Fonctions holomorphes

Table des matières

1 Fonctions holomorphes

Exercice 1 1. Montrer que $u(x,y) = e^{-x}(x\sin y - y\cos y)$ est harmonique.

2. Déterminer v telle que $f = u + iv$ soit holomorphe.
3. Ecrire la fonction f trouvée ci-dessus comme fonction d'une variable complexe.

Exercice 2 Montrer que

$$f(x+iy) = x^2 + iy^3$$

n'est holomorphe en aucun point bien que les equations de Cauchy-Riemann soient vérifiées à l'origine, même sur une parabole que l'on précisera.

Exercice 3 Etude de l'exponentielle complexe $f(z) = e^z$ et du logarithme complexe.

1. Décrire l'image d'une droite $y = c$, c étant une constante, par rapport à f.
2. Décrire l'image d'une droite $x = c$, c étant une constante, par rapport à f.
3. Vérifier que la restriction de f au domaine

$$W = \{z = x + iy; |y| < \pi\}$$

est une bijection de W sur

$$D = \mathbb{C} \setminus \{z; z = -x,\ x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}.$$

4. En déduire l'existence d'une fonction complexe unique Φ, avec domaine de définition $D_\Phi = D$, de sorte que

$$e^{\Phi(z)} = z, \quad |\mathrm{Im}\Phi(z)| < \pi.$$

Cette fonction est appelée *détermination principale* du logarithme, notée Log ; en utilisant un peu plus de théorie on montre qu'elle est holomorphe, avec $\mathrm{Log}'(z) = \frac{1}{z}$.

Exercice 4 Vérifier que, pour tout nombre complexe z avec $|z| < 1$, on a

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots .$$

Exercice 5 Développer en série entière $\sin z$ et $\cos z$.

Exercice 6 Vérifier que

$$\mathrm{Arctg} w = w - \frac{w^3}{3} + \frac{w^5}{5} - \frac{w^7}{7} + \ldots$$

dans un domaine de convergence que l'on précisera.

Exercice 7 Evaluer

$$\int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz$$

1. le long de la parabole $y = x^2$, $1 \leqslant x \leqslant 2$;
2. le long du segment de droite $(1+i), (2+4i)$;
3. le long des segments $(1+i), (2+i)$ et $(2+i), (2+4i)$.

2 Singularités et résidus

Exercice 8 1. Démontrer que

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & n = 1, \\ 0 & n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

γ étant une courbe fermée simple ayant a dans son intérieur et orientée positivement.

2. Quelle est la valeur de l'intégrale si $n = 0, -1, -2, \ldots$?

Exercice 9 Evaluer

$$\int_\gamma \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} dz$$

où γ est une courbe fermée simple quelconque entourant $z = 1$ et orientée positivement.

Exercice 10 Evaluer

(a)

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z - \pi} dz,$$

(b)

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+1)} dz,$$

où

(i) γ est le cercle positif $\{z; |z-1| = 3\}$,

(ii) γ est le cercle positif $\{z; |z-1| = 2.1\}$.

Exercice 11 Evaluer

1. $$\int_\gamma \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz,$$

2. $$\int_\gamma \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz,$$

où γ est le cercle positif $\{z; |z| = 3\}$.

Exercice 12 Démontrer que

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \vartheta d\vartheta = 2\pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots.$$

Exercice 13 Localiser les singularités de chacune des fonctions suivantes et les caractériser.

1. $\frac{z^2}{(z+1)^3}$,
2. $\frac{2z^3 - z + 1}{(z-4)^2(z-i)(z-1+2i)}$,
3. $\frac{\sin mz}{z^2+2z+2}$,
4. $\frac{1-\cos z}{z}$,
5. $e^{-\frac{1}{(z-1)^2}}$,

Exercice 14 Trouver les séries de Laurent par rapport aux singularités indiquées pour chacune des fonctions suivantes. Caractériser la singularité dans chaque cas et donner le domaine de convergence de chaque série.

1. $\frac{e^z}{(z-1)^2}$, $\quad z = 1$,
2. $z \cos \frac{1}{z}$, $\quad z = 0$,
3. $\frac{\sin z}{z-\pi}$, $\quad z = \pi$,
4. $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$, $\quad z = -1$.

Exercice 15 Déterminer les résidus de chacune des fonctions suivantes, au pôle indiqué.

1. $\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$, $\quad z = 2, \; z = i, \; z = -i$,
2. $\frac{1}{z(z+2)^3}$, $\quad z = 0, \; z = -2$,
3. $\frac{ze^{zt}}{(z-3)^2}$, $\quad z = 3$,
4. $\text{cotg} z$, $\quad z = -5\pi$.

