# Quelques remarques sur le calcul élémentaire à destination des candidats futurs enseignants

Arnaud Bodin

## Motivations

Ce petit texte est motivé par une visite que j'ai effectuée aux oraux du capes 2009 en tant que visiteur. Lors de la première « planche » à laquelle j'ai assisté, le jury a demandé au candidat d'effectuer une division (c'était 645/16), j'ai cru que le jury se moquait du candidat (qui avait présenté juste avant une bonne leçon). Mais le candidat a eu du mal à l'effectuer au tableau. Les autres « planches » ont malheureusement confirmé la situation, le jury pose des calculs (exemple réel : $\frac{3}{20}+\frac{3}{16}$) et le candidat se plante.

Le jury de capes cherche à voir votre niveau de connaissances en math, il veut bien passer l'éponge sur une ou deux bêtises. Mais si vous épuisez votre crédibilité avec les calculs et l'orthographe[1] c'est dommage. N'oubliez pas qu'il s'agit d'un concours pour recruter des profs et un membre du jury a dit : « *si vous calculez moins bien que les élèves, vous perdez toute crédibilité.* »

Lisez donc ce qui suit : un membre du jury remercie le candidat et conclut gentiment (en sous-entendant donc que le candidat aurait son concours) que pour préparer la rentrée, il doit « *acheter un cahier de vacances de CM1 pour l'orthographe et le calcul.* » Il vous reste moins d'un an pour que ceci ne vous arrive pas !

## 1 Les multiplications

**Connaître ses tables jusqu'à $10 \times 10$ !**

Cela semble une évidence (c'est du programme de CE2), mais ce n'est pas le cas d'une grande partie des candidats le jour de l'oral du capes. Petit florilège de choses vues à l'oral du concours : lors d'un calcul de fraction, le candidat écrit $6 \times 8 = 64$, le jury proteste un peu et le candidat met un peu de temps à corriger ! Bien sûr le jour du concours, le stress fait perdre ses moyens mais il doit y avoir des réflexes. Et que dire du candidat qui était bloqué devant $4 \times 7$. Après trente secondes (c'est parfois très long trente secondes !) le jury a gentiment donné la réponse...

[1] L'orthographe est à soigner au même titre que le calcul ; éviter les « parmis », « contrère » et les inombrables fautes d'accords vues au cours de si peu de planches. Il faut connaître la conjuguaison des verbes *dire*, *définir*, *conclure*, *résoudre*.

Soyons maintenant plus constructifs ! Tout d'abord en tant que futurs profs vous serez souvent amenés à justifier pourquoi on fait telle ou telle chose : À quoi cela sert d'apprendre sa table de multiplication ? Que repondriez-vous aux élèves ? Une question à laquelle vous devez aussi savoir répondre à un élève de sixième : Qu'est-ce qu'une multiplication ? Que diriez-vous pour les entiers, pour les nombres à virgules ?
Comment apprendre les tables de multiplications ? Réponse : par cœur[2] !
Voici quelques astuces pour vos futurs élèves qui auraient du mal :
- La table de 9 est rigolote : on trouve 18, 27, 36, 45 | 54, 63, 72, 81. Si on lit 18 de droite à gauche on trouve 81, pour 27 on trouve 72, ...
- On peut aussi voir $9 = 10 - 1$, voir plus loin.
- Il existe des calculs pour trouver les résultats des multiplications des nombres compris entre 5 et 10 à l'aide de ses doigts.[3]

