Exercices de licence

Les exercices sont de :
Cornélia Drutu (algèbre et théorie des nombres)
Volker Mayer (topologie, analyse réelle)
Leonid Potyagailo (algèbre et géométrie)
Martine Queffélec (analyse réelle, analyse complexe)

Les sujets d'examens sont de :
Anne-Marie Chollet (variable complexe : VC)
Gijs Tuynman (analyse réelle et complexe : AR et ARC)

Table des matières

Première partie
Topologie

1 Notions de topologie I

1.1 Rappels

Exercice 1
1. Rappeler les définitions d'une borne supérieure (inférieure) d'un ensemble de nombres réels. Si A et B sont deux ensembles bornés de $\mathbb{R}$, comparer avec $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$ et $\inf B$ les nombres suivants :
   (i) $\sup(A+B)$, (ii) $\sup(A\cup B)$, (iii) $\sup(A\cap B)$, (iv) $\inf(A\cup B)$, (v) $\inf(A\cap B)$.
2. Pour $x\in\mathbb{R}^n$ et $A\subset\mathbb{R}^n$ on définit $d(x,A)=\inf_{a\in A}||x-a||$. Trouver $d(0,\mathbb{R}-Q)$, $d(\sqrt{2},\mathbb{Q})$, $d(M,\mathcal{D})$ où $M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{D}$ est la droite de vecteur unitaire (a,b,c).
3. Pour $A,B\subset\mathbb{R}^n$ on définit $d(A,B)=\inf_{a\in A,b\in B}||a-b||$. Trouver $d(A,B)$ lorsque A est une branche de l'hyperbole $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ xy=1\}$ et B une asymptote.
4. On définit $\operatorname{diam}A=\sup_{a,b\in A}||a-b||$. Quel est $\operatorname{diam}([0,1]\cap\mathbb{Q})$? $\operatorname{diam}([0,1]\cap\mathbb{R}-\mathbb{Q})$?

Exercice 2 Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est union dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints. (*Indication :* si $x\in O$ ouvert, considérer $J_x=\cup$ des intervalles ouverts, $\subset O$ et $\ni x$). Décrire de même les ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3 On va montrer que l'ensemble D des réels de la forme $p+q\sqrt{2}$ où p et q décrivent $\mathbb{Z}$, est dense dans $\mathbb{R}$.
1. Remarquer que D est stable par addition et multiplication.
2. Posons $u=\sqrt{2}-1$; montrer que pour tous $a<b$, on peut trouver $n\geqslant 1$ tel que $0<u^n<b-a$, puis m vérifiant $a<mu^n<b$.
   En déduire le résultat.

1.2 Topologie générale

Exercice 4
1. Soit $X=\{0,1\}$ muni de la famille d'ouverts $\{\emptyset,\{0\},X\}$. Cette topologie est-elle séparée ?
2. Soit X un ensemble non vide. Décrire la topologie dont les singletons forment une base d'ouverts.

3. Décrire la topologie sur $\mathbb{R}$ dont la famille des intervalles fermés forme une base d'ouverts ; même question avec les intervalles ouverts symétriques.
4. Soit X un ensemble infini. Montrer que la famille d'ensembles constituée de l'ensemble vide et des parties de X de complémentaire fini définit une topologie sur X.

Exercice 5 Soit X un espace topologique, et f une application quelconque de X dans un ensemble Y. On dit qu'une partie A de Y est ouverte, si $f^{-1}(A)$ est un ouvert de X. Vérifier qu'on a défini ainsi une topologie sur Y.

Exercice 6 Montrer qu'on peut construire sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une topologie séparée en prenant comme ouverts, les ouverts de $\mathbb{R}$ et les ensembles de la forme $\{x/|x| > a\} \cup \{\infty\}$ où a est réel. Comment construire une topologie séparée sur $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$?

Exercice 7 Soit X un ensemble non vide et Σ une famille de parties de X stable par intersection finie et contenant X. Montrer que la plus petite topologie $\mathcal{T}$ contenant Σ (la topologie engendrée par Σ) est constituée des unions d'ensembles de Σ, ou, de façon équivalente,

$$A \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow \forall x \in A\ \exists S \in \Sigma\ ;\ x \in S \subset A.$$

Montrer que l'on peut affaiblir l'hypothèse de stabilité par intersection finie en :
$(*)$ $\quad \forall S_1, S_2 \in \Sigma,\ \forall x \in S_1 \cap S_2,\ \exists S_3 \in \Sigma\ ;\ x \in S_3 \subset S_1 \cap S_2.$

Exercice 8 Soit C l'ensemble des fonctions continues réelles sur $[0, 1]$. Pour toute $f \in C$ et $\varepsilon > 0$ on définit

$$M(f, \varepsilon) = \{g/ \int_0^1 |f - g| < \varepsilon\}.$$

Montrer que la famille M des ensembles $M(f, \varepsilon)$ lorsque $f \in C$ et $\varepsilon > 0$ est une base de topologie. Même question avec la famille

$$U(f, \varepsilon) = \{g/ \sup_x |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}.$$

Exercice 9 U dans $\mathbb{N}$ est dit ouvert s'il est stable par divisibilité, c.a.d. tout diviseur de $n \in U$ est encore dans U. Montrer qu'on a défini ainsi une topologie sur $\mathbb{N}$ qui n'est pas la topologie discrète.

Exercice 10 On considère dans $\mathbb{N}^*$, la famille de progressions arithmétiques

$$P_{a,b} = \{a + bn/n \in \mathbb{N}^*\},$$

où a et b sont deux entiers premiers entre eux.

1. Montrer que l'intersection de deux telles progressions est soit vide, soit une progression arithmétique de même nature, plus précisément,
$$P_{a,b} \cap P_{a',b'} = P_{\alpha,\beta}$$
où α est le minimum de l'ensemble $P_{a,b} \cap P_{a',b'}$, et $\beta = \text{ppcm}\ (b, b')$.
2. En déduire que cette famille d'ensembles (en y adjoignant $\emptyset$) forme une base de topologie sur $\mathbb{N}^*$ dont on décrira les ouverts.
3. Montrer que cette topologie est séparée.

1.3 Adhérence, intérieur, frontière

Exercice 11
1. Montrer que si B est un ouvert de l'espace topologique X et $A \cap B = \emptyset$, alors $\overline{A} \cap B = \emptyset$, mais que $\overline{A} \cap \overline{B}$ n'est pas nécessairement vide.
2. Montrer à l'aide d'exemples que l'égalité $\overline{\cup_i A_i} = \cup_i \overline{A_i}$ n'a pas lieu en général pour une infinité d'indices.

Exercice 12 Déterminer l'adhérence et l'intérieur des ensembles suivants :
$\mathbb{Q}$; $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ /\ 0 < x < 1, y = 0\}$; $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x = 0\}$ $\{\frac{1}{n}, n \geqslant 1\}$; le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13 Si A est une partie de l'espace topologique X, on pose $\alpha(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$ et $\beta(A) = \overline{\overset{\circ}{A}}$.

1. Montrer que α et β sont des applications croissantes pour l'inclusion de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{P}(X)$.
2. Montrer que si A est ouvert, $A \subset \alpha(A)$ et si A est fermé, $\beta(A) \subset A$. En déduire que $\alpha^2 = \alpha$ et $\beta^2 = \beta$.

3. Construire $A \subset \mathbb{R}$ tel que les cinq ensembles :
   A, $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$, $\alpha(A)$, $\beta(A)$ soient tous distincts.

Exercice 14 Déterminer l'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ du graphe

$$G = \{(x, y)/y = \sin\frac{1}{x}, 0 < x \leqslant 1\}.$$

Exercice 15 Dans un espace topologique, on définit la frontière d'une partie A comme étant $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

1. Montrer que $\partial A = \partial(A^c)$ et que $A = \partial A \iff A$ fermé d'intérieur vide.
2. Montrer que $\partial(\overline{A})$ et $\partial(\overset{\circ}{A})$ sont toutes deux incluses dans ∂A, et donner un exemple où ces inclusions sont strictes.
3. Montrer que $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, et que l'inclusion peut être stricte ; montrer qu'il y a égalité lorsque $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ (établir $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$).
   Montrer que $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ reste vrai lorsque $\partial A \cap \partial B = \emptyset$ (raisonner par l'absurde).

Exercice 16

1. Soit X un espace topologique, et D un sous-ensemble (partout) dense dans X. Montrer qu'il est aussi équivalent de dire
   (i) Le complémentaire de D est d'intérieur vide.
   (ii) Si F est un fermé contenant D, alors $F = X$.
   (iii) D rencontre tout ouvert non vide de X.
   Montrer qu'un ensemble $A \subset X$ rencontre toute partie dense dans X si et seulement si il est d'intérieur non vide.
2. Soit E et G deux ouverts denses dans X ; montrer que $E \cap G$ est encore dense dans X. En déduire que toute intersection dénombrable d'ouverts denses est une intersection décroissante d'ouverts denses.

Exercice 17 Etablir les propriétés suivantes de l'adhérence d'un ensemble dans un espace topologique :

1. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
2. Si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Montrer que la formule $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ n'est pas vraie en général ; montrer que 3. n'est pas vrai en général pour une infinité d'ensembles.

Exercice 18 Etablir l'équivalence entre les propriétés suivantes :

1. $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.
2. $a \in \overset{\circ}{A}$ si et seulement si il existe un voisinage de a entièrement contenu dans A.

Etablir pour l'intérieur d'un ensemble des propriétés analogues à celles de l'exercice 17.

Exercice 19 On rappelle la construction de l'ensemble triadique de Cantor : on part du segment $[0, 1]$ dont on supprime l'intervalle médian $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$; à la deuxième étape, on supprime les intervalles $]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$ et $]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$ etc. On note K_n la réunion des intervalles restants à la n-ième étape, et $K = \bigcap K_n$.Quelle est l'adhérence et l'intérieur de K ?

Exercice 20 Soit X un espace topologique, et D un sous-ensemble dense dans X. Montrer qu'il est aussi équivalent de dire

1. Le complémentaire de D est d'intérieur vide.
2. Si F est un fermé contenant D, alors $F = X$.
3. D rencontre tout ouvert de X.

Montrer qu'un ensemble $A \in X$ rencontre toute partie dense dans X si et seulement si il est d'intérieur non vide.

Exercice 21 Soit E et G deux ouverts denses dans X ; montrer que $E \cap G$ est encore dense dans X.

Exercice 22 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $a > 0$, l'ensemble des x vérifiant $|f(x)| > a$ est fini. Montrer que $\{x/f(x) = 0\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Le vérifier sur l'exemple suivant : on énumère les rationnels $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n, \cdots$ et on pose $f(r_n) = \frac{1}{n}$ si $n \geqslant 1$, $f(x) = 0$ ailleurs.

Exercice 23 Montrer que $\{\sqrt{n} - E(\sqrt{n}), n \geqslant 1\}$ est dense dans $[0, 1]$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

1.4 Espaces métriques, espaces vectoriels normés

Exercice 24 1. Montrer que dans tout espace métrique (E, d) une boule fermée est un fermé, mais que l'adhérence d'une boule ouverte $B(a, r)$ ne coincide pas nécessairement avec la boule fermée $B'(a, r)$ (on pourra considérer dans $(\mathbb{R}^2, ||.||_\infty)$, $E = [0,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0,1]$ et la boule centrée en $(\frac{1}{2}, 0)$ de rayon $1/2$).

2. Montrer que la famille des boules ouvertes de (E, d) vérifie la condition $(*)$ de l'exercice 7.

Exercice 25 $(E, ||.||)$ un evn.

1. Montrer que dans ce cas la boule fermée $B'(a, r)$ est l'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$.
2. Montrer que $\overline{B}(a, r) \subset \overline{B}(b, R) \Longleftrightarrow r \leqslant R$ et $||a - b|| \leqslant R - r$.

Exercice 26 1. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $||(x, y)|| = \max(|x + y|, |x - 2y|)$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}^2$ et dessiner sa boule unité fermée.

2. Soit p, q deux normes sur $\mathbb{R}^n$, B_p et B_q leurs boules unités fermées. Montrer que

$$B_q \subset B_p \Longleftrightarrow p \leqslant q.$$

Que signifie $\frac{1}{2}B_p \subset B_q \subset 2B_p$? Exemples.

Exercice 27 Soit E un ensemble non vide, et $X = E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $x = (x_n)$ d'éléments de E. Pour $x, y \in X$, on pose $p(x, y) = \min\{n / x_n \neq y_n\}$ si $x \neq y$, et ∞ si $x = y$.

1. Montrer que $d(x, y) = \frac{1}{p(x,y)}$ (avec $\frac{1}{\infty} = 0$) est une distance sur X qui vérifie l'inégalité ultramétrique

$$d(x, z) \leqslant \max(d(x, y), d(y, z)).$$

2. Quelles sont les boules ouvertes et les boules fermées pour cette métrique ?

Exercice 28 1. Soit $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et K sa boule unité fermée. Montrer que

(i) K est symétrique,
(ii) K est convexe, fermé, borné,
(iii) 0 est un point intérieur à K.

2. Réciproquement, montrer que si K possède les trois propriétés ci-dessus, il existe une norme dont K soit la boule unité fermée, en considérant

$p(x) = \inf\{a > 0 \ ; \ \frac{x}{a} \in K\}$.

[Exercice corrigé]

Exercice 29 On note $X = l^\infty$ l'espace des suites réelles bornées, et $Y = c_0$ l'espace des suites réelles tendant vers 0, tous deux munis de la métrique (à vérifier) $d(x, y) = \sup_n |x(n) - y(n)|$. Montrer que Y est fermé dans X. Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans Y mais pas dans X.

Exercice 30 Soit $E = \{f \in C^1([0,1], \mathbb{R}) \ ; \ f(0) = 0\}$. On pose

$$||f|| = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) + f'(x)|, \text{ et } N(f) = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)| + \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f'(x)|.$$

Montrer que ce sont deux normes équivalentes sur E.

Exercice 31 Montrer que dans un espace normé, la boule unité est convexe.
Réciproquement, supposons que l'espace vectoriel soit muni d'une application N de E dans $\mathbb{R}^+$ telle que $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$, et telle que $\{y / N(y) \leqslant 1\}$ soit convexe. Montrer que

$$N(x + y) \leqslant 2 \sup(N(x), N(y)), \quad x, y \in E.$$

Exercice 32 On considère dans $\mathbb{R}^2$, les deux applications

$$n((x, y)) = \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|,$$

$$m((x, y)) = \int_0^1 |x + ty| \ dt.$$

1. Montrer que n et m définissent deux normes sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner les boules unités fermées associées, et trouver des constantes effectives A,B, telles que $A\, n((x,y)) \leqslant m((x,y)) \leqslant B\, n((x,y))$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 33 1. On considère dans $\mathbb{R}^2$ les 4 boules euclidiennes fermées de rayon 1 centrées aux points $(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)$; A leur réunion contient 0 comme point intérieur. Trouver le rayon de la plus grande boule ouverte centrée en 0 et contenue dans A.

2. On se pose plus généralement le problème dans $\mathbb{R}^n$: A désigne l'union $\cup_j \overline{B}(e_j,1) \cup_j \overline{B}(-e_j,1)$ où (e_j) est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $x \in A$ si et seulement si $\|x\|_2^2 \leqslant 2\|x\|_\infty$. En déduire que le rayon de la plus grande boule ouverte centrée en 0 et contenue dans A est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

Exercice 34 Soit N un entier $\geqslant 1$, et E, l'espace des polynômes trigonométriques p de degré $\leqslant N$, $p(t) = \sum_{-N}^{N} c_k \exp(ikt)$.
On pose, pour $p \in E$, $\|p\|_\infty = \sup_{t\in[0,2\pi]} |p(t)|$, et $\|p\| = \sum_{-N}^{N} |c_k|$. Montrer, à l'aide de l'identité de Parseval, que ces deux normes vérifient

$$\|p\|_\infty \leqslant \|p\| \leqslant \sqrt{2N+1}\|p\|_\infty.$$

2 Notions de topologie II

2.1 Topologie séparée

Exercice 35 (Espace quasi-séparé) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) $\forall x, y \in X,\ x \neq y,\ \exists V$ voisinage de x ; $y \notin V$.
   (ii) $\forall x \in X,\ \{x\}$ est fermé.
   (iii) $\forall x \in X,\ \cap \{V$; V voisinage de $x\} = \{x\}$.
2. Soit $(X, \mathcal{T})$ ainsi et $A \subset X$ tel que $\overline{A} \neq A$. Montrer que si $x \in \overline{A} \backslash A$, tout voisinage de x coupe A en une infinité de points.