Exercice 16 Trouver les séries de Laurent de $\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$ par rapport à ses poles.

Exercice 17 Evaluer

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2} dz$$

où γ est le cercle positif donné par

1. $|z| = \frac{3}{2}$,
2. $|z| = 10$.

Exercice 18 Evaluer
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\sin\theta}.$$

Exercice 19 Etude de la fonction holomorphe $f(z) = \cos z$.

1. Trouver l'image d'une droite $x = c$.
2. Trouver l'image d'une droite $y = c$.
3. Trouver un ouvert maximal U tel que le restriction de f à cet ouvert soit injective.
4. Trouver un domaine de définition maximal pour la fonction réciproque, arccos.
5. Vérifier que parmi les branches de arccos il y en a deux qui s'écrivent sous la forme $\arccos(w) = \pm i\mathrm{Log}(w + \sqrt{w^2-1})$.
6. Trouver toutes les branches de la fonction arccos.

Exercice 20 Vérifier que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{7\pi}{50}.$$

Exercice 21 Déterminer les singularités de la fonction $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{\sin z}$ et les classer.

Exercice 22 Démontrer que

1. $\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s}$
2. $\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$
3. $\mathcal{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a}$
4. $\mathcal{L}(\sin at)(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$
5. $\mathcal{L}(\cos at)(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$
6. $$\mathcal{L}(U_a)(s) = \frac{e^{-as}}{s},\ \text{où } U_a(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant a, \\ 0, & t < a, \end{cases} a \in \mathbb{R}, a \geqslant 0.$$

Préciser les domaines de définition de ces transformées de Laplace.

3 Transformée de Laplace

Exercice 23 Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes, où a, b, A, T sont des nombres réels positifs.

1. $f(t) = \begin{cases} \frac{A}{a}t, & 0 \leqslant t \leqslant a \\ A, & t \geqslant a \end{cases}$
2. $f(t) = \begin{cases} nA, & \text{pour } (n-1)T \leqslant t < nT,\ \text{où } n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1,\ \text{c.a.d} \\ A, & 0 \leqslant t < T \\ 2A, & T \leqslant t < 2T,\ \text{etc.} \end{cases}$
3. $f(t) = \begin{cases} \frac{4A}{T}t, & 0 \leqslant t < \frac{T}{4} \\ -\frac{4A}{T}t + 2A, & \frac{T}{4} \leqslant t < \frac{3}{4}T \\ \frac{4A}{T}t - 4A, & \frac{3}{4}T \leqslant t < T \\ 0, & t \geqslant T \end{cases}$

4. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < a \\ A, & a \leqslant t < a+b \\ -A, & a+b \leqslant t < a+2b \\ 0, & t \geqslant a+2b \end{cases}$

Exercice 24 La transformée de Laplace de la “fonction” impulsion de Dirac : Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$F_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases}.$$

1. Trouver $\mathcal{L}(F_\varepsilon)$.
2. Montrer que $\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{L}(F_\varepsilon) = 1$.

Exercice 25 Calculer la transformée de Laplace de la fonction F où $a, b, \omega, k \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$:

1. $F(t) = a \sin \omega t$,
2. $F(t) = a(1 - e^{-bt})$,
3. $F(t) = a \cos(bt - k)$. N.B. Ici la formule qui exprime la transformée de Laplace de la fonction $G(t) = \begin{cases} F(t-a), & t \geqslant a, \\ 0, & t < a, \end{cases}$ en fonction de celle de F ne s'applique pas à (3). Pourquoi pas ?

Exercice 26 Vérifier les propriétés suivantes de la transformation de Laplace $\mathcal{L}$:

1. $\mathcal{L}(c_1F_1 + c_2F_2) = c_1\mathcal{L}(F_1) + c_2\mathcal{L}(F_2)$.
2. $\mathcal{L}(e^{at}F(t))(s) = (\mathcal{L}F)(s-a)$.
3. Pour $G(t) = \begin{cases} F(t-a), & t \geqslant a, \\ 0, & t \leqslant a, \end{cases}$ on a $(\mathcal{L}G)(s) = e^{-as}(\mathcal{L}F)(s)$ $(a \geqslant 0)$.
4. Pour $F_a(t) = F(at)$ on a $(\mathcal{L}F_a)(s) = \frac{1}{a}(\mathcal{L}F)(\frac{s}{a})$.
5. Pour $G(t) = \int_0^t F(u)du$ on a $(\mathcal{L}G)(s) = \frac{(\mathcal{L}F)(s)}{s}$.
6. $\mathcal{L}(t^nF(t)) = (-1)^n(\mathcal{L}F)^{(n)}$
7. Si $\lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{t}$ existe, $\mathcal{L}(\frac{F(t)}{t})(s) = \int_s^\infty (\mathcal{L}F)(\zeta)d\zeta$.
8. Si F est périodique, $F(t+T) = F(t)$, alors
$$(\mathcal{L}F)(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T F(t)e^{-st}dt$$
9. $\lim_{s\to+\infty}(\mathcal{L}F)(s) = 0$.
10. $\lim_{s\to+\infty}(\mathcal{L}F)(s) = 0$.
11. $\lim_{t\to 0, t>0} F(t) = \lim_{s\to\infty} s(\mathcal{L}F)(s)$ si les limites indiquées existent (Théorème de la valeur initiale).
12. $\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} s(\mathcal{L}F)(s)$ si les limites indiquées existent (Théorème de la valeur finale).