Voici en vrac des commentaires et questions de tout genre :
- Multiplier par 10 est très facile. Pourquoi ? Et d'ailleurs pourquoi 10 ?
- Comment facilement multiplier par 11 ? Que pensez-vous de la méthode souvent enseignée pour multiplier un nombre à deux chiffres par 11 (on intercale la somme de deux chiffres au milieu) : est-ce un moyen efficace ou une astuce qui pertube les élèves ?
- Quelle multiplication est facile pour un ordinateur ? Comment fait-il une multiplication par 6. Combien d'opérations élémentaires lui faut-il ?
- Multiplier par 4, c'est faire multiplier par 2 et encore par 2.
- Multiplier par 5 c'est multiplier par 10 et diviser par 2.
- Multiplier par 15 c'est... et par $1,5$ c'est ....
- Il y a une méthode rapide pour multiplier deux nombres compris entre 10 et 20. Voyons sur un exemple[4] $16 \times 12$ : Prenez 16 ajoutez le chiffre des unités de 12, obtenez 18, on mutliplie par 10 pour obtenir 180, ajouter alors le produit des chiffres des unités $+6 \times 2$ donc le résultat est 192. Une fois assimilé c'est extrêmement rapide. Justifiez pourquoi cela marche.
- Profitez-en pour apprendre le carré de tous les entiers jusqu'à 20.
- Les ordinateurs ne calculent pas comme nous, indépendamment du fait qu'il calculent en base 2 ; la méthode la plus rapide pour multiplier deux grands entiers n'est pas de « poser » la multiplication mais par exemple d'utiliser la « transformée de Fourier rapide ».[5]
- Il faut aussi savoir bien placer les virgules : exemple réel qui a causé de gros problèmes à une candidate : $0,34 \times 75$.

Pour finir, maintenant que vous connaissez les carrés des entiers jusqu'à 20, vous devez pouvoir calculer de tête la partie entière des racines carrées de tous les entiers jusqu'à 400. Il est aussi de bon ton de savoir extraire une racine carrée à la main.[6] C'est un excellent entraînement au calcul, cela peut servir si vous êtes perdu sur une île déserte et accessoirement cela peut impressionner le jury.

[2] Jusqu'à 20-25 ans l'apprentissage par cœur est très efficace, après il faut privilégier d'autres méthodes.
[3] Voir `http://www.momes.net/education/nombres/fois9/foisneuf.htm`
[4] `http://www.youtube.com/watch?v=w6e2V49B2jw`
[5] Voir par exemple `http://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_de_multiplication`. Des recherches actives ont lieu dans ce domaine.
[6] Voir `http://pagesperso-orange.fr/therese.eveilleau/`, rubrique « Trucs ».

# 2 Division

## 2.1 Critères de divisibilité

Vous connaissez bien sûr les critères de divisibilité pour 2, 3, 5, 9, 10.
Pourquoi le critère de divisibilité modulo 9 fonctionne ? Vous devez aussi connaître l'utilité du critère de divisibilité avec la fameuse *preuve par neuf* qui est maintenant tombée en désuétude. Pour « vérifier » si une opération est correcte, on réduit modulo 9 avant et après calcul, le résultat devant être le même. Exemple : on calcule $123 \times 456$ et on trouve 56 188. La *preuve par neuf* consiste à calculer $123 \times 456$ modulo 9 (c'est très facile car c'est la somme de chiffres modulo 9 de 123 –donc 6– par la somme de chiffres de 456 modulo 9 –donc 6 aussi–) on trouve 0 ($6 \times 6$ modulo 9), par contre pour 56 188 on trouve 1, donc nous sommes sûrs que le calcul est faux. On recommence et on trouve 56088 (qui lui vaut bien 0 modulo 9).
D'après vous : ce critère fonctionne-t'il toujours ? Si non, quel est le pourcentage d'échec du critère ? À quelle difficulté majeure peut-être confronté un élève ? Faites le lien avec la notion de « si et seulement si ».

Autant ne pas savoir des choses basiques comme le calcul va decevoir le jury, autant lui présenter un truc rigolo qu'il ne connait pas va le marquer positivement. Voici un critère de divisibilité par 7 assez peu connu et qui épatera peut-être le jury.
Vous voulez savoir si 1232 est divisible par 7, prenez le dernier chiffre – ici 2– doublez-le, et soustrayez-le au nombre formé par les autres chiffres : on fait donc $123 - 4$. On trouve 119 et on recommence : $11 - 2 \times 9 = -7$. Si à la fin on obtient un nombre divisible par 7 (y compris 0) alors le nombre initial 1232 est divisible par 7. Bilan 1232 est divisible par 7.
Autre exemple : 86 415 est divisible par 7 : les étapes sont $8\,641 - 2 \times 5 = 8\,631$, puis $863 - 2 \times 1 = 861$, puis $86 - 2 \times 1 = 84$ et enfin $8 - 2 \times 4 = 0$ qui est bien divisble par 7. Comme exercice : justifiez le critère.[7]
Il existe des critère de divisibilité pour 11, 13, … mais ils sont moins utiles et plus compliqués.
Il faut savoir appliquer ces critères de divisibilité au calcul mental du pgcd (ou ppcm) de deux nombres (exemple concret de l'oral du capes pour le ppcm de 20 et 16 où le candidat a dû écrire la décomposition en facteurs premiers afin de trouver la réponse !)