Exercice 36 (Exemple de topologie non séparée) Dans $\mathbb{C}$, on note $[z_0 \to [$ la demi-droite $\{\rho e^{i\theta_0}$; $\rho \geqslant \rho_0\}$, si $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$. On déclare ouvert toute réunion (éventuellement vide) de telles demi-droites.

1. Montrer qu'on a ainsi défini sur $\mathbb{C}$ une topologie $\mathcal{T}$ non séparée.
2. Montrer que l'adhérence du point $\{z_0\}$ pour cette topologie est $[0, z_0]$.
3. En déduire que les fermés de $\mathcal{T}$ sont les ensembles étoilés par rapport à 0 (A est dit "étoilé par rapport à 0" si, pour tout $z \in A$, le segment $[0, z]$ est encore dans A).

[Exercice corrigé]

2.2 Topologie induite, topologie produit

Exercice 37 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé. Montrer que la diagonale Δ de $X \times X$ est fermée dans $X \times X$.

Exercice 38 1. Quels sont les ouverts de $[1,2] \cup \{3\}$ induits par ceux de $\mathbb{R}$?

2. Quelle est la topologie induite sur $\mathbb{Z}$ par celle de $\mathbb{R}$?
3. Quels sont les ouverts du cercle $\Gamma = \{z/|z| = 1\}$? du demi-plan $\{z/ \operatorname{Im} z > 0\}$? du demi-plan $\{z/ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ dans $\mathbb{C}$?

Exercice 39 Soit Y un sous-ensemble de l'espace topologique X, muni de la topologie induite. Décrire les ouverts (fermés) induits de Y lorsque Y est ouvert (fermé).
Soit $A \subset Y$. Montrer que l'adhérence de A dans Y, $\overline{A}^Y = Y \cap \overline{A}$; a-t-on pour l'intérieur de A dans Y, $\overset{\circ}{A}{}^Y = Y \cap \overset{\circ}{A}$?

Exercice 40 On dit qu'un espace topologique X a la propriété (P) si la famille de parties de X qui sont à la fois ouvertes et fermées est une base pour les ouverts de X.

1. Montrer qu'un espace topologique discret a cette propriété.
2. Montrer que la topologie induite sur $\mathbb{Q}$ par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ n'est pas la topologie discrète, mais qu'elle possède aussi la propriété (P).
3. Autre exemple ?

2.3 Fonctions continues sur $\mathbb{R}$

Exercice 41 Soit f une isométrie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'on a soit $f(x) = a - x$, soit $f(x) = a + x$, où $a = f(0)$. (Se ramener à $a = 0$.)

Exercice 42 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. On va montrer que f est soit nulle, soit la fonction identité.

1. Remarquer que $f(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant 0$ et ainsi, que f est croissante.
2. Montrer que pour tout x réel on peut construire une suite (r_k) et une suite (s_k) de rationnels telles que $r_k \uparrow x$ et $s_k \downarrow x$. En déduire le résultat.

Exercice 43 Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que t est une période de f si $f(x+t) = f(x)$ pour tout x réel. Soit E le groupe des périodes de f, supposé non vide et $T = \inf\{t \in E\ ;\ t > 0,\}$.

1. Montrer que si $T = 0$ alors f est constante.
2. Si $T > 0$, f est T-périodique et $E = \mathbb{Z}.T$.

Exercice 44 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ω sa fonction oscillation définie pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$ par

$$\omega(x_0, \delta) = \sup_{\{|x_0 - y| = \delta, |x_0 - z| = \delta\}} |f(y) - f(z)|.$$

1. Remarquer que f est continue en x_0 si et seulement si
$$\omega(x_0) = \inf_{\delta > 0} \omega(x_0, \delta) = 0.$$
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $O_\varepsilon = \{x\ ;\ \omega(x) < \varepsilon\}$ est un ouvert.
En déduire que $C(f)$, l'ensemble des points de continuité de f, est un G_δ.

Exercice 45 Existe-t-il une application continue f de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(x)$ soit rationnel si x est irrationnel, et $f(x)$ irrationnel si x est rationnel ?

Exercice 46 On note pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \mathrm{dist}(x, \mathbb{Z})$.

1. Montrer que la fonction φ est continue, 1-périodique, et étudier la fonction f telle que
$$f(x) = \sum_n \frac{\varphi(2^n x)}{2^n}.$$
2. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$, et on considère les deux suites de terme
$$z_k = \frac{1}{2^k} E(2^k x_0), \quad y_k = z_k + \frac{1}{2^k}.$$
Montrer que la suite (z_k) croît vers x_0 et que la suite (y_k) décroît vers x_0. Calculer $\frac{f(z_k) - f(y_k)}{z_k - y_k}$ et en déduire que f n'est pas dérivable en x_0.
On a ainsi construit une fonction continue, nulle part dérivable.

2.4 Continuité dans les espaces topologiques

Exercice 47 Soit X un ensemble infini muni de la topologie dont les seuls ouverts sont : l'ensemble vide, et les parties de complémentaire fini. Montrer que si Y est un espace séparé, toute application continue de X dans Y est constante.

Exercice 48 Soit X un espace topologique et $f : X \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les ensembles $\{x\ ;\ f(x) < \lambda\}$ et $\{x\ ;\ f(x) > \lambda\}$ sont des ouverts de X.
2. Montrer que si f est continue, pour tout ω ouvert de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\omega)$ est un F_σ ouvert de X (F_σ= réunion dénombrable de fermés).
3. Soit $A \subset X$. A quelle condition $f = \mathbf{1}_A$ est-elle continue sur X ?

Exercice 49 1. Soit C l'espace des fonctions continues réelles sur $[0,1]$ muni de la métrique $d_1(f,g) = \int_0^1 |f-g|\ dx$, puis de la métrique $d_\infty(f,g) = \sup_x |f(x)-g(x)|$. Vérifier que l'application $f \to \int_0^1 |f| dx$ de C dans $\mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne dans les deux cas.

2. Soit c l'espace des suites réelles convergentes, muni de la métrique $d(x,y) = \sup_n |x(n) - y(n)|$. Si on désigne par $l(x)$ la limite de la suite x, montrer que l est une application continue de c dans $\mathbb{R}$. En déduire que c_0 est fermé dans c.

Exercice 50 Soit f, g deux applications continues de X dans Y, espaces topologiques, Y étant séparé.

1. Montrer que $\{f = g\}$ est fermé dans X ; en déduire que si f et g coincident sur une partie dense de X, alors $f = g$.
2. Application : Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(x+y) = f(x)+f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(r) = rf(1)$ pour tout rationnel r et en déduire l'expression de f.

Exercice 51 Soit E et F deux espaces vectoriels normés et on note B_E la boule unité fermée de E. Soit u une application de E dans F telle que
(i) $u(x+y) = u(x) + u(y),\ \forall x, y \in E$.
(ii) $u(B_E)$ est bornée dans F.

1. Calculer $u(rx)$, $x \in E$, r rationnel.
2. Montrer que u est continue en 0, plus précisément :
$$\exists M > 0\ ;\ \forall x \neq 0\ \ ||u(x)|| \leqslant M||x||.$$
3. Montrer que u est continue et linéaire.

Exercice 52 Soit O un ouvert de l'espace topologique produit $X \times Y$. Montrer que pour tout $x \in X$, l'ensemble $A_x = \{y \in Y/(x,y) \in O\}$ est un ouvert de Y. Le vérifier sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/xy > 1,\ x+y < 4\}$.

Exercice 53 Montrer que si f est continue de X dans Y, espaces topologiques, Y étant séparé, son graphe G est fermé dans $X \times Y$. Etudier la réciproque en considérant l'hyperbole équilatère.

Exercice 54 Soit $f : X \to Y$, espaces topologiques. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) f est continue.
(ii) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ pour toute partie B de Y.
(iii) $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{\overline{f^{-1}(B)}}$ pour toute partie B de Y.
En déduire $\partial f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\partial B)$ pour toute partie B de Y.

Exercice 55 Une application de X dans Y est dite *ouverte* si l'image de tout ouvert de X est un ouvert de Y ; *fermée* si l'image de tout fermé de X est un fermé de Y.

1. Montrer qu'une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une application fermée.
2. Montrer que l'application $(x,y) \in X \times Y \to x \in X$ est ouverte mais pas nécessairement fermée (considérer l'hyperbole équilatère de $\mathbb{R}^2$).
3. Montrer que la fonction indicatrice de l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$, comme application de $\mathbb{R}$ dans $\{0,1\}$, est surjective, ouverte, fermée, mais pas continue.
4. Montrer que toute application ouverte de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est monotone.

Exercice 56 1. Montrer que f est continue si et seulement si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour tout A dans X. Que peut-on dire alors de l'image par f d'un ensemble dense dans X ?

2. Montrer que f est fermée si et seulement si $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$, et que f est ouverte si et seulement si $f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{f(A)}$.

Exercice 57 Soit C l'espace des fonctions continues réelles sur $[0,1]$ muni de la métrique $d(f,g) = \int_0^1 |f-g|\ dx$, puis de la métrique $d(f,g) = \sup_x |f(x)-g(x)|$. Vérifier que l'application $f \to \int_0^1 f dx$ de C dans $\mathbb{R}$ est continue dans les deux cas.

Exercice 58 Soit c l'espace des suites réelles convergentes, muni de la métrique $d(x,y) = \sup_n |x(n) - y(n)|$. Si on désigne par $l(x)$ la limite de la suite x, montrer que l est une application continue de c dans $\mathbb{R}$.

Exercice 59 Soit X un ensemble infini muni de la topologie dont les seuls ouverts sont : l'ensemble vide, et les parties de complémentaire fini. Montrer que si Y est un espace séparé, toute application continue de X dans Y est constante.

Exercice 60 Soit X un espace métrique et Y un sous-ensemble de X. Montrer que Y est fermé si et seulement si il existe une application continue $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $Y = \{x/f(x) = 0\}$.

Exercice 61 Soit f une application ouverte de X dans $\mathbb{R}^n$, et A une partie de X. Montrer que pour tout a dans l'intérieur de A,

$$\|f(a)\| < \sup_{x\in A} \|f(x)\|.$$

2.5 Topologie des espaces métriques, normés

Exercice 62 Si A est une partie bornée d'un espace métrique (E, d), on pose $\mathrm{diam}A = \sup_{a,b\in A} d(a, b)$.

1. Montrer que $\mathrm{diam}A = \mathrm{diam}\overline{A}$.
2. Trouver le diamètre de $\{f \in C([0, 1])\ ;\ 0 \leqslant f \leqslant 1\}$; de $\{f \in C([0, 1])\ ;\ 0 \leqslant f \leqslant 1,\ f(0) = 0\}$, C étant muni de la métrique d_1.

Exercice 63 Soit (X, d) un espace métrique ; montrer que l'application $(x, y) \to d(x, y)$ est continue sur le produit $X \times X$.

Exercice 64 Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E ; retrouver les propriétés de la fonction $d_A : x \to d(x, A)$:

1. d_A est 1-lipschitzienne ; $d(x, A) = d(x, \overline{A})$ et $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
2. Montrer que $\{x \in E\ ;\ d(x, A) < \varepsilon\}$ est un ouvert contenant A.
3. Montrer que tout fermé de E est un G_δ et que tout ouvert est un F_σ.

Exercice 65 (Support d'une fonction continue) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un espace topologique E. On appelle support (fermé) de f, $S = S(f) = \overline{\{x \in E\ ;\ f(x) \neq 0\}}$.

1. Montrer que $S = \overline{\mathring{S}}$.
2. Réciproque. On suppose E métrique et $A \subset E$ fermé vérifiant $A = \overline{\mathring{A}}$. Montrer qu'il existe $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $A = S(f)$.

Exercice 66

1. Montrer qu'un espace métrique possède une propriété forte de séparation, à savoir : deux fermés disjoints F_1 et F_2 peuvent être séparés par deux ouverts disjoints, en considérant $\{x/d(x, F_1) > d(x, F_2)\}$.
2. Montrer que la propriété précédente est équivalente à l'existence d'une fonction continue f valant 0 sur F_1 et 1 sur F_2 (considérer $f(x) = \frac{d(x,F_1)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)}$).

Exercice 67 Soit (X, d) un espace métrique avec métrique bornée. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés non vides de X, et on définit pour A et B dans $\mathcal{F}$,

$$\delta(A, B) = \|d_A - d_B\|_\infty$$

où d_A est la fonction bornée $x \to d(x, A)$.
Montrer qu'on a défini ainsi une métrique sur $\mathcal{F}$, et que l'application $a \to \{a\}$ est une isométrie de X dans $\mathcal{F}$.

Exercice 68 Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Vérifier que l'application $(\lambda, x) \to \lambda x$ est continue ; que $(x, y) \to x+y$ est lipschitzienne ainsi que l'application $x \to \|x\|$; et que les translations et les homothéties sont des homéomorphismes de E.
2. Montrer que la boule unité ouverte est homéomorphe à E tout entier (considérer l'application $x \to \frac{x}{1-||x||}$).
3. Montrer que deux boules ouvertes de $(E, ||.||)$ sont homéomorphes entre elles.
4. Montrer que le seul sous-espace ouvert de E est E lui-même, et que tout sous-espace propre est d'intérieur vide dans E.
5. Montrer que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est encore un sous-espace vectoriel ; en déduire qu'un hyperplan de E est fermé ou partout dense dans E.

Exercice 69 (extrait du partiel de décembre 98) Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$ de boule unité fermée $\overline{B}$ et F un sous-espace vectoriel fermé de E. On va montrer que si $F \neq E$,

$$\sup_{x \in \overline{B}} d(x, F) = 1.$$

1. Etablir les propriétés pour $x, x' \in E, y \in F, \lambda \in \mathbb{C}$:
   (i) $d(x, F) \leqslant ||x||$.
   (ii) $d(\lambda x, F) = |\lambda| d(x, F)$.
   (iii) $d(x - y, F) = d(x, F)$
   (iv) $d(x + x', F) \leqslant d(x, F) + d(x', F)$.
2. Soit $x \in \overline{B}$ tel que $\alpha = d(x, F) > 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $y \in F$ tel que :
$$\alpha \leqslant ||x - y|| < \alpha(1 + \varepsilon).$$
3. Montrer qu'il existe $x' \in \overline{B}$ tel que : $\frac{1}{1+\varepsilon} = d(x', F) < 1$.
4. En déduire le résultat.

Exercice 70 Peut-on construire dans $\mathbb{R}$ un ensemble infini, fermé, constitué uniquement d'irrationnels ?

Exercice 71 Montrer que sur $\mathbb{R}^n$, les distances d euclidienne, d_∞ et d_1 définissent la même topologie.

Exercice 72
1. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geqslant 0\}$. Vérifier qu'il est ouvert et qu'il peut s'écrire comme une union dénombrable de fermés (un tel ensemble est dit de type F_σ).
2. Dans $\mathbb{R}^n$, on considère le sous-ensemble des points à coordonnées entières, et le sous-ensemble des points à coordonnées rationnelles. Vérifier que le premier est fermé mais que le second n'est ni ouvert ni fermé.

Exercice 73 Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, muni de la distance $d(A, B) = \max_{i,j} |a_{i,j} - b_{i,j}|$ où $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$.
1. Montrer que l'ensemble des matrices inversibles est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Dans le cas $n = 2$, décider si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés :
   $\mathcal{A}$ = matrices ayant deux valeurs propres distinctes et > 0.
   $\mathcal{B}$ = matrices ayant deux valeurs propres > 0.

