe 0). On note $a, b, c, \ldots$ les affixes correspondant à $A, B, C, \ldots$.
Remarquons d'abord que G est l'isobarycentre de A, B, C donc d'affixe

$$g = \frac{a+b+c}{3}.$$

Comme O est le centre du cercle circonscrit à ABC alors

$$|a| = |b| = |c|.$$

Il s'agit donc de montrer que l'affixe de H est $a+b+c$. Pour l'instant appelons ce nombre $h' = a + b + c$.

Nous allons vérifier que le point d'affixe h' appartient aux trois hauteurs (deux suffisent si l'on admet que les trois hauteurs sont concourantes, sinon cela en redonne un démonstration).
Dire qu'un point M d'affixe z appartient à la hauteur du triangle ABC issue de A c'est avoir
$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} (\operatorname{mod} \pi).$$
En termes de nombres complexes cela donne :

$$\begin{aligned} M \text{ appartient à la hauteur issue de } A \quad &\Longleftrightarrow \quad (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} (\operatorname{mod} \pi) \\ &\Longleftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z-a}{c-b}\right) = \frac{\pi}{2} (\operatorname{mod} \pi) \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{z-a}{c-b} \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Or $h' = a + b + c$ vérifie bien cette dernière équation :
$$\begin{aligned} \frac{h'-a}{c-b} &= \frac{b+c}{c-b} \\ &= \frac{(b+c)\overline{(c-b)}}{|c-b|^2} \\ &= \frac{1}{|c-b|^2}(b\bar{c} - \bar{b}c + |c|^2 - |b|^2) \\ &= \frac{1}{|c-b|^2}(b\bar{c} - \bar{b}c) \quad \text{ car } |b| = |c|. \end{aligned}$$

Comme $b\bar{c} - \bar{b}c \in i\mathbb{R}$ alors $\frac{h'-a}{c-b} \in i\mathbb{R}$ donc le point d'affixe h' est bien situé sur la hauteur issue de A. On montrerait de même qu'il appartient à la hauteur issue de B puis de C et donc que ce point est bien l'horthocentre !

Conclusion : le point O est d'affixe 0, le point G d'affixe $\frac{a+b+c}{3}$ et le point H d'affixe $a + b + c$. De ceci il découle que les trois points O, G H sont alignés ainsi que la relation vectorielle recherchée. $\square$

Commentaires "spécial Capes" :
- Prérequis : notion de barycentre ; nombres complexes.
- Il est très facile de visualiser cette propriété avec *Cabri* (sous *TI Voyage 200* par exemple) : c'est un plus certain et ce n'est pas difficile à faire. En plus c'est très convaincant en faisant varier les sommets du triangle de voir que les points O, G, H restent alignés !