## 2.2 Division

Il faut savoir poser une bonne vieille division : soit euclidienne (c'est-à-dire avec reste), soit avec virgule. Savoir le nom de termes utilisés : le *dividende* égal le produit du *diviseur* par le *quotient* plus le *reste*.[8]
Il faut aussi savoir faire du calcul approché : le jury demande la valeur approchée de $\frac{48}{215}$ sans calculs.

[7] Attention, contrairement à la réduction modulo 9, ici le nombre initial et le nombre final ne sont pas égaux modulo 7 (sauf dans le cas de 0). Exemple la transformation appliquée à 31 donne $3 - 2 \times 1 = 1$ mais 31 n'est pas égal à 1 modulo 7.

[8] Jamais je n'aurais osé écrire tout cela avant d'assister aux oraux !

## 2.3 Un tour de magie

Terminons par un tour de magie[9] pour épater vos amis, votre famille ou le jury. Demandez à une première personne A de choisir un nombre à trois chiffres et de répéter ce nombre afin d'obtenir un nombre à six chiffres (par exemple 394 394) et de l'inscrire sur un papier (vous ne savez pas quel est le nombre). Le papier est passé à une personne B à qui vous demandez de diviser le nombre par 7 et d'inscrire le résultat sur un autre papier. Vous ajoutez « ne vous préocuppez pas du reste, cela tombe juste » (ici 394 394 divisé par 7 donne 56 342). Sans rien dire, il passe la papier à une personne C à laquelle vous demandez de diviser le résultat précédent par 11. Encore une fois, cela tombe juste (ici $56\,342/11 = 5\,122$). Puis une dernière personne D doit diviser par 13 ($5\,122/13 = 394$). La personne D vous rend le papier plié, à aucun moment vous n'avez vu ou entendu le nombre choisi ou ceux calculés. Sans ouvrir le papier, vous le tendez à A en disant à son grand étonnement « Ouvrez le papier, et vous trouverez votre nombre inital à trois chiffres ! »
À vous d'expliquer ce tour ! !

# 3 Conclusion

Entraînez-vous tout au long de l'année au calcul et en particulier au calcul mental[10] : oubliez votre calculatrice pour les calculs les plus simples (addition, soustraction, multiplication, division, y compris avec des virgules) ; calculez le prix de vos deux croissants et d'une baguette avant la boulangère[11] ; estimez le prix de votre panier de course à trois euros près,. . .

Pensez que les capacités du cerveau humain sont incroyables : certaines personnes peuvent calculer de tête la racine treizième (c'est-à-dire $\sqrt[13]{n}$) de

$$n = 2928811583487520106055356735278365212219650202093\,7139284255100861526696334642225877703082797393040 53$$

en moins de quinze secondes.[12] D'autres mémorisent les 100 000 premières décimales de $\pi$.
Pour votre futur métier de prof, vous trouverez des activités diverses ici[13] ou là[14] ce qui permettra aussi de vous entraîner.
Pour finir, enrichissez votre culture sur l'aspect éducatif du calcul.[15]

[9] Tiré de Martin Gardner, *Origami, Eleusis and the Soma cube*.
[10] D'ailleurs en sixième, le calcul mental doit occuper cinq minutes par heures de cours.
[11] Expliquez aussi comment la boulangère rend la monnaie sans faire de soustractions compliquées.
[12] http://fr.wikipedia.org/wiki/Racine_treizième_d'un_nombre_de_100_chiffres
[13] Exemple : http://www.automaths.com/
[14] Exemple : http://www.ac-orleans-tours.fr/maths-2/college/calcul-mental/calc-ment.html
[15] Exemple : http://membres.lycos.fr/samy/debarle/memo_calcul_mental.htm