Arnaud Bodin
Université de Lille 1

Capes
2009-2010

Un théorème de Boole

Théorème. *Pour un fonction f intégrable alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\frac{1}{t})\,dt.$$

Démonstration.
Premier changement de variable.
On pose $\phi(u) = u - \frac{1}{u}$, pour $u \in]0,+\infty[$. Cela définit un fonction de classe C^1 : $\phi :]0,+\infty[\to]-\infty,+\infty[$ qui est bijective, la réciproque étant aussi de classe C^1.
Le changement de variable $t = \phi(u)$, $dt = (1+\frac{1}{u^2})du$ donne donc :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt &= \int_{0}^{+\infty} f(u-\frac{1}{u})(1+\frac{1}{u^2})\,du \\ &= \int_{0}^{+\infty} f(u-\frac{1}{u})du + \int_{0}^{+\infty} f(u-\frac{1}{u})\frac{1}{u^2}\,du \\ &= I_+ + I_-\end{aligned}$$

Remarquons que en changeant la notation de la variable u en t nous obtenons que $I_+ = \int_0^{+\infty} f(t-\frac{1}{t})dt$ correspond à la “moitié” (i.e. les t positifs) de l'intégrale que l'on souhaite calculer. Il nous reste donc l'intégrale I_- à calculer.

Second changement de variable.
Nous avons $I_- = \int_0^{+\infty} f(u-\frac{1}{u})\frac{1}{u^2}\,du$ le changement de variable $v = -\frac{1}{u}$, $dv = \frac{1}{u^2}du$ donne l'égalité suivante :

$$I_- = \int_{0}^{+\infty} f(u-\frac{1}{u})\frac{1}{u^2}\,du = \int_{-\infty}^{0} f(-\frac{1}{v}+v)\,dv$$

Autrement dit

$$I_- = \int_{-\infty}^{0} f(t-\frac{1}{t})\,dt.$$

L'intégrale I_- correspond bien à l'autre "moitié" (les t négatifs) de l'intégrale de départ.
Bilan :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t-\frac{1}{t})\,dt + \int_{-\infty}^{0} f(t-\frac{1}{t})\,dt.$$

Ce qui est exactement ce qui était demandé ! $\square$

Commentaires "spécial Capes" :

1. Attention la démonstration, bien que correcte, n'est pas présentable en l'état à l'oral du Capes ! Vous devez la rédiger vous même en tenant compte des remarques suivantes.
2. Il faut définir la notion "f est intégrable", je vous déconseille vivement de parler de l'intégrale de Lebesgue au Capes. Voici une définition possible pour "f est intégrable sur $\mathbb{R}$" : f est continue (sauf éventuellement en un nombre fini de points) et il existe une constante $C \geq 0$ et une borne $M > 0$ tel que (si $|x| > M$ alors $|f(x)| \leq \frac{1}{|x^2|}$. Il n'est pas très dur de dire qu'alors l'intégrale de Riemann $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ existe et a une valeur finie, et que si $t \mapsto f(t)$ est intégrable alors $t \mapsto f(t-1/t)$ l'est aussi.
3. Il faut vous attendre aux questions suivantes : "Que signifie $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$?". Il faut revenir à la définition : si les deux intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ existent alors on note $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt := \int_0^{+\infty} f(t)\,dt + \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$. La question suivante sera donc : "Qu'est ce que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$?". Encore une fois on revient à la définition : si $\lim_{M\to+\infty} \int_0^{M} f(t)\,dt$ existe, elle est notée $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.
4. Le point précédent donne une autre façon de rédiger la démonstration, qui lève tout ambiguïté. Vous fixez $m, M \in \mathbb{R}$, partez de $\int_m^M f(t)\,dt$, faîtes les changements de variables de la démonstration. À la fin vous fixez $m = 0$ et faîtes $M \to +\infty$, puis fixez $M = 0$ et faîtes $m \to -\infty$, additionnez pour obtenir l'égalité cherchée.

   Avantages : vous n'avez pas parlé d'intégrales indéfinies avant la dernière ligne de la démo. En particulier vous faîtes vos changements de variables sur un bon vieil intervalle fermé borné ! Vous pouvez même vous passez de la notion d'"intégrable" en disant que si les deux membres de l'égalité du théorème existent alors ils sont égaux. Inconvénients : les bornes d'intégration nécessitent un petit calcul et la démonstration est un peu alourdie.