Exercice 74 On note X l'espace des suites réelles $x = (x(n))$ et on le munit de la topologie dont les ouverts élémentaires sont
$$V(x; n_1, n_2, \cdots n_k; \varepsilon) = \{y \in X / |x(n_i) - y(n_i)| < \varepsilon,\ i = 1 \cdots k\}.$$
Vérifier qu'on a bien défini une base de topologie.
Comparer la topologie qu'elle engendre sur l^∞ et c_0 avec la topologie métrique de l'exercice précédent.

Exercice 75 Soit X un espace topologique. On considère les propriétés suivantes :
(i) X contient un dénombrable dense.
(ii) la topologie sur X possède une base dénombrable d'ouverts.
Montrer que (ii) implique (i) et que la réciproque a lieu si X est métrisable. Un espace vérifiant (i) est dit séparable.

Exercice 76 Soit X un espace métrique séparable (cf exercice 75), et A une partie quelconque de X. Montrer que A est encore séparable.

2.6 Comparaison de topologies et de métriques

Exercice 77 On considère dans $\mathbb{R}$ les trois topologies $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$, engendrées respectivement par les intervalles de la forme $]a, b[$, $[a, b[$, $[a, b]$, a et b décrivant $\mathbb{R}$. Comparer les topologies, et décrire les fonctions continues de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$; de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_3)$.

Exercice 78 Soit $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux topologies sur X. Montrer que $\mathcal{T}'$ est plus fine que $\mathcal{T}$ ssi $(X, \mathcal{T}') \stackrel{\mathrm{id}}{\to} (X, \mathcal{T})$ est continue. Montrer qu'alors $\overline{A}^{\mathcal{T}'} \subset \overline{A}^{\mathcal{T}}$; quelle inclusion a-t-on entre $\overset{\circ}{A}^{\mathcal{T}'}$ et $\overset{\circ}{A}^{\mathcal{T}}$?

Exercice 79 On désigne par $d(a,b)$ la distance euclidienne usuelle de $a, b \in \mathbb{R}^2$ et on pose

$$\delta(a,b) = \begin{cases} d(a,b) & \text{si } a,b \text{ sont alignés avec l'origine } O \\ d(0,a)+d(0,b) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$ (“distance SNCF”) plus fine que la distance usuelle. Dans la suite, on suppose $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie associée à δ.
2. Soit H le demi-plan $\{(x,y)\ ;\ y>0\}$; déterminer $\overline{H}$.
3. Quelle est la topologie induite sur une droite vectorielle ; sur le cercle unité Γ ?
4. Lesquelles des transformations suivantes sont continues : homothéties de centre O ; rotations de centre O ; translations ?

Exercice 80 1. Montrer que $||f||_\infty = \sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$ et $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$ sont deux normes sur $C([0,1],\mathbb{R})$. Sont-elles équivalentes ?

2. Les deux métriques associées sont-elles topologiquement équivalentes ?

Exercice 81 Comparer sur $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, l'espace des suites de $0-1$, les topologies définies par les distances

$d(x,y) = \dfrac{1}{\min\{n/x_n \neq y_n\}}$ si $x \neq y$, 0 sinon,

et

$\delta(x,y) = \sup_n |x(n) - y(n)|$.

Exercice 82 Soit $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$. Comparer les normes $N_1(f) = ||f||_\infty,\ N_2(f) = ||f||_\infty + ||f||_1,\ N_3(f) = ||f'||_\infty + ||f||_\infty,\ N_3(f) = ||f'||_1 + ||f||_\infty$.

Exercice 83 On se donne une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, et on note d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. A quelles conditions sur f, $\delta(x,y) = d(f(x),f(y))$ définit-elle une distance sur $\mathbb{R}$ équivalente topologiquement à la distance usuelle (ie définissant la même topologie.) ?

Exercice 84 Soit E un ensemble non vide, et $X = E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $x = (x_n)$ d'éléments de E. Pour $x, y \in X$, on pose $p(x,y) = \min\{n/x_n \neq y_n\}$ si $x \neq y$, et ∞ si $x = y$.
Montrer que $d(x,y) = \frac{1}{p(x,y)}$ (avec $\frac{1}{\infty} = 0$) est une distance sur X qui vérifie l'inégalité ultramétrique

$$d(x,z) \leqslant \max(d(x,y), d(y,z)).$$

Exercice 85 On dit qu'une distance est *ultramétrique* si elle vérifie l'inégalité triangulaire renforcée :

$$d(x,z) \leqslant \max(d(x,y), d(y,z)).$$

Etablir les assertions suivantes :

1. Si $d(x,y) \neq d(y,z)$, alors $d(x,z) = \max(d(x,y), d(y,z))$. En déduire que tout triangle dans E est isocèle.
2. Toute boule ouverte $B(x,r)$ est un ensemble à la fois ouvert et fermé, et
$$B(x,r) = B(y,r) \quad \forall y \in B(x,r).$$
3. Toute boule fermée $B'(x,r)$ est un ensemble à la fois ouvert et fermé, et
$$B'(x,r) = B'(y,r) \quad \forall y \in B'(x,r).$$
4. Si deux boules ont un point commun, elles sont emboîtées.

Exercice 86 Soit (X,d) un espace métrique, et soit φ une fonction réelle définie pour $x \geqslant 0$, vérifiant (i) $\varphi(0) = 0$, (ii) φ croissante, (iii) $\varphi(u) > 0$ si $u > 0$, (iv) $\varphi(u+v) \leqslant \varphi(u) + \varphi(v)$.

1. Montrer que $\delta(x,y) = \varphi(d(x,y))$ définit une distance sur X.
2. Vérifier que les fonctions $\varphi_1(u) = \inf(u,1)$, $\varphi_2(u) = \frac{u}{1+u}$, $\varphi_3(u) = \log(1+u)$, et $\varphi_4(u) = u^\alpha$ où $0 < \alpha < 1$ remplissent les conditions (i) (ii) et (iii) ; plus généralement, montrer que toute fonction f strictement croissante, concave, telle que $f(0) = 0$ remplit ces conditions.
3. On suppose de plus que la fonction φ est continue en 0. Montrer que les métriques d et δ sont topologiquement équivalentes.
4. Montrer que $\delta_1 = \varphi_1(d)$ et $\delta_2 = \varphi_2(d)$ sont lipschitz-équivalentes.

Exercice 87 Soit (X,d) un espace métrique avec métrique bornée. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés non vides de X, et on définit pour A et B dans $\mathcal{F}$,

$$\delta(A,B) = \|d_A - d_B\|_\infty$$

où d_A est la fonction bornée $x \to d(x,A)$. Montrer qu'on a défini ainsi une métrique sur $\mathcal{F}$, et que l'application $a \to \{a\}$ est une isométrie de X dans $\mathcal{F}$.

2.7 Suites, limites et valeurs d'adhérence, points d'accumulation et points isolés

Exercice 88 Trouver les valeurs d'adhérence de la suite :
$0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \cdots, 0, \frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}, \cdots, \frac{2^k-1}{2^k}, 1, 0, ...$

Exercice 89 Soit (x_n) une suite d'un espace topologique X séparé ; on note A l'ensemble $\{x_1, x_2, \cdots\}$.

1. Toute valeur d'adhérence a de la suite est un point de $\overline{A}$: donner un exemple où a est un point isolé de A ; un exemple où a est un point d'accumulation dans A ; un exemple où a est un point d'accumulation dans $\overline{A}\backslash A$.
2. Montrer que tout point d'accumulation de A est valeur d'adhérence de la suite.

Exercice 90
1. Soit (u_n) une suite réelle telle que e^{iu_n} et $e^{i\sqrt{2}u_n}$ convergent. Montrer que (u_n) a au plus une valeur d'adhérence.
2. Soit (u_n) une suite réelle telle que e^{itu_n} converge pour $t \in T$ où T est non dénombrable. Même conclusion.

Exercice 91 Soit (u_n) une série positive divergente telle que u_n décroit vers 0 et on pose $A = \{\pm u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n,\ n \geqslant 1\}$. Montrer que $\overline{A} = \mathbb{R}$.

Exercice 92 Soit $\mathbb{R}^n$ considéré comme groupe additif muni de sa topologie usuelle. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose que 0 est isolé dans G. Montrer que tout point est isolé, que G est discret et fermé dans $\mathbb{R}^n$. On se restreint au cas $n = 1$.
2. Montrer qu'alors, G est soit $\{0\}$, soit de la forme $a\mathbb{Z}$, $a > 0$.
3. Montrer que si 0 est point d'accumulation, G est partout dense dans $\mathbb{R}$. En déduire ainsi les sous-groupes fermés de $\mathbb{R}$.
4. On considère $\alpha \notin \mathbb{Q}$; montrer que $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\alpha$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$. En déduire les valeurs d'adhérence de la suite $(e^{2i\pi n\alpha})$.

Exercice 93 Soit dans un espace métrique (X, d) une suite (x_n) telle que les trois sous-suites (x_{2n}), (x_{2n+1}), et (x_{3n}) convergent. Montrer que la suite elle-même converge.

Exercice 94 Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une suite d'un espace métrique (X, d). On suppose que $\lim_{n\to\infty} a_{m,n} = a_m$, et que $\lim_{m\to\infty} a_m = a$. Montrer qu'il existe une sous-suite de la suite initiale (a_{p,n_p}) telle que $\lim_{p\to\infty} a_{p,n_p} = a$.

Exercice 95 Soit (F_n) une suite décroissante de fermés dans un espace topologique X, et soit (x_n) une suite convergente dans X telle que pour chaque n, $x_n \in F_n$. Vérifier que $\lim_{x\to\infty} x_n \in \bigcap F_n$.
Que peut-on dire si la suite de fermés n'est plus décroissante ?

Exercice 96 On va montrer que les polynômes sont denses dans les fonctions continues sur $[-1, 1]$. Pour commencer, on approche la fonction $|t|$.

1. Montrer que la suite de polynômes définis par récurrence :
$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}(t^2 - p_n^2(t)), \quad p_0(t) = 0,$$
converge vers $|t|$.
2. En déduire que toute fonction affine par morceaux sur $[-1, 1]$ est limite d'une suite de polynômes.
3. Montrer que les polynômes sont denses dans les fonctions continues sur $[-1, 1]$.

Exercice 97
1. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite de réels $x_n = (1 + \frac{1}{n}) \sin(n\frac{\pi}{6})$; de la suite $(\frac{1}{m} + \frac{1}{n})_{m\geqslant1,n\geqslant1}$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si α est irrationnel. En déduire l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $x_n = \cos(2\pi n\alpha)$.
(*Indication :* on pourra montrer que tout sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$ est soit $\mathbb{R}$, soit discret, de la forme $a\mathbb{Z}$.)

Exercice 98 On sait que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite réelle est un fermé de $\mathbb{R}$. Montrer que tout fermé de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite réelle : si F est fini, trouver une suite qui prend une infinité de fois chaque valeur de F ; si F est infini, montrer que F contient un dénombrable dense D et trouver une suite qui prend une infinité de fois chaque valeur de D.

Exercice 99 Soit (ε_k) une suite à valeurs dans $\{-1,1\}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (S_n) est un intervalle de $\mathbb{Z}$.

Exercice 100 On considère une suite (x_n) de $[0,1]$ telle que $x_{n+1} - x_n$ tend vers 0.

1. Montrer que l'ensemble A de ses valeurs d'adhérence est un intervalle fermé de $[0,1]$.
2. On suppose de plus que cette suite est une suite récurrente i.e. définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ où f est continue de $[0,1]$ dans lui-même, et un point initial $x_0 \in [0,1]$. Montrer alors que la suite converge (on commencera par remarquer que si $x \in A$, alors $x = f(x)$, et que si $x_m \in A$ pour un indice m, alors la suite converge.)
3. Soit $x = (x_n)$ une suite de l^∞ ; montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite y de terme général $y_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ est un intervalle. En déduire que l'application f de l^∞ dans lui-même qui associe y à x, n'est pas bijective.

3 Notions de topologie III

3.1 Homéomorphisme

Exercice 101

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ (munis de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$) ne sont pas homéomorphes. On peut par ailleurs montrer que deux sous-ensembles dénombrables denses de $\mathbb{R}$ sont toujours homéomorphes.
2. Trouver un homéomorphisme de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$; de $]-1,1[$ sur $]a,b[$.
3. Montrer que si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et c un point n'appartenant pas à I, les ensembles I et $I \cup \{c\}$ ne sont pas homéomorphes bien qu'en bijection.

Exercice 102 Soit f une injection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires que f est strictement monotone.
2. Montrer que l'image par f d'un intervalle ouvert est encore un intervalle ouvert ; en déduire que f est ouverte et donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

Exercice 103 Soit f une application de X dans Y séparé. Montrer que si f est continue, son graphe G est fermé dans $X \times Y$, et l'application $x \to (x, f(x))$ est un homéomorphisme de X sur le graphe G de f.
Montrer sur un exemple que la réciproque est fausse en général (mais vraie si Y est compact).

Exercice 104 Montrer que le carré unité fermé et le disque fermé dans $\mathbb{R}^2$ sont homéomorphes.

Exercice 105 Montrer que la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ tout entier, et que deux boules ouvertes sont homéomorphes entre elles.

Exercice 106 On note $\mathbb{S}^1$ le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$, et h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}^1$: $t \to (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

1. Montrer que le cercle privé d'un point, $\mathbb{S}^1 \backslash \{a\}$, est homéomorphe à l'intervalle $]0,1[$.
2. Montrer que h est une bijection continue de $[0,1[$ sur $\mathbb{S}^1$, mais n'est pas un homéomorphisme.
3. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}^1 \backslash \{a\}$, cette fois plongé dans $\mathbb{C}$. Montrer que f admet un "logarithme continu", c'est-à-dire qu'il existe g continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f = e^{ig}$.

Exercice 107 Soit F l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}^2$ qui à x associe $(\exp(2i\pi x), \exp(2i\pi x\sqrt{2}))$ dont l'image est la courbe γ.

1. Montrer que F est continue injective.
2. Montrer que l'adhérence de γ dans $\mathbb{C}^2$ est $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
3. Montrer que F^{-1} n'est continue en aucun point de γ.

Exercice 108 (Projection stéréographique) Soit $S^{n-1} = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ \|x\|^2 = \sum_1^n x_i^2 = 1\}$, la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, p son pôle nord i.e. le point $p = (0, \cdots, 0, 1)$, et $A = S^{n-1} \backslash \{p\}$.

1. Montrer que le "plan" de l'équateur E est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$.
2. A tout point x de A on associe $h(x)$ le point d'intersection de la droite issue de p passant par ce point, avec le plan E. Expliciter h, puis h^{-1} et montrer ainsi que la sphère est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$.
(On établira $h(x) = p + \frac{x-p}{1-x_n}$ et $h^{-1}(y) = \frac{2y}{1+\|y\|^2} + p\ \frac{1-\|y\|^2}{1+\|y\|^2}$).
3. En déduire un homéomorphisme de $\mathbb{S}^1$ sur $\overline{\mathbb{R}}$.

3.2 Dualité, isométrie

Exercice 109 Soit E un evn, f un élément non nul du dual de E, et L l'hyperplan affine $\{x \in E/f(x) = 1\}$.

1. Montrer que
$$\inf_{x \in L} \|x\| \geqslant \frac{1}{\|f\|}.$$
2. On peut trouver dans la sphère unité une suite (x_n) telle que $|f(x_n)| \geqslant \frac{n}{n+1}\|f\|$ (justifier) et, à l'aide de cette suite, montrer que l'on a finalement
$$\inf_{x \in L} \|x\| = \frac{1}{\|f\|}.$$

Exercice 110 Soit $E = C([0,1])$, $\mu(x) = \int_0^1 x(t)\ dt$, $\mu_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x(\frac{k}{n})$.

1. Calculer $\|\mu\|$ et $\|\mu_n\|$.
2. Montrer que $\mu_n(x)$ converge vers $\mu(x)$ pour toute x dans E, mais que $\|\mu - \mu_n\| = 2$.

Exercice 111 Soit $E = C([0,1])$ et (t_n) une suite de points distincts, convergente dans $[0,1]$. Montrer que f définie par $f(x) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{2^n} x(t_n)$ est un élément de E' de norme 1 qui n'atteint sa norme en aucun point de la boule unité de E.

Exercice 112 Soit $a, b \in E$ evn, $B_1 = \{x \in E/\|x - a\| = \|x - b\| = \frac{1}{2}\|a - b\|\}$, et pour $n > 1$, $B_n = \{x \in B_{n-1}/\|x - y\| \leqslant \frac{1}{2}\delta(B_{n-1}),\ \forall y \in B_{n-1}\}$, où $\delta(B)$ désigne le diamètre de l'ensemble B.

1. Montrer que $\delta(B_n) \leqslant \frac{1}{2}\delta(B_{n-1})$, et que $\bigcap_n B_n = \{\frac{a+b}{2}\}$.
2. Soit f une isométrie de E *sur* F evn, telle que $f(0) = 0$. Montrer en considérant la suite $(f(B_n))$ que pour tous $a, b \in E$,
$$f(\frac{a+b}{2}) = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$
En déduire que f est une isométrie linéaire. Que peut-on dire plus généralement d'une isométrie f de E sur F.
3. On note l_n^∞ l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, et on considère l'application $f : l_n^\infty \to l_{n+1}^\infty$ définie par $f(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n, \sin x_1)$. Vérifier que f est une isométrie non linéaire entre evn ; pourquoi n'a-t-on pas de contradiction avec ce qui précède ?

Exercice 113
1. Soit (u_n) une suite de nombres complexes. On suppose que, pour toute suite bornée de complexes (v_n), la série $\sum u_n v_n$ converge. Montrer que (u_n) est dans l'espace l^1.
2. Soit (u_n) une suite de nombres complexes. On suppose que, pour toute suite (v_n) dans l^2, la série $\sum u_n v_n$ converge. Montrer que (u_n) est dans l'espace l^2.
Indication : Soit (a_n) une série positive divergente. Montrer que la série de terme général $\frac{a_n}{S_n^\alpha}$, où $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ converge si $\alpha > 1$ et diverge sinon. Utiliser ensuite cette remarque pour conduire un raisonnement par l'absurde.

Exercice 114 On va montrer que le dual de l^2 est isométriquement isomorphe à l^2. On note comme d'habitude e_n l'élément de l^2 dans toutes les composantes sont nulles, sauf la n-ième qui vaut 1.

1. Soit $x \in l^2$. Montrer que la suite d'éléments de l^2 $x_n = \sum_1^n x(k)e_k$ converge vers x dans l^2 (autrement dit, les suites nulles à partir d'un certain rang sont denses dans l^2.) En déduire que si $f \in (l^2)'$, $f(x) = \sum_1^\infty x(n)f(e_n)$.
2. Montrer que $\|f\| \geqslant (\sum_1^n |f(e_k)|^2)^{\frac{1}{2}}$, et que $(f(e_n))_n$ est un élément de l^2.
3. Montrer alors que pour tout $x \in l^2$, $|f(x)| \leqslant \|x\|_2 \|(f(e_n))\|_2$, et que $\|f\| = \|(f(e_n))\|_2$.
En déduire que l'application $f \to (f(e_n))$ est un isomorphisme isométrique du dual de l^2 sur l^2.

Exercice 115 En suivant la même démarche que l'exercice 114, montrer que le dual topologique de c_0 est isométriquement isomorphe à l^1.

3.3 Prolongement de fonctions

Exercice 116

1. Montrer que si deux fonctions continues sur un espace topologique X coïncident sur un ensemble dense dans X, elles sont égales.
2. Soit f une fonction réelle définie continue sur $[-1,1]$. Montrer que si pour tout n, $\int_{-1}^{1} f(x)\, x^n\, dx$ est nulle, alors f est nulle.
   (*Indication :* Considérer l'application $g \to \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx$.)

Exercice 117 Soit F un fermé de $\mathbb{R}$, et f une application continue de F dans $\mathbb{R}$. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. Peut-on remplacer "fermé" par "ouvert" ?

Exercice 118 Soit $n \to r_n$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, et f la fonction définie sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ par

$$f(x) = \sum_{r_n < x} 2^{-n}.$$

Montrer que f est continue, mais qu'elle ne peut être prolongée en aucune fonction continue sur $[0,1]$.

Exercice 119 Soit (X,d) un espace métrique ; on rappelle tout d'abord les propriétés de la fonction $d_A : x \to d(x,A)$ où A est une partie de X :

1. d_A est 1-lipschitzienne, et $d_A(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$. On en déduit que tout fermé est un G_δ et que tout ouvert est un F_σ.
2. Montrer qu'un espace métrique possède une propriété forte de séparation, à savoir : deux fermés disjoints F_1 et F_2 peuvent être séparés par deux ouverts disjoints, en considérant $\{x/d(x,F_1) > d(x,F_2)\}$.
3. Montrer que la propriété précédente est équivalente à l'existence d'une fonction continue f valant 0 sur F_1 et 1 sur F_2.
4. Soit F_1, F_2,...,F_n, n fermés disjoints dans X, et c_1, c_2,...c_n, n nombres réels. Montrer que la fonction f valant c_i sur F_i peut se prolonger en une fonction continue à X tout entier.

Exercice 120 Soit (X,d) un espace métrique, et Y un sous-espace non vide de X. On va montrer que toute fonction $f : Y \to \mathbb{R}$, k-lipschitzienne, admet un prolongement $g : X \to \mathbb{R}$ qui est aussi k-lipschitzien. Soit donc f ainsi ; pour tout $x \in X$ et $y \in Y$, on pose

$$f_y(x) = f(y) + kd(x,y).$$

1. Montrer que pour x fixé, l'ensemble $\{f_y(x)\}$ lorsque y parcourt Y est minoré. On pose $g(x) = \inf_{y\in Y}\{f_y(x)\}$.
2. Montrer que l'application g ainsi définie sur X, réalise un prolongement k-lipschitzien de f.
3. Donner une condition suffisante pour que ce prolongement soit unique.

3.4 Métrique de la convergence uniforme

Exercice 121 On considère l'espace métrique $E = C([0,1])$ muni de d_∞, et pour $f \in E$, on note $M(f)$ le maximum de f sur $[0,1]$. Montrer que l'application $f \to M(f)$ est 1-lipschitzienne.

Exercice 122 Soit (f_n) une suite de polynômes qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction qui n'est pas un polynôme. Montrer que la suite des degrés tend vers l'infini.

Exercice 123 On considère la suite de polynômes sur $[-1,1]$

$$f_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n\, dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n\, dt}.$$

1. Montrer que pour tout ε, cette suite converge uniformément vers 1 sur l'intervalle $[\varepsilon,1]$, et vers -1 sur l'intervalle $[-1,-\varepsilon]$.
   Indication : Comparer $\int_0^1 (1-t^2)^n\, dt$ à $\int_0^1 (1-t)^n\, dt$.
2. En déduire que la suite $g_n(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt$ converge uniformément vers $|x|$ sur $[-1,1]$.
3. Montrer que dans l'exercice 96 la convergence est aussi uniforme sur $[-1,1]$, en établissant une relation de récurrence satisfaite par l'erreur $\varepsilon_n(t) = |t| - p_n(t)$.

Exercice 124 Une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite réglée, si elle a en tout point une limite à droite et une limite à gauche (et bien sûr, une limite à droite en 0, une limite à gauche en 1.) Montrer qu'une limite uniforme de fonctions en escalier est une fonction réglée (la réciproque sera établie ultérieurement).

Exercice 125 Soit E l'espace $C_b(\mathbb{R}, C)$ des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la métrique de la convergence uniforme d.

1. On rappelle qu'un espace topologique est séparable s'il contient un dénombrable dense. Montrer que dans un espace métrique séparable, toute collection d'ouverts deux à deux disjoints est au plus dénombrable.
2. Soit λ et μ deux réels distincts. Montrer que $d(e^{i\lambda x}, e^{i\mu x}) \geqslant 2$. En déduire que E n'est pas séparable.

3.5 Théorème de Baire

Exercice 126 On dit qu'un point x d'un espace topologique Y est isolé dans $X \subset Y$, s'il existe V, voisinage de x dans Y, tel que $V \cap X = \{x\}$. Montrer qu'un point x est isolé dans X si et seulement si $\{x\}$ est ouvert dans X ; en déduire, à l'aide du théorème de Baire, qu'un fermé dénombrable de $\mathbb{R}$ a au moins un point isolé. Que peut-on dire de l'ensemble de Cantor ?

Exercice 127 Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas un G_δ c'est-à-dire n'est pas intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde et considérer $\omega_n = \mathbb{R}\backslash\{q_n\}$ si $\mathbb{Q} = \{q_1, \ldots, q_n, \ldots\}$.

Exercice 128 Soit B un espace de Banach ; on rappelle que tout sous-espace propre de B est d'intérieur vide dans B. Montrer que si B est de dimension infinie, B ne possède pas de base algébrique dénombrable.
En déduire que l'espace des polynômes n'est complet pour aucune norme.

Exercice 129 Soit f une application définie sur un espace métrique complet (X, d), à valeurs réelles et semi-continue inférieurement. Montrer qu'il existe un ouvert non vide O sur lequel f est majorée.
Application : soit (f_n) une suite de formes linéaires sur un Banach B, vérifiant

$$\forall x \in B,\ \sup_n |f_n(x)| < \infty.$$

En utilisant ce qui précède, montrer que $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

Exercice 130 Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique de Baire, c'est-à-dire pour lequel le théorème de Baire est valide. On va montrer que tout ouvert de X muni de la topologie induite est encore un espace de Baire.

1. Soit (O_n) une suite d'ouverts denses dans O ; montrer que chaque $\omega_n = O_n \cup \overline{O}^c$ est un ouvert dense dans X (on rappelle qu'un ensemble est dense dans X s'il rencontre tout ouvert de X).
2. Montrer que pour tout ouvert ω de O,
$$(\cap_n O_n) \cap \omega \neq \emptyset$$
En déduire le résultat.

Exercice 131 On sait que l^1 est inclus dans l^2 (au fait pourquoi ?) mais n'est pas fermé dans l^2 (re-pourquoi ?) ; on va montrer qu'il est de première catégorie dans l^2 c.a.d. réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide (dans l^2).

1. On considère pour chaque $p \geqslant 1$,
$$F_p = \{(a_n) \in l^2 \,/\, \sum |a_n| \leqslant p\}$$
Montrer que F_p est fermé dans l^2 et d'intérieur vide.
2. En déduire le résultat.

4 Connexité

4.1 Connexité

Exercice 132 Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ (munis de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$) ne sont pas homéomorphes, mais sont tous les deux "totalement discontinus" au sens suivant : leurs seuls connexes sont les points. (Remarquer que A connexe dans $Y \Rightarrow A$ connexe dans X si $Y \subset X$).

Exercice 133 Soit A une partie du cercle unité $\mathbb{S}^1 = \partial D$; montrer que $D \cup A$ est connexe.

Exercice 134 1. Montrer qu'il y a équivalence pour X espace topologique entre :

i) Toute application continue $\varphi : X \to \mathbb{Z}$ est constante.

ii) X est connexe.

2. Retrouver ainsi différents résultats du cours ($f(C)$ connexe si C connexe et f continue ; B connexe si A connexe et $A \subset B \subset \overline{A}$; un produit de deux connexes est encore connexe ; etc)
3. Soit A, B connexes de X tels que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$; montrer à l'aide de a) que $A \cup B$ est connexe.

Exercice 135 Existe-t-il une application continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \in \mathbb{Q}$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $f(x) \notin \mathbb{Q}$ si $x \in \mathbb{Q}$? (Regarder l'image de f.)

Exercice 136 Soit $X = \mathbb{Q}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$. Montrer que les seuls connexes de X sont les points. (A connexe dans $X \Rightarrow A$ connexe dans $\mathbb{R}$)

Exercice 137 Soit X un ouvert d'un espace vectoriel normé E ; montrer que X est connexe si et seulement si il est connexe par arcs. (*Indication :* fixer $a \in X$ et considérer $A = \{x \in X, \text{relié à } a \text{ par un chemin dans } X\}$.)

Exercice 138 Soit f une surjection continue de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'image réciproque de tout point est non bornée (raisonner par l'absurde et utiliser que le complémentaire d'un disque dans $\mathbb{R}^2$ est connexe).

Exercice 139 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de racines $z_1, \ldots, z_n$ distinctes ou non, situées dans un convexe K de $\mathbb{C}$.

1. On suppose que $P'(z) = 0$ et $z \notin \{z_1, \ldots, z_n\}$; montrer qu'il existe des réels $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_n(z)$, inconnus mais > 0, tels que l'on ait : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(z)(z - z_k) = 0$. (Indication : considérer $\frac{P'(z)}{P(z)}$ et son conjugué).
2. Montrer que P' a aussi toutes ses racines dans K (théorème de Gauss-Lucas).

Exercice 140 On dit qu'un espace topologique possède la propriété du point fixe si toute fonction continue de X dans X admet un point fixe.

1. Montrer qu'un espace topologique possédant cette propriété est nécessairement connexe.
2. Montrer que si X a cette propriété, tout Y homéomorphe à X la possède aussi.
3. Montrer ainsi que $\mathbb{S}^1$ n'est pas homéomorphe à un segment.

Exercice 141 Soit $I = [a, b]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable ; soit $A = \big\{(x, y) \in I \times I ; y > x\big\}$ et $g : A \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

1. Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
2. Montrer que f' a la propriété de la valeur intermédiaire : si elle prend les valeurs α et β, elle prend toute valeur $\gamma \in [\alpha, \beta]$.

Exercice 142 On va démontrer à l'aide de la connexité, le résultat classique :
"$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue injective $\Longrightarrow f$ strictement monoton".
Pour cela, considérons l'application F définie sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x, y) = f(x) - f(y)$ et $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > y\}$

1. Montrer que $F(C)$ est un connexe de $\mathbb{R}$.
2. En déduire le résultat.

Exercice 143 On définit la projection stéréographique h de $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $h(x, y)$ étant le point d'intersection avec l'axe réel de la droite issue de $(0, 1)$ passant par (x, y) si $(x, y) \neq (0, 1)$ et $h(0, 1) = \infty$. Vérifier qu'il s'agit d'un homéomorphisme. En déduire que $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 144 Soit X un espace métrique. Alors :

1. X est connexe si et seulement si toute application continue $f : X \to \{0, 1\}$ est constante.
2. Soit A une partie de X connexe. Montrer que toute partie $B \subset E$ vérifiante $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.
3. Si $(A_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de parties connexes de X telle que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ pour tout $n \geqslant 0$. Prouver que $\bigcup_{n \geqslant 0} A_n$ est connexe.

Exercice 145 Déterminer les parties connexes de

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, ; x \neq y\} \quad \text{et de} \quad \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \, ; z \neq w\} \, .$$

Exercice 146 Soit A et B des parties de X. On suppose B connexe et que $B \cap A$ et $B \cap \complement A$ sont non vides. Montrer que B coupe la frontière de A.

Exercice 147 Notons $T = \{0\} \times [-1,1] \cup [-1,1] \times \{0\}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que T est compact et connexe et que $f(T)$ est un segment si $f : T \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.
2. Déterminer les points $x \in T$ pour lesquels $T \setminus \{x\}$ est connexe.
3. Montrer que T n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 148 1. Montrer qu'il existe une surjection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ \ |z| = 1\}$ et qu'il n'existe pas d'injection continue de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer qu'il n'existe pas d'injection continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 149 Dans $\mathbb{R}^2$, soit B_a l'ensemble $\{a\} \times]0,1]$ si a est rationnel et $B_a = \{a\} \times [-1,0]$ si a est irrationnel. Montrer que $B = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} B_a$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.
[Exercice corrigé]

Exercice 150 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Notons $A = \{(x,y) \in I \times I \ ; \ \ x < y\}$.

1. Montrer que A est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x,y) \in A$, posons $g(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Ce résultat signifie que *la dérivée de toute fonction dérivable possède la propriété de la valeur intermédiaire* (un théorème de Darboux).

Exercice 151 Soit X un espace métrique. Établir l'équivalence des assertions suivantes :

1. X est compact connexe.
2. Pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $i_1, ..., i_n \in I$ tels que

$$\bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k} = X \quad \textit{et} \quad U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}} \neq \emptyset \text{ pour } k = 1, ..., n-1 \ .$$

4.2 Connexité par arcs

Exercice 152 A et B sont des parties d'un espace topologique X. Vrai ou faux ?

1. Si A est connexe, ∂A est connexe ?
2. Si $\overline{A}$ est connexe, A est connexe ?
3. Si A et B sont connexes et $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap B$ est connexe ?
4. Si X est un evn et A et B convexes avec $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap B$ est connexe ?
5. Si A et B sont connexes, $A \cup B$ est connexe ?
6. Soit f continue de X dans Y espace topologique. Si A est connexe par arcs , $f(A)$ est connexe par arcs ?
7. Soit f continue de X dans Y evn. Si A est convexe, $f(A)$ est convexe ?

Exercice 153 Dans $\mathbb{R}^2$ on considère l'ensemble A des points dont une coordonnée au moins est irrationnelle.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$; décrire l'ensemble $A \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = \alpha\}$.
2. Montrer que A est connexe par arcs (plus précisément deux points de A peuvent être reliés par une ligne polygonale).

Exercice 154 1. Montrer que dans $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$, les sous-ensembles suivants sont connexes :

$$B(0,r); \ \mathbb{R}^n \backslash B(0,r); \ S^{n-1}(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ ||x|| = r\}.$$

2. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes (sinon enlever un point à $\mathbb{R}$).

Exercice 155 On rappelle que si X est réunion disjointe de parties non vides ω_i ouvertes et connexes, les ω_i sont les composantes connexes de X.
Trouver les composantes connexes du complémentaire des ensembles suivants :

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y^2-x=0\};\quad \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/0<x^2+y^2+z^2\leqslant 1\};$$

$$S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n/||x||=1\};\quad \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}^2.$$

Exercice 156 Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Montrer que

1. si dim $H=n-1$, $\mathbb{R}^n\backslash H$ a deux composantes connexes ;
2. si dim $H\leqslant n-2$, $\mathbb{R}^n\backslash H$ est connexe.

Exercice 157 On considère le sous-ensemble suivant du plan complexe :

$$C=\cup_{n\geqslant 1}[0,1+\frac{i}{n}]\cup\ [\frac{1}{2},1]=A\cup\ [\frac{1}{2},1]$$

1. Montrer que C est connexe.
   Soit γ un chemin reliant un point de A à un point de $[\frac{1}{2},1]$ et d'image dans C.
2. Si γ ne passe pas par 0, montrer que $\gamma(t)=r(t)e^{i\theta(t)}$ où $r(t)>0$ et $0\leqslant\theta(t)<\frac{\pi}{2}$, et r,θ continues.
3. Montrer que θ ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs et aboutir à une contradiction.
4. Dans tous les cas, montrer qu'il existe $t_0\in]0,1[$ tel que $\gamma(t)$ ne passe pas par 0 pour $t\geqslant t_0$. En déduire que C n'est pas connexe par arcs.

Exercice 158 Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$f(\frac{x+y}{2})\leqslant\frac{1}{2}\Big(f(x)+f(y)\Big)\quad\forall x,y\in[a,b].$$

1. On suppose $f(a)=f(b)=0$. On considère $E=\{x\in]a,b[\ /\ f(x)=\sup_{t\in[a,b]}f(t)\}$. Montrer que E est ouvert et fermé dans $]a,b[$. En déduire que f est <0 ou identiquement nulle sur $]a,b[$.
2. Montrer dans tous les cas que f est convexe ie f vérifie $f((1-t)x+ty)\leqslant(1-t)f(x)+tf(y)$ pour tous $x,y\in[a,b]$ et $t\in[0,1]$ (On se ramènera au cas a) en considérant f privée de sa corde sur $[a,b]$).

Exercice 159 Soit X un espace métrique et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes par arcs de X telle que $\bigcap_{i\in I}A_i\neq\emptyset$. Montrer que $\bigcup_{i\in I}A_i$ est connexe par arcs

Exercice 160 Dans $\mathbb{R}^2$ on considère l'ensemble $A=\{(x,\sin(\frac{1}{x}))\ ;\ x>0\}$.

1. Montrer que A est une partie connexe et connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer $\overline{A}$ et justifier que $\overline{A}$ est connexe.
3. Montrer que $\overline{A}$ n'est pas connexe par arcs.

5 Compacité

5.1 Espaces topologiques compacts

Exercice 161
1. Soit X un espace topologique séparé. Montrer qu'il est compact et discret si et seulement si il est fini.
2. Montrer que dans un espace topologique séparé, l'ensemble constitué d'une suite convergente et de sa limite est compact.

Exercice 162 Soit X un espace topologique compact et $f_1,f_2,\ldots,f_n$, n fonctions continues réelles qui séparent les points de X. Montrer que X est homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 163 Soit X,Y deux espaces topologiques séparés et (K_n) une suite décroissante de compacts non vides de X. Soit $f:X\to Y$ une application continue. Montrer que $f(\cap_n K_n)=\cap_n f(K_n)$.

Exercice 164 Soit X un espace topologique séparé et A et B deux compacts disjoints dans X. Montrer qu'ils possèdent des voisinages ouverts disjoints. (Commencer par le cas où B est réduit à un point).

Exercice 165 Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles définies sur un espace topologique compact X, convergeant simplement vers une fonction f ; on suppose que les fonctions f_n et f sont continues. Montrer que la convergence est uniforme sur X.
Application : montrer que la suite de fonctions f_n définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \sum_1^{n-1} x^k(1-x)^{n-k}$ converge vers 0 uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 166 Soit X un espace topologique compact et $C(X)$ l'espace des fonctions réelles continues sur X avec la norme uniforme.
Soit J un idéal propre de $C(X)$; on va montrer par l'absurde que toutes les fonctions de J s'annulent en un même point de X.

1. Sinon, montrer qu'on peut trouver n points de X, $x_1, \cdots, x_n$, $V_1, \cdots, V_n$ où V_i voisinage de x_i et n fonctions de J, $f_1, \cdots, f_n$ tels que
$$X = \cup_i V_i, \quad f_{i|V_i} \neq 0.$$
2. Construire alors une fonction g dans J ne s'annulant jamais et en déduire que $\mathbf{1} \in J$, d'où la contradiction.

Exercice 167 Soit X un espace topologique séparé.

1. Soit A et B deux compacts disjoints dans X. Montrer qu'ils possèdent des voisinages ouverts disjoints (commencer par le cas où B est réduit à un point).
2. Soit K un compact non vide de X et U un ouvert de X contenant K. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, on ait l'implication :
$$d(x,K) < r \Rightarrow x \in U\ .$$

Exercice 168 Montrer qu'une suite convergente et sa limite forment un ensemble compact.

Exercice 169 Soient $K, F \subset \mathbb{R}^n$ des parties non vides, K compact et F fermé. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tel que $\|a-b\| = \operatorname{dist}(K,F)$.

Exercice 170 Soit E un espace compact et soit (F,d) un espace métrique. Soit $f : E \to F$ une application localement bornée, ce qui signifie que, pour tout $y \in E$, il existe un voisinage V_y de y sur lequel f est bornée. Montrer que f est bornée sur E.

Exercice 171 Soit X un espace topologique séparé.

1. Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés de X et soit $(x_n)_n$ une suite convergente telle que $x_n \in F_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \bigcap_{n\geqslant 0} F_n\ .$$
Donner un exemple pour lequel $\bigcap_{n\geqslant 0} F_n = \emptyset$.
2. Soit maintenant $(K_n)_n$ une suite décroissante de *compacts* non vides de X. Vérifier que $K = \bigcap_{n\geqslant 0} K_n$ est non vide et que tout ouvert Ω qui contient K contient tous les K_n à partir d'un certain rang.

Exercice 172 Soit X un espace topologique et $f : X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'application $g : x \in X \to \int_0^1 f(x,y)\,dy$ est continue.

Exercice 173 Soit X un espace topologique et $f : X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'application $g : x \in X \to \int_0^1 f(x,y)\,dy$ est continue.

Exercice 174 Soit $X = [a,b]$ et on se donne une métrique d sur X telle que la topologie définie par d est moins fine sur X que la topologie usuelle. Montrer que tout sous-ensemble de X compact pour la topologie usuelle est aussi compact pour la topologie définie par d ; puis montrer cette propriété pour les fermés.
En déduire que la topologie définie par d est la topologie usuelle.

Exercice 175 Soit X un espace topologique séparé et (K_n) une suite décroissante de compacts non vides de X. Montrer que $K = \cap K_n$ est non vide et que si Ω est un ouvert contenant K, il contient tous les K_n à partir d'un certain rang.

Exercice 176 Soit f et g deux fonctions réelles continues sur un espace topologique compact X, telles que $f \geqslant 0$, et $f(x) > 0$ si $g(x) \leqslant 0$. Montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que
$$Af(x) + g(x) > 0,\ \forall x \in X.$$
(*Indication :* raisonner par l'absurde, et considérer les ensembles $A_n = \{x \in X / nf(x) + g(x) \leqslant 0\}$).

Exercice 177 Soit X un espace topologique compact et $f_1, f_2, \ldots, f_n$, n fonctions continues réelles qui séparent les points de X. Montrer que X est homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 178 Montrer que toute fonction réglée sur $[0,1]$ s'approche uniformément par des fonctions en escalier.

Exercice 179 Soit (f_n) une suite croissante de fonctions réelles définies sur un espace topologique compact X, convergeant simplement vers une fonction f ; on suppose que les fonctions f_n et f sont continues.
Montrer que la convergence est uniforme sur X.

Exercice 180 Soit X un espace topologique compact et $C(X)$ l'espace des fonctions continues sur X avec la norme uniforme.

1. Soit J un idéal propre de $C(X)$; montrer que toutes les fonctions de J s'annulent en un même point de X. *Indication :* raisonner par l'absurde, utiliser le fait qu'une fonction continue $\neq 0$ en x, est $\neq 0$ sur un voisinage de x et recouvrir X avec de tels voisinages.

   Pour $f \in J$, on note $Z_f = f^{-1}(\{0\})$, l'ensemble des zéros de f.
2. Soit J un idéal de $C(X)$ et $Z = \cap_{f \in J} Z_f$; Z est fermé.
   (a) Soit K un fermé de X disjoint de Z. Par un raisonnement analogue à celui du 1., construire $f \in J$, $f \geqslant 0$ et ne s'annulant pas sur K.
   Etudier la limite F de $\frac{nf}{1+nf}$ dans $C(X)$.
   (b) Montrer que si $g \in C(X)$ s'annule sur un ouvert contenant Z, alors $g \in J$ et $Z \neq \emptyset$.
   (c) Soit $g \in C(X)$ nulle sur Z ; par un bon choix de K, montrer que $g \in \overline{J}$.

   En déduire la description des idéaux fermés de $C(X)$.

5.2 Compacité dans les espaces métriques, normés

Exercice 181 Montrer que les sous-groupes compacts du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ sont contenus dans $\mathbb{U}$ le sous-groupe des nombres complexes de module 1.

Exercice 182 On rappelle la construction de l'ensemble triadique de Cantor : on part du segment $[0,1]$ dont on supprime l'intervalle médian $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$; à la deuxième étape, on supprime les intervalles $]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$ et $]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$ etc. On note K_n la réunion des intervalles restants à la n-ième étape, et $K = \bigcap K_n$. Montrer que K est un compact d'intérieur vide, sans point isolé.

Exercice 183 On considère dans $M_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices de déterminant égal à 1. Est-il compact ? On note $O(n)$ le sous-ensemble des matrices orthogonales (${}^tA.A = I$) ; montrer que $O(n)$ est compact.

Exercice 184 Montrer que dans un evn, la boule unité fermée est compacte si et seulement si la sphère unité est compacte.

Exercice 185 Soit A une partie d'un espace normé E. On note $\mathrm{co}(A)$, l'enveloppe convexe de A ie l'ensemble $\{\sum_{\text{finie}} \lambda_j a_j,\ \lambda_j \geqslant 0,\ \sum \lambda_j = 1\}$ des combinaisons convexes de points de A.

1. Montrer que si A est fini, $\mathrm{co}(A)$ est compacte.
2. Montrer que si E est de dimension finie n et A compact, $\mathrm{co}(A)$ est compacte (on admettra que tout point de $\mathrm{co}(A)$ est combinaison convexe d'au plus $n+1$ points de A).

Exercice 186 Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soit A une partie compacte de X ; montrer qu'il existe $x, y \in A$ tels que $\mathrm{diam} A = d(x, y)$.
2. Soit A et B deux parties compactes disjointes de X. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $d(a, b) \geqslant \delta\ \forall a \in A, b \in B$. En déduire une démonstration simple de l'exercice 10 dans le cadre métrique.
3. Montrer que le résultat est encore vrai si l'une est compacte et l'autre fermée, mais devient faux si les deux parties sont seulement fermées.

Exercice 187 Soit f une surjection continue de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$. On va montrer que l'image réciproque de tout point est non bornée. On raisonne par l'absurde :
Sinon, il existe $a \in \mathbb{R}$ et un disque fermé D du plan tel que $f^{-1}(\{a\}) \subset D$; en étudiant $f(D^c)$ et $f(D)$ montrer que $f(\mathbb{R}^2)$ ne peut être égal à $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 188 Soit $F_1, F_2, ..., F_p$, p fermés d'un espace métrique compact E, tels que $F_1 \cap ... \cap F_p = \emptyset$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute partie A de E rencontrant tous les F_i ait un diamètre $\geqslant \varepsilon$ (raisonner par l'absurde).

Exercice 189 Soit $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ où les X_i sont n espaces métriques, et on note p_i la projection de X sur X_i. Montrer que $A \subset X$ est compact si et seulement si A est fermé dans X et les $p_i(A)$ sont tous compacts.

Exercice 190

1. Montrer que la boule unité fermée d'un evn de dimension finie est compacte.
2. Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace de E de dimension finie. Montrer que $d(x, F) = \inf\{d(x, y),\ y \in F,\ ||y|| \leqslant 2||x||\}$; en déduire que F est fermé dans E.
3. Soit (f_n) une suite de polynômes qui converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction qui n'est pas un polynôme. Montrer que la suite des degrés tend vers l'infini (raisonner par l'absurde).

Exercice 191 (Partiel de décembre 1998) Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$ de boule unité fermée $\overline{B}$ et F un sous-espace vectoriel fermé de E. On a montré dans le liste précédente que si $F \neq E$, $\sup_{x \in \overline{B}} d(x, F) = 1$.

On va montrer qu'un evn dont la boule unité fermée est compacte est nécessairement de dimension finie. On suppose donc que $\overline{B}$ est compacte.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un nombre fini de points $x_1, \cdots, x_k \in \overline{B}$ tels que $\overline{B} \subset \cup_{j=1}^{k} B(x_j, \varepsilon)$.
2. Montrer que E est de dimension finie : pour cela, considérer le sous-espace vectoriel engendré par $x_1, \cdots, x_k$.

Exercice 192 Voici quelques applications du fait important suivant : dans un espace métrique compact, toute suite ayant une seule valeur d'adhérence converge.

1. Soit (a_n) une suite bornée de réels, telle que (e^{ita_n}) converge pour un ensemble non dénombrable de $t \in \mathbb{R}$; montrer que la suite (a_n) converge.
2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et G son graphe. Montrer que si G est connexe par arcs, f est continue.
3. Soit f une application de X dans Y, espaces métriques et G le graphe de f. Montrer que G est fermé dans $X \times Y$ si f est continue. Montrer que la réciproque est vraie lorsque Y est compact.
4. Soit X un espace métrique, Y un espace métrique compact et $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ une application continue telle que, pour tout $x \in X$, l'équation $f(x, y) = 0$ ait une unique solution $y \in Y$. Montrer que l'application $u : x \in X \to y \in Y$ ainsi définie est continue.

Exercice 193 On considère une suite (x_n) de $[0, 1]$ telle que $x_{n+1} - x_n$ tend vers 0. Soit A l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.

1. Justifier le fait que A est non vide. Si $\alpha \notin A$, montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et n_0 tels que les points $x_n,\ n \geqslant n_0$, soient en dehors de $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$. Montrer ainsi que A est un intervalle (si α et $\beta \in A$, $\frac{\alpha+\beta}{2} \in A$).
2. On suppose de plus que cette suite est une suite récurrente i.e. définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ où f est continue de $[0, 1]$ dans lui-même, et un point initial $x_0 \in [0, 1]$. Montrer alors que la suite converge (on commencera par remarquer que si $x \in A$, alors $x = f(x)$, et que si $x_m \in A$ pour un indice m, alors la suite converge.)
3. Soit $x = (x_n)$ une suite de l^∞ ; montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite y de terme général $y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ est un intervalle. En déduire que l'application f de l^∞ dans lui-même qui associe y à x, n'est pas bijective.

Exercice 194 On note $\mathbb{S}^1$ le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$, et h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}^1$: $t \to (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

1. Montrer que le cercle privé d'un point, $\mathbb{S}^1 \backslash \{a\}$, est homéomorphe à l'intervalle $]0, 1[$.
2. Montrer que h est une bijection continue de $[0, 1[$ sur $\mathbb{S}^1$, mais n'est pas un homéomorphisme.

Exercice 195 Démontrer de plusieurs façons que le cercle unité $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ est compact.

Exercice 196 Soit (X, d) un espace métrique, A et B deux parties de X. On pose $d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$.

1. Si A et B sont disjointes, l'une compacte et l'autre fermée, montrer que $d(A, B) > 0$.
2. Montrer, par un contre-exemple, que ceci peut être faux si les deux parties sont seulement fermées.

Exercice 197 Soit E un espace normé, X et Y deux sous-ensembles de E. Montrer que

1. $X + Y$ est ouvert si X est ouvert ;

2. $X+Y$ est compact si X et Y sont compacts ;
3. $X+Y$ est fermé si X est compact et Y fermé.

Que peut-on dire de $X+Y$ si X et Y sont seulement fermés ?

Exercice 198 Soit E un espace normé, X et Y deux parties compactes de E. Montrer que la réunion des segments joignant un point $x \in X$ à un point $y \in Y$ est encore compacte.

Exercice 199 Soit K un convexe compact symétrique de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 comme point intérieur. Alors K est la boule unité fermée associée à une norme de $\mathbb{R}^n$: considérer pour cela

$$p(x) = \inf\{t > 0 / \frac{x}{t} \in K\}$$

Exercice 200 Trouver l'ensemble des valeurs d'adhérence quand $x \to 0$ de $f(x) = \sin \frac{1}{x}$; $g(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$.

Exercice 201

1. Soit X un espace métrique compact et (f_n) une suite d'applications continues à valeurs dans un espace métrique Y, convergeant vers f uniformément sur X. Montrer que si (x_n) est une suite de points de X convergeant vers $x \in X$, alors $f_n(x_n)$ tend vers $f(x)$.
2. Application : Soit X un espace métrique compact, et soit (f_n) une suite d'applications de X dans X, ayant chacune un point fixe ; on suppose que la suite (f_n) converge vers une fonction f uniformément sur X. Montrer que f a aussi un point fixe.
3. Soit K un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ et f une application continue de K dans K vérifiant
$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|;$$
En considérant les fonctions f_n définies sur K par $f_n(x) = \frac{1}{n} f(x_0) + (1 - \frac{1}{n}) f(x)$, où $x_0 \in K$, montrer que f a un point fixe. Est-il unique ? Que se passe-t-il si K n'est plus convexe ?

Exercice 202 Soit A une partie d'un espace normé E. On note $\mathrm{co}(A)$, l'enveloppe convexe de A ie l'ensemble $\{\sum_{finie} \lambda_j a_j,\ \lambda_j \geqslant 0,\ \sum \lambda_j = 1\}$ des combinaisons convexes de points de A.

1. Montrer que si A est fini, $\mathrm{co}(A)$ est compacte.
2. Montrer que si E est de dimension finie et A compact, $\mathrm{co}(A)$ est compacte.

Exercice 203 Soit $E = C_b(\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme ; pour $f \in E$, on note f_a la translatée de f par a, ie la fonction $x \to f(x-a)$, et O_f l'ensemble des translatées de f.

1. Montrer que si f est périodique, O_f est compact (considérer l'application $a \to f_a$).
2. Soit f une limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de fonctions périodiques ; montrer que O_f est précompact.
3. On suppose cette fois O_f précompact ; on va montrer que f est uniformément continue.
   (a) De toute suite (f_{a_n}) de O_f on peut extraire une sous-suite convergente dans E.
   (b) Si $x_n - y_n$ tend vers 0, montrer que $(f_{x_n - y_n})$ n'a qu'une valeur d'adhérence f ; en déduire que $f(x_n) - f(y_n)$ tend vers 0.
   (c) Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 204 Soit E l'ensemble des suites infinies de nombres réels $x = (x_1, x_2, \cdots)$ à valeurs 0 ou 1. Si x et y sont deux éléments de E, on pose

$$d(x,y) = \sup_{k \geqslant 1} (\frac{1}{k} |x_k - y_k|)$$

1. Montrer que d est une distance sur E.
2. Soit $\varepsilon > 0$; montrer qu'il existe une partie finie E_ε de E qui possède la propriété suivante : les boules fermées de rayon ε centrées en un point de E_ε recouvrent E.
3. Montrer que E est compact.

Exercice 205 Soit K un convexe compact de $\mathbb{R}^2$.

1. Si K est d'intérieur vide, montrer que K est homéomorphe au segment $[0,1]$.
2. Si K n'est pas d'intérieur vide, montrer que K est homéomorphe au disque unité fermé en considérant l'application $p(x) = \inf\{a > 0\ ;\ \frac{x}{a} \in K\}$; on montrera que 0 est un point intérieur, que $\delta||x|| \leqslant p(x) \leqslant C||x||$ puis que p est continue.

Exercice 206 Soit (A_n) une suite décroissante de compacts connexes non vides dans un espace topologique séparé. Montrer que $\cap_n A_n$ est encore un compact connexe non vide. (Pour la connexité on pourra raisonner avec de fermés et utiliser l'exercice 164.)

Exercice 207 Soit E un espace normé. Si A et B sont deux parties de E, on note $A+B$ l'ensemble $\{a+b\ ;\ a \in A \text{ et } b \in B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $A+B$ est fermé.
2. Donner un exemple de deux fermés de $\mathbb{R}^2$ dont la somme n'est pas fermé.

Exercice 208 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Elle est dite *propre* si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, l'image réciproque $f^{-1}(K)$ est compact.

1. Montrer que, si f est propre, alors l'image par f de tout fermé de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.
2. Établir l'équivalence suivante : l'application f est propre si et seulement si elle a la propriété :

$$\|f(x)\| \to \infty \quad \text{quand} \quad \|x\| \to \infty\ .$$

Exercice 209 Soit $E = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$. On munit E de la métrique $d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)|$. Montrer que la boule unité fermée de E n'est pas compact (on pourra construire une suite dont aucune sous suite n'est de Cauchy).
Que peut-on dire de la boule unité fermée de l^∞ (l'espace des suites bornées muni de la norme sup) ?

Exercice 210 Soit (X,d) un espace métrique, soit (Y,δ) un espace métrique compact et soit $f : X \to Y$ une application dont le graphe

$$G = \{(x, f(x))\ x \in X\} \subset X \times Y$$

est fermé dans $X \times Y$. Notons $p : G \to X$ et $q : G \to Y$ les restrictions des deux projections $p(x,y) = x$ et $q(x,y) = y$. Montrer que p est un homéomorphisme de G sur X. En déduire que f est continue.

Exercice 211 Soit (X,d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) < d(x,y) \quad \text{pour tout } x, y \in X\ , x \neq y\ .$$

Le but ici est de montrer que f a un unique point fixe $p \in X$.

1. Justifier que f peut avoir au plus un point fixe.
2. Montrer que les ensembles $X_n = f^n(X)$, $n \in \mathbb{N}$, forment une suite décroissante de compacts et que $Y = \bigcap_{n\geqslant 0} X_n$ n'est pas vide.
3. Montrer que Y est un ensemble invariant, i.e. $f(Y) = Y$, et en déduire que le diamètre de cet ensemble est zero.
4. Conclure que f a un unique point fixe $p \in X$ et que pour tout $x_0 \in X$ la suite $x_n = f^n(x_0) \to p$, lorsque $n \to \infty$.

Exercice 212 Soient (E,d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) \geqslant d(x,y) \quad \text{pour tout } x, y \in E\ .$$

On se propose de montrer que f est une isométrie surjective. Soient $a, b \in E$ et posons, pour $n \geqslant 1$, $a_n = f^n(a) = f \circ f^{n-1}(a)$ et $b_n = f^n(b)$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \geqslant 1$ tel que $d(a, a_k) < \varepsilon$ et $d(b, b_k) < \varepsilon$ (Considérer une valeur d'adhérence de la suite $z_n = (a_n, b_n)$).
2. En déduire que $f(E)$ est dense dans E et que $d(f(a), f(b)) = d(a,b)$ (Considérer la suite $u_n = d(a_n, b_n)$).

Exercice 213 On se donne une métrique d sur $X = [0,1]$ telle que l'identité $i : (X, |.|) \to (X, d)$ soit continue (i.e. la topologie définie par d est moins fine que la topologie usuelle de X).

1. Montrer que tout sous-ensemble de X compact pour la topologie usuelle est aussi compact pour la topologie définie par d ; puis montrer cette propriété pour les fermés.
2. En déduire que la topologie définie par d est la topologie usuelle.

Deuxième partie
Analyse réelle

6 Applications linéaires bornées

6.1 Applications linéaires

Exercice 214 Soient E_1, E_2 et F des espaces normés sur $\mathbb{R}$ et soit $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire continue. Montrer que B est continue si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|B(x)\| \leqslant M\|x_1\|\|x_2\| \quad \text{pour tout } x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \ .$$

Exercice 215 Soient E et F deux espaces normés et $L : E \to F$ une application linéaire vérifiant : $(L(x_n))_n$ *est bornée dans* F *pour toute suite* $(x_n)_n$ *de* E *tendant vers* $0 \in E$. Montrer que L est continue.

Exercice 216 Soient E et F deux espaces normés réels et $f : E \to F$ une application bornée sur la boule unité de E et vérifiant

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{pour tout } x, y \in E \ .$$

Montrer que f est linéaire continue.

Exercice 217 Calculer la norme des opérateurs suivants :
- Le shift sur l^∞ défini par $S(x)_{n+1} = x_n$, $S(x)_0 = 0$.
- $X = \mathcal{C}([0, 1])$ et $Tf(x) = f(x)g(x)$ où $g \in X$.

Calculer la norme des formes linéaires suivantes :
- $X = \mathcal{C}([0, 1])$ et $u(f) = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$ où $g \in X$ est une fonction qui s'annule qu'en $x = 1/2$.
- $X = l^2$ et $u(x) = \sum a_n x_n$ où (a_n) est dans X.
- $X = l^1$ et $u(x) = \sum a_n x_n$ où (a_n) est dans l^∞.
- X l'espace des suites convergentes muni de la norme sup et $u : X \to \mathbb{R}$ l'application $u(x) = \lim_{j\to\infty} x_j$.

Exercice 218 Soit l^∞ l'espace des suites réelles muni avec la norme uniforme, i.e. $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$. On considére l'application $A : l^\infty \to l^\infty$ définie par

$$A(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (x_1, x_2/2, ..., x_n/n, ...) \ .$$

Montrer que

1. A est injective et continue avec $\|A\| = 1$. Par contre, A n'est pas surjective.
2. L'application réciproque A^{-1} n'est pas continue.

Exercice 219 Soit X un espace normé, $L : X \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle et $H = L^{-1}(\{0\})$ son noyau.

1. Montrer que, si L est continue, alors H est un sous-espace fermé dans X. Établir la relation
$$\mathrm{dist}(a, H) = \frac{|L(a)|}{\|L\|} \quad \text{pour tout } a \in X \ .$$
2. Réciproquement, supposons que le noyau H est un fermé. Démontrer alors que $\mathrm{dist}(a, H) > 0$ dès que $a \in X \setminus H$ et en déduire que L est continue de norme au plus $|L(a)|/\mathrm{dist}(a, H)$.
3. Peut-on généraliser ceci a des applications linéaires entre espaces normés ?

Exercice 220 Soit $X = \mathcal{C}([0, 1])$ avec la norme $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\, dt$. Montrer que la forme linéaire $f \in X \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$ n'est pas continue. Que peut-on en déduire pour le sous-espace des fonctions de X nulles en 0 ?

Exercice 221 Soit $X = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})\ ;\ (1+x^2)|f(x)| \text{ soit bornée}\}$. On pose $N(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|f(x)|$. Vérifier que N est une norme, puis montrer que la forme linéaire suivante L est continue et calculer sa norme :

$$L : E \to \mathbb{R} \quad \text{définie par} \quad L(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx \ .$$

Exercice 222 Soit $X = \mathbb{R}[x]$ l'ensemble des polynômes. Pour $P(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k$ on pose $\|P\| = \sup_k |a_k|$, $U(P)(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} a_k x^k$ et $V(P)(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^k$.

1. Montrer que $\|.\|$ définit une norme et que U et V définissent des applications linéaires de X dans X.
2. Examiner si U et V sont continues ?

Exercice 223 On désigne par E l'espace $C([-1,1])$ muni de la norme uniforme et par T la forme linéaire définie par

$$Tf = \int_{-1}^{1} \sin(\pi t)\ f(t)\ dt$$

pour $f \in E$. Vérifier que T est continue et calculer la norme de T.

Exercice 224 Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ avec la norme $\|f\| = \int |f|dx$; montrer que la forme linéaire $f \to f(0)$ n'est pas continue. Que peut-on en déduire pour le sous-espace des fonctions de E nulles en 0 ?

Exercice 225 Soit $E = C([0,1])$, $\mu(x) = \int_0^1 x(t)\ dt$, $\mu_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(\frac{k}{n})$.
1. Calculer $\|\mu\|$ et $\|\mu_n\|$.
2. Montrer que $\mu_n(x)$ converge vers $\mu(x)$ pour toute x dans E, mais que $\|\mu - \mu_n\| = 2$.

Exercice 226 On désigne par E l'espace $C([0,1])$ muni de la norme uniforme et l'opérateur A défini par

$$Af(x) = \int_0^x tf(t)\ dt + x\int_x^1 f(t)\ dt$$

pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$.
1. Vérifier que A est continu et calculer sa norme opérateur.
2. L'équation $Af = f$ a-t-elle dans E des solutions f non nulles ?

Exercice 227 Soit K un compact convexe d'un evn E. Soit u une application linéaire continue de E dans E telle que $u(K) \subset K$. On va montrer que u a un point fixe dans K.
1. On peut supposer que $0 \notin K$. Pour chaque $n \geqslant 1$, on désigne par S_n l'application définie sur E par $S_n(x) = \frac{1}{n}(x + u(x) + \cdots + u^{n-1}(x))$. Montrer que $S_n(K) \subset K$.
2. Montrer que pour tous entiers $n_1, n_2, \ldots, n_k$ en nombre fini,
   $S_{n_1} \circ \cdots \circ S_{n_k}(K) \subset S_{n_1}(K) \cap S_{n_2}(K) \cap \cdots \cap S_{n_k}(K)$.
   En déduire que $A = \cap_{n\geqslant 1} S_n(K)$ est non vide.
3. Montrer que tout $x \in A$ est point fixe de u.

[Exercice corrigé]

6.2 Formes linéaires continues

Exercice 228 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $||x|| = \sup\{|\langle x,y\rangle|\ ;\ ||y|| \leqslant 1\}$.
2. Montrer que l'espace des formes linéaires $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ (plus généralement $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ où $\dim E$ finie) est isométriquement isomorphe à $\mathbb{R}^n$ (ou E).

Exercice 229 Sur $M_n(\mathbb{R})$ on note $|A| = \sup_{||x||\leqslant 1} ||Ax||$ la norme opérateur de la matrice A, où $||x||$ désigne la morme euclidienne de x. Montrer que

$$|A| = \sup_{||x||\leqslant 1, ||y||\leqslant 1} |\langle Ax, y\rangle|$$

et en déduire que $|A| \leqslant \left(\sum |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 230 Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa norme euclidienne et f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $|| \int_{[0,1]} f(t)\ dt|| \leqslant \int_{[0,1]} ||f(t)||\ dt$.

7 Espaces métriques complets, Banach

7.1 Espaces métriques complets

Exercice 231 1. Pour $n, m \in \mathbb{N}^*$, on pose $d(n,m) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{N}^*$ qui induit la topologie discrète sur $\mathbb{N}^*$; est-elle complète ?

2. Montrer que $\overline{\mathbb{R}}$ est un espace métrique complet pour la distance $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$.

Exercice 232 Soit E un espace normé. Montrer qu'il est complet si et seulement si la sphère unité $S = \{x / \|x\| = 1\}$ est complète.

Exercice 233 1. Pour $x, y \in \mathbb{R}^*$ on pose $d(x,y) = |x-y| + |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$.
Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{R}^*$ qui induit la topologie usuelle et que $(\mathbb{R}^*, d)$ est complet.

2. Plus généralement soit U un ouvert d'un espace complet (X,d) ; comment peut-on définir une métrique δ sur U, équivalente à la métrique initiale, qui fasse de U un espace complet ?

Exercice 234 Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soit (x_n) une suite de Cauchy de E ; montrer qu'on peut en extraire une sous-suite (x_{n_k}) telle que la série de terme général $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ soit normalement convergente.
2. En déduire que E est complet si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.

Exercice 235 1. Montrer que l'espace $C([0,1])$ est complet pour la norme uniforme mais pas pour la norme $||.||_1$.

2. Montrer que l'espace S des suites réelles nulles à partir d'un certain rang, muni de la norme uniforme, n'est pas complet. Trouver un espace métrique complet contenant S comme sous-espace dense.

Exercice 236 1. Soit f un homéomorphisme d'espaces métriques $f : X \to Y$; montrer que X peut être complet sans que Y le soit.

2. On suppose de plus que f est uniformément continue. Montrer que si Y est complet, X l'est aussi.
3. On considère $E = \{f \in C^1([0,1])\ ;\ f(0) = 0\}$, muni de la métrique $d(f,g) = \inf(1, \sup|f'(t) - g'(t)|)$. Montrer que E est complet pour cette métrique.

Exercice 237 Soit E un Banach, A,B deux sous-espaces de E tels que $A \cap B = \{0\}$, A étant fermé et B de dimension finie.

1. Pour $b \in B$, on définit $[b] = d(b, A) = \inf_{a \in A} ||a + b||$. Vérifier que $[.]$ est une norme sur B.
2. En déduire qu'il existe $C > 0$ telle que $||a + b|| \geqslant C||b||$ pour tous $a \in A$ et $b \in B$.
3. Montrer que $A \oplus B$ est encore un sous-espace fermé de E.

Exercice 238 L'espace $(\mathbb{R}, d)$ est-il complet si d est l'une des métriques suivantes ?

1. $d(x,y) = |x^3 - y^3|$.
2. $d(x,y) = |\exp(x) - \exp(y)|$.
3. $d(x,y) = \log(1 + |x - y|)$.

Exercice 239 On considère pour $x, y \in \mathbb{R}$, $d(x,y) = \|f(x) - f(y)\|$, où f est une application continue injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que cette distance est complète si et seulement si f est d'image fermée dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 240 On considère l'espace des fonctions continues $X = \mathcal{C}([a,b])$.

1. Soit $\omega \in X$ une fonction qui ne s'annule pas sur $[a,b]$. Posons
$$d_\omega(f,g) = \sup_{t \in [a,b]} |\omega(t)(f(t) - g(t))| \ .$$
L'espace (X, d_ω) est-il complet ?
2. Montrer que l'espace $(X, \|.\|_1)$ n'est pas complet (où $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$).

Exercice 241 Soit $X = \mathcal{C}^1([a,b])$.

1. Est-ce un espace complet si on le muni de la norme uniforme $\|.\|_\infty$?

2. Considérons maintenant, pour $f \in X$, la norme
$$N(f) = \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\| + \sup_{t \in [a,b]} \|f'(t)\| \ .$$
L'espace (X, N) est-il complet ?

Exercice 242 Soit X l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang, et soit
$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \quad \text{pour } x, y \in X \ .$$

1. Montrer que X n'est pas complet pour la métrique ρ.
2. Trouver un espace de suites Y tel que (Y, ρ) soit complet et tel que X soit dense dans Y.
3. Que donne l'exercice si on remplace ρ par la norme uniforme ?

Exercice 243 Soit E un espace vectoriel normé. On dit qu'une série $\sum u_k$ est normalement convergente si la série $\sum \|u_k\|$ est convergente. On veut démontrer que E est complet si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.

1. Soit (x_n) une suite de Cauchy de E ; montrer qu'on peut en extraire une sous-suite (x_{n_k}) telle que la série de terme général $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ soit normalement convergente. En déduire que si toute série normalement convergente est convergente, alors E est complet.
2. Soit $\sum u_k$ une série normalement convergente. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que S_n est une suite de Cauchy. En déduire que si E est complet, alors toute suite normalement convergente est convergente.

Exercice 244 Soit (X, d) un espace métrique, et (x_n) une suite de Cauchy dans X. Vérifier :

1. La suite (x_n) est bornée même si la métrique est non bornée, mais il existe des suites bornées dont aucune sous-suite n'est de Cauchy.
2. Si (x_n) contient une sous-suite convergente, elle est convergente.
3. Soit (ε_k) une suite quelconque de réels > 0 ; il existe une sous-suite (x_{n_k}) de (x_n) telle que $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leqslant \varepsilon_k$.
4. Soit (y_n) une suite quelconque de X. Si $\sum_1^\infty d(y_n, y_{n+1}) < \infty$, la suite (y_n) est de Cauchy. Réciproque ?
5. On suppose cette fois la distance d ultramétrique. Dans ce cas (y_n) est de Cauchy si et seulement si $d(y_n, y_{n+1})$ tend vers 0.

Exercice 245 Vérifier que $\overline{\mathbb{R}}$ est un espace métrique complet pour la distance $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$.

Exercice 246 Sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, définissons
$$\begin{aligned} d(n,m) &= 0 \ \text{ pour } m = n \\ &= 1 + \frac{1}{n+m} \ \text{ pour } m \neq n \end{aligned}$$

1. Montrer que d est une métrique sur $\mathbb{N}$ pour laquelle il est complet.
2. Construire dans $(\mathbb{N}, d)$ une suite de boules fermées non vides emboîtées dont les rayons ne tendent pas vers 0, et d'intersection vide.

Exercice 247 Soit U un ouvert d'un espace complet (X, d) ; on note $F = U^c$ et $f(x,y) = |\frac{1}{d(x,F)} - \frac{1}{d(y,F)}|$ pour $x, y \in U$.
Montrer que $\delta(x,y) = \max(d(x,y), f(x,y))$ définit une distance sur U équivalente (topologiquement) à d et que (U, δ) est complet.

Exercice 248 Soit X un espace métrique et (a_n) une suite de Cauchy dans X.

1. Montrer que pour tout $x \in X$, la suite de réels $(d(a_n, x))$ a une limite. On note $f(x)$ cette limite ; montrer que l'application $x \to f(x)$ est continue de X dans $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\inf_{x \in X} f(x)$. Quand cette borne inférieure est-elle atteinte ?
3. Déduire de ce qui précède que si X n'est pas complet, il existe une application $\phi : X \to \mathbb{R}$ continue et non bornée.

Exercice 249 On considère pour f et g dans $E = C(\mathbb{R}, C)$,

$$d(f,g) = \sum_n \frac{1}{2^n} \min(1, \sup_{|x| \leqslant n} |f(x) - g(x)|).$$

Vérifier que d est une métrique sur E pour laquelle il est complet.
Montrer que la convergence pour d n'est autre que la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 250 Soit (X, d) un espace métrique et Y une partie de X ; on considère f une application surjective de X sur Y, et on pose pour u et v dans Y

$$D(u,v) = d(f^{-1}(\{u\}), f^{-1}(\{v\})) = \inf_{x \in f^{-1}(\{u\}), y \in f^{-1}(\{v\})} d(x,y).$$

1. Montrer que pour u et v dans Y, $D(u,v) \geqslant 0$; que $D(u,u) = 0$ et $D(u,v) = D(v,u)$; D vérifie-t-elle l'inégalité triangulaire ?
2. On suppose que pour u dans Y, $f^{-1}(\{u\})$ est un fermé de Y, et que pour u et v dans Y

   $$d(x, f^{-1}(\{v\})) = d(x', f^{-1}(\{v\}))$$

   pour tous x et x' dans $f^{-1}(\{u\})$. Montrer alors que D est une distance.
3. On suppose les conditions de 2. vérifiées. Montrer que Y est complet si X est complet.

7.2 Espaces normés, Banach

Exercice 251 Soient E, F des espaces normés et $A_n, A \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer l'équivalence entre :

1. $A_n \to A$ dans $\mathcal{L}(E,F)$.
2. Pour toute partie bornée $M \subset E$, la suite $A_n x$ converge uniformément vers Ax, $x \in M$.

Exercice 252 (Cours) Soit E un espace normé et F un espace de Banach. Alors $\mathcal{L}(E,F)$ est aussi un espace de Banach.

Exercice 253 On considère sur $C^1([0,1], \mathbb{R})$ les normes suivantes :

1. $\|f\| = \sup_{[0,1]} |f(x)|$
2. $\|f\| = \sup_{[0,1]} |f'(x)| + |f(0)|$
3. $\|f\| = \sup_{[0,1]} |f'(x) + f(x)| + |f(0)|$

Lesquelles sont complètes sur $C^1([0,1], \mathbb{R})$?

Exercice 254 Soit $(B, \|.\|)$ un espace de Banach et M, N deux sous-espaces de B tels que $B = M \oplus N$. On met sur B une nouvelle norme $\|z\|' = \|x\| + \|y\|$ si $z = x + y$.

1. Vérifier que $\|.\|'$ est bien une norme sur B et que $(B, \|.\|')$ est complet si et seulement si M et N sont fermés.
2. Montrer que si les projections P_M et P_N sur M et N sont continues, $(B, \|.\|')$ est encore un Banach.

Exercice 255 On considère $E = c$, l'espace des suites réelles convergentes ; montrer que, muni de la norme uniforme, E est complet et décrire son dual topologique.

Exercice 256 On considère E l'espace des séries convergentes, et on pose

$$\|\xi\| = \sup_n |\sum_{k=1}^{n} \xi_k|$$

1. Vérifier que ceci définit une norme sur E pour laquelle il est complet.
2. L'espace l^1 des séries absolument convergentes est un sous-espace de E ; montrer que les normes $\|.\|$ et $\|.\|_1$ ne sont pas équivalentes sur l^1 (en considérant une série de terme général $\xi_k = \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$.)
3. Montrer que l^1 est dense dans $(E, \|.\|)$.

Exercice 257 Pour tout $k > 0$ on note H_k le sous-espace de $C([0,1])$ constitué des fonctions lipschitziennes de constante k ie des fonctions f vérifiant $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$ pour tous x et y dans $[0,1]$. On pose aussi $H = \bigcup_{k>0} H_k$.

1. Montrer que H contient les fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$, mais que la fonction $\sqrt{x}$ n'est pas dans H.
2. Montrer que pour tout k, H_k est un espace de Banach pour la norme uniforme.
3. Montrer qu'il existe une suite de fonction de H qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers $\sqrt{x}$. En déduire que H n'est pas complet pour la norme uniforme.
4. Montrer que si on pose
$$\|f\| = \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} + |f(0)|,$$
on définit ainsi une norme sur l'espace E, pour laquelle l'espace est complet.

Exercice 258 Soit E un espace de Banach, $A \in \mathcal{L}(E)$, et $s,t \in \mathbb{R}$.

1. On rappelle que $e^{tA} = \sum_0^\infty \frac{t^n A^n}{n!} \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\|e^{tA}\| \leqslant e^{|t|\|A\|}$ et que $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$.
2. Soit $u_0 \in E$ et u la fonction vectorielle de variable réelle définie par $u(t) = e^{tA}u_0$. Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 259 Soit E un espace de Banach et F un sous-espace fermé de E.

1. Montrer que $N(\bar{x}) = \inf_{y\in F} \|x+y\| = d(x,F)$ définit une norme sur l'espace vectoriel quotient E/F.
2. Montrer à l'aide du critère sur les séries que E/F muni de N est un espace de Banach.

8 Théorème du point fixe

Exercice 260
1. Soit X un espace métrique et (f_n) une suite d'applications continues à valeurs dans un espace métrique Y, convergeant vers f uniformément sur X. Montrer que si (x_n) est une suite de points de X convergeant vers $x \in X$, alors $f_n(x_n)$ tend vers $f(x)$.
2. Application : Soit X un espace métrique compact, et soit (f_n) une suite d'applications continues de X dans X, ayant chacune un point fixe ; on suppose que la suite (f_n) converge vers une fonction f uniformément sur X. Montrer que f a aussi un point fixe.
3. Soit K un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ et f une application continue de K dans K vérifiant
$$\|f(x)-f(y)\| \leqslant \|x-y\|;$$
En considérant les fonctions f_n définies sur K par $f_n(x) = \frac{1}{n}f(x_0) + (1-\frac{1}{n})f(x)$, où $x_0 \in K$, montrer que f a un point fixe. Est-il unique ? Que se passe-t-il si K n'est plus convexe ?

Exercice 261 Soit E un espace métrique compact, f une application continue de E dans E et on note Ω l'ensemble de ses points fixes.

1. Montrer que Ω est un compact, qui est non vide dans le cas où $E = [a,b]$.
2. Si $\Omega = \emptyset$, montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $d(x, f(x)) \geqslant r$ pour tout $x \in E$.
3. On suppose que $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ pour tous $x \neq y$ de E. Montrer que Ω est réduit à un point a et que pour tout choix initial de $x_0 \in E$, la suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a.

Exercice 262 Pour $x,y \in X =]0,+\infty[$ on pose $\delta(x,y) = |\log x - \log y|$

1. Montrer que X muni de δ est complet alors qu'il ne l'est pas pour la métrique usuelle de $\mathbb{R}$.
2. Soit f une application de classe C^1 de X dans X vérifiant pour tout $x \in X$
$$x|f'(x)| \leqslant kf(x)$$
où k est un réel de $]0,1[$ fixé. Montrer que f a un seul point fixe dans X.

Exercice 263
1. On considère une matrice $A = (a_{ij})$ à coefficients réels telle que $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 < 1$. En utilisant le théorème du point fixe, montrer que quels que soient les réels $b_1, b_2, \cdots b_n$, le système d'équations linéaires
$$x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$
admet toujours une solution unique. En déduire $\det(I-A) \neq 0$.

2. Montrer sous les mêmes hypothèses que le système non linéaire

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} \sin(a_{ij} x_j) = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

admet une unique solution.

Exercice 264 On va montrer qu'il existe une et une seule h continue sur $[0,1]$ vérifiant $h(0) = 0$ et $h'(t) = \cos(th(t))$ pour tout $t \in [0,1]$. On note E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la métrique uniforme.

1. h est solution si et seulement si h est continue et $h(s) = \int_0^s \cos(th(t))\, dt$.
2. L'opérateur $T : E \to E$ défini par $Tf(s) = \int_0^s \cos(tf(t))\, dt$ est 1/2-contractant. Conclure.

Exercice 265 Soit $a, b \in E$ evn, $B_1 = \{x \in E / \|x-a\| = \|x-b\| = \frac{1}{2}\|a-b\|\}$, et pour $n > 1$, $B_n = \{x \in B_{n-1} / \|x-y\| \leqslant \frac{1}{2}\delta(B_{n-1}),\ \forall y \in B_{n-1}\}$, où $\delta(B)$ désigne le diamètre de l'ensemble B.

1. Montrer que $\delta(B_n) \leqslant \frac{1}{2}\delta(B_{n-1})$, et que $\bigcap_n B_n = \{\frac{a+b}{2}\}$.
2. Soit f une isométrie de E *sur* F evn, telle que $f(0) = 0$. Montrer en considérant la suite $(f(B_n))$ que pour tous $a, b \in E$,
$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$
En déduire que f est une isométrie linéaire. Que peut-on dire plus généralement d'une isométrie f de E sur F ?

Exercice 266 Soit $\alpha_n > 0$ tel que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ converge. Soit (X,d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application pour laquelle

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant \alpha_n d(x,y) \quad \text{pour tout } x, y \in X \text{ et } n \in \mathbb{N}\ .$$

Montrer que, sous ces conditions, f possède un unique point fixe $p \in X$, que pour tout point initial $x_0 \in X$, la suite des itérées $(x_n = f^n(x_0))_{n \geqslant 0}$ converge vers p et que la vitesse de convergence d'une telle suite est contrôlée par

$$d(p, x_n) \leqslant \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} \alpha_\nu\right) d(x_1, x_0)\ .$$

Exercice 267 Soit (X,d) un espace métrique complet et soit $f : X \to X$ une application telle que l'une de ces itérées f^n est strictement contractante, i.e. il existe $\rho < 1$ tel que

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant \rho d(x,y) \quad \text{pour tout} \quad x, y \in X\ .$$

Montrer que f possède un unique point fixe. Faire le rapprochement avec l'exercice 266.

Exercice 268 Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ qui est point fixe de l'opérateur T donné par

$$Tf(x) = 1 + \int_0^x f(t - t^2)\, dt\ .$$

On pourra commencer par établir que $T \circ T$ est une contraction. Utiliser ceci pour établir l'existence d'une fonction unique $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x - x^2)$.

Exercice 269 Soient $y \in \mathcal{C}([a,b])$ et $k \in \mathcal{C}([a,b] \times [a,b])$ des fonctions continues. On se propose de résoudre l'équation (intégrale de Fredholm) suivante :

$$x(s) - \int_a^b k(s,t) x(t)\, dt = y(s) \quad \text{pour } s \in [a,b] \tag{1}$$

d'inconnue $x \in \mathcal{C}([a,b])$. Pour ce faire on suppose que le "noyau" k satisfait l'hypothèse suivante :

$$\lambda := \max_{a \leqslant s \leqslant b} \int_a^b |k(s,t)|\, dt < 1 \quad \left(\text{ou même} \quad \max_{a \leqslant s,t \leqslant b} |k(s,t)| < \frac{1}{b-a}\right).$$

1. Rappeler que $(\mathcal{C}([a,b]), \|.\|_\infty)$ est un espace complet.

2. Soit $x \in \mathcal{C}([a,b]) \mapsto Ax \in \mathcal{C}([a,b])$ l'application donnée par
$$(Ax)(s) := \int_a^b k(s,t)x(t)\,dt + y(s)\ .$$
Noter que (1) équivaut à $Ax = x$ et qu'on cherche donc un point fixe de $x \mapsto Ax$. Déduire des hypothèses faites sur k qu'un tel point fixe $x \in \mathcal{C}([a,b])$ existe et que toute suite $A^n x_0$, $x_0 \in \mathcal{C}([a,b])$, converge uniformément vers ce point fixe x.
3. *Dépendance continue de la solution $x = x(y)$.*
Soient $y_1, y_2 \in \mathcal{C}([a,b])$ deux fonctions et $x_1, x_2 \in \mathcal{C}([a,b])$ les deux solutions associées de (1) ou, de façon équivalente, les points fixes des applications associées $x \mapsto A_i x$. Montrer que
$$\|x_1 - x_2\|_\infty = \|A_1x_1 - A_2x_2\|_\infty \leqslant \|y_1 - y_2\|_\infty + \lambda\|x_1 - x_2\|_\infty\ .$$
En déduire que
$$\|x_1 - x_2\|_\infty \leqslant \frac{1}{1-\lambda}\|y_1 - y_2\|_\infty$$
et donc que la solution x de (1) dépend continuement de la fonction y.

Exercice 270 On va montrer qu'il existe une et une seule h continue sur $[0,1]$ vérifiant $h(0) = 0$ et $h'(t) = \cos(th(t))$ pour tout $t \in [0,1]$. On note E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la métrique uniforme.

1. h est solution si et seulement si h est continue et $h(s) = \int_0^s \cos(th(t))\ dt$.
2. L'opérateur $T : E \to E$ défini par $Tf(s) = \int_0^s \cos(tf(t))\ dt$ est 1/2-contractant. Conclure.

Exercice 271 On désigne par E l'espace $C([0,1])$ muni de la norme uniforme et l'opérateur A défini par
$$Af(x) = \int_0^x tf(t)\ dt + x\int_x^1 f(t)\ dt$$
pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$.

1. Vérifier que A est continu et calculer sa norme opérateur.
2. L'équation $Af = f$ a-t-elle dans E des solutions f non nulles ?

Exercice 272 On considère $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ qui à f associe F définie par
$$F(t) = \begin{cases} 3/4\ f(3t) & \text{si}\ \ 0 \leqslant t \leqslant 1/3 \\ 1/4 + 1/2\ f(2-3t) & \text{si}\ \ 1/3 \leqslant t \leqslant 2/3 \\ 1/4 + 3/4\ f(3t-2) & \text{si}\ \ 2/3 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que F est bien continue et que T est 3/4-contractante.
2. On note h le point fixe de T. Montrer par récurrence $|h(\frac{k-1}{3^n}) - h(\frac{k}{3^n})| \geqslant 2^{-n}$.
Soit $a \in [0,1]$; montrer qu'il existe une suite (t_n) telle que $\lim t_n = a$ et $\lim |\frac{h(t_n)-h(a)}{t_n - a}| = +\infty$.
3. En déduire l'existence d'une fonction continue nulle part dérivable.

9 Applications uniformément continues

9.1 Applications uniformément continues

Exercice 273 1. Soit f une fonction réelle continue sur $[0,1]$; montrer que f est "presque lipschitzienne" au sens :
$\forall\varepsilon > 0\ \exists C_\varepsilon\ ;\ \forall x,y \in [0,1] \quad |f(x) - f(y)| \leqslant C_\varepsilon|x-y| + \varepsilon.$
2. Montrer qu'une fonction f uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant a|x| + b$ où a et b sont des constantes.

Exercice 274 1. Montrer qu'une fonction de (X,d) dans (Y,δ) n'est pas uniformément continue, si et seulement si on peut trouver $\varepsilon > 0$ et deux suites de points de X, (x_n) et (y_n) vérifiant
(i) $d(x_n, y_n)$ tend vers 0.
(ii) $\delta(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \varepsilon$.

2. Parmi les fonctions de variable réelle suivantes, lesquelles sont uniformément continues : $\sin(x^2)$, $x \sin x$, $\sin \frac{1}{x},\ x \neq 0$?

Exercice 275 Soit f une fonction continue de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que, si f est uniformément continue, elle est bornée. Réciproque ?

Exercice 276 Soit f une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty f(t)dt$ converge. Montrer que f tend vers 0 quand $x \to +\infty$. Retrouver ainsi le fait que la fonction $\sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue.

Exercice 277 Soit $E = C_b(\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme ; pour $f \in E$, on note f_a la translatée de f par a, ie la fonction $x \to f(x-a)$, et O_f l'ensemble des translatées de f. Soit f une fonction continue périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;

1. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que O_f est compact et connexe (considérer l'application $a \to f_a$).

Exercice 278 Soit (f_n) une suite d'applications croissantes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement vers une fonction f continue. Montrer que la convergence est uniforme sur $[0,1]$. *Indication :* $\varepsilon > 0$ étant fixé, montrer qu'il existe $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = 1$ tels que $f(x_{j+1}) - f(x_j) \leqslant \varepsilon,\ 1 \leqslant j \leqslant k-1$ et établir $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \sup_j |f_n(x_j) - f(x_j)| + \varepsilon$.

Exercice 279 Parmi les métriques suivantes définies sur $\mathbb{R}$, lesquelles sont uniformément équivalentes à la métrique usuelle ?

1. $|x^3 - y^3|$
2. $|\arctan x - \arctan y|$
3. $\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$

Exercice 280 Soit d_1 et d_2 deux distances sur un espace X. On considère les quatre assertions suivantes :
(i) Les métriques sont topologiquement équivalentes.
(ii) Les métriques sont uniformément équivalentes.
(iii) Les métriques sont Lipschitz-équivalentes (il existe A et B constantes telles que $A\, d_1 \leqslant d_2 \leqslant B\, d_1$).
(iv) (X, d_1) et (X, d_2) sont simultanément complets.
Etablir les implications entre ces propriétés et donner des contre-exemples lorsque les implications n'ont pas lieu.

Exercice 281 Soit d_1 et d_2 deux distances sur un espace X. Montrer qu'elles sont uniformément équivalentes si et seulement si (X, d_1) et (X, d_2) ont les mêmes applications réelles uniformément continues.
Indication : Raisonner par contraposition et considérer pour (x_n) et (y_n) vérifiant $\lim d_1(x_n, y_n) = 0$ et $d_2(x_n, y_n) \geqslant \varepsilon$, $A = \overline{\{x_1, x_2, ...\}}$, $B = \overline{\{y_1, y_2, ...\}}$ dans (X, d_2), et

$$f(x) = \frac{d_2(x, A)}{d_2(x, A) + d_2(x, B)}$$

Exercice 282 Soit δ la métrique sur $\mathbb{R}$ définie par $\delta(x, y) = |\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}|$. Montrer, à l'aide du théorème de prolongement de fonction uniformément continue, que l'identité $i : (\mathbb{R}, \delta) \to (\mathbb{R}, |.|)$ n'est pas uniformément continue.

Exercice 283 Soit (f_n) une suite de fonctions réelles convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ et soit g une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que la suite $(g \circ f_n)$ converge uniformément vers $g \circ f$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 284 Soit X un espace métrique.

1. Montrer que si X n'est pas complet, il existe une suite de Cauchy (a_n), non convergente, et telle que $a_p \neq a_q$ pour $p \neq q$.
2. Soit (b_n) une suite de Cauchy non convergente ; montrer que l'ensemble $B = \{b_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est fermé dans X.
3. Déduire des questions précédentes que si X n'est pas complet, on peut trouver une fonction continue $f : X \to [0,1]$ qui n'est pas uniformément continue.
Indication : Si (a_n) est définie par 1., construire $f : X \to [0,1]$ telle que $f(a_{2n}) = 0$ et $f(a_{2n+1}) = 1$.

Exercice 285 Soit f une application bijective d'espaces métriques $f : X \to Y$ uniformément continue et d'inverse continue. Montrer que si Y est complet, X l'est aussi.

Exercice 286 Soit (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques ; soit f une application surjective de X sur Y telle que $\delta(f(x), f(x')) = d(x,x')$ pour tous x,x' dans X. Vérifier que f est un homéomorphisme uniformément continu ainsi que f^{-1}. Donner des exemples sur $\mathbb{R}^n$ et décrire les isométries de $\mathbb{R}$.

Exercice 287 On considère l^1 et l^2 les espaces de suites réelles absolument et de carré sommables, et l'application F (non linéaire) de l^1 dans l^2 définie par $F(a) = b$ si $a = (a_n)$, $b = (b_n)$ avec $b_n = \mathrm{sign}\,(a_n)\sqrt{|a_n|}$. Vérifier que F est un homéomorphisme de l^1 sur l^2, uniformément continu mais d'inverse non uniformément continu.

9.2 Équicontinuité, théorème d'Ascoli

Exercice 288

1. Soit $k > 0$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions différentiables $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que $|f'(t)| \leqslant k$ pour tout $t \in]a,b[$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille équicontinue.
2. Si $L > 0$ et $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une suite d'applications L-lipschitziennes avec $\|f_n(0)\| = \sqrt{2}$, alors montrer que l'on peut extraire une sous-suite convergente de (f_n).

Exercice 289 Soient E, F des espaces normés et (f_n) une suite d'applications de E dans F équicontinue en $a \in E$. Montrer que, si la suite $(f_n(a))$ converge vers b, alors $(f_n(x_n))$ converge également vers b, si (x_n) est une suite de E telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.
L'équicontinuité est-elle nécessaire ici ?

Exercice 290 Soient E, F des espaces normés et (f_n) une suite d'applications équicontinues de E dans F. Montrer que l'ensemble des $x \in E$, pour lesquels $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans F, est un fermé.

Exercice 291 Soient (E,d) un espace métrique et $\mathcal{H}$ une famille équicontinue d'applications de E dans $\mathbb{R}$. Établir :

1. L'ensemble A des $x \in E$ pour lesquels $\mathcal{H}(x)$ est borné est ouvert et fermé.
2. Si E est compact et connexe et si $\mathcal{H}(x_0)$ est borné pour un point quelconque $x_0 \in E$, alors $\mathcal{H}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$.

Exercice 292 On considère la suite de fonctions $f_n(t) = \sin(\sqrt{t + 4(n\pi)^2})$, $t \in [0,\infty[$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une suite de fonctions équicontinues convergent simplement vers $f \equiv 0$.
2. La suite (f_n) est elle relativement compacte dans $(\mathcal{C}([0,\infty[), \|.\|_\infty)$? Que dit le théorème d'Ascoli ?

Exercice 293 Soit $K : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b])$ donné par $(Kf)(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)\,dt$, $k \in \mathcal{C}([a,b] \times [a,b])$, et soit (f_n) une suite bornée de $X = (\mathcal{C}([a,b]), \|.\|_\infty)$.

1. Rappeler pourquoi k est uniformément continue.
2. En déduire l'équicontinuité de (Kf_n).
3. Montrer que (Kf_n) contient une sous-suite convergente dans X.

Exercice 294 Soit $X = [0,1]$, $Y = [-1,1]$, $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2 x)$; on note A le sous-ensemble de $C(X,Y)$ constitué des (f_n), $n \geqslant 1$.

1. Montrer sans calculs que A est équicontinu.
2. Montrer que l'on a plus précisément $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \sqrt{2}|x-y|^{\frac{1}{2}}$ pour tous n, x, y. En déduire que le module d'équicontinuité de A est $\geqslant \varepsilon^2/2$.

Exercice 295 Pour quelles valeurs de $\alpha \geqslant 0$, la fonction $f(x) = \cos x^\alpha$ est -elle uniformément continue ?
On suppose cette condition remplie et on définit f_n par $f_n(x) = f(x+n)$. Montrer que l'on peut extraire de (f_n) une suite convergeant uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^+$. Peut-on avoir convergence uniforme sur tout $\mathbb{R}^+$?

Exercice 296 Soit $H = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \ / \ \int_\mathbb{R} |f(x)|^2 dx + \int_\mathbb{R} |f'(x)|^2 dx \leqslant 1\}$.

1. Montrer que si $f \in H$, $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.
2. Montrer que $||f||_\infty \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, pout toute $f \in H$.
3. Montrer