Exercice 27 Trouver toutes les solutions Y de l'équation différentielle

$$tY'' + 2Y' + tY = 0, \quad Y(0) = 1,$$

définies sur la droite réelle entière (i. e. $D_Y = \mathbb{R}$).

4 Transformée de Fourier

Exercice 28 Etudier la convergence des séries

$$\sum_1^\infty \frac{\cos nx}{n^2}, \quad \sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n^2}, \quad \sum_1^\infty \frac{e^{inx}}{n!}.$$

Exercice 29 Calculer les coefficients de Fourier de la fonction périodique f, définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \pi - |x|, \quad |x| \leqslant \pi.$$

Etudier la convergence de la série de Fourier qui en résulte ; est-elle absolue ou peut-être uniforme ? En déduire la valeur de $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$.

Exercice 30

1. Trouver les coefficients de Fourier en sin et cos de la fonction périodique F, donnée sur $]-5,5[\setminus\{0\}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -5 < x < 0 \\ 3, & 0 < x < 5 \end{cases}.$$

2. Vérifier que F satisfait aux conditions de Dirichlet. Comment doit F être définie en $x = -5, 0, 5$ pour que sa série de Fourier converge vers $F(x)$ pour tout $x \in [-5,5]$?

Exercice 31 Développer la fonction périodique F, donnée sur $]-2,2[$ par $F(x) = x$ (fonction en dents de scie), en série trigonométrique.

Exercice 32

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction porte symétrique

$$f(x) = \begin{cases} A, & -\frac{\tau}{2} < x < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\tau}{2} \end{cases}.$$

2. Vérifier que f satisfait aux conditions de Dirichlet. Comment doit f être définie en $x = \pm\frac{\tau}{2}$ pour que l'intégrale de Fourier converge vers $f(x)$ pour tout x ?

Exercice 33

1. Utiliser les résultats de l'exercice 32 pour évaluer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\lambda \cos b\lambda}{\lambda} d\lambda.$$

2. En déduire la valeur de $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du$.

Exercice 34

1. Trouver la transformée de Fourier en cosinus de $f(x) = e^{-m|x|}, \ m > 0$.
2. Utiliser le résultat de (1) pour montrer que, pour $p > 0, \ \beta > 0$,

$$\int_0^\infty \frac{\cos pv}{v^2 + \beta^2} dv = \frac{\pi}{2\beta} e^{-p\beta}.$$

Exercice 35 Trouver une fonction f de sorte que l'équation intégrale suivante soit vérifiée :

$$\int_0^\infty f(x) \sin \alpha x dx = \begin{cases} 1 - \alpha, & 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \\ 0, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Exercice 36 Montrer que, pour $x \geqslant 0$,

$$\int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2 + 1} d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-x}.$$

Exercice 37 Evaluer

1. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$,
2. $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$, en appliquant l'identité de Parseval.

5 Transformées de Fourier et de Laplace

Exercice 38 Calculer la transformée inverse de Laplace $\mathcal{L}^{-1}(f)$ pour :

1. $f(s) = \frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}$
2. $f(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$
3. $f(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$
4. $f(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)^2(s^2+4s+5)}$
5. $f(s) = \frac{1}{(s+3)(s+4)}$
6. $f(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)}$
7. $f(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+16}$

Exercice 39 Soient a, x des nombres réels, $0 < x < a$, et posons $f(s) = \frac{\mathrm{sh} sx}{s^2 \mathrm{ch} sa}$. Déterminer $\mathcal{L}^{-1}(f)$.

Exercice 40 Résoudre l'équation différentielle partielle :

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}, \quad 0 \leqslant x < \ell,\ t \geqslant 0,$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$Y(x,0) = 0,\ Y_t(x,0) = 0,\ Y(0,t) = 0,\ Y_x(\ell,t) = \frac{F_0}{E} \text{ (i.e. constant)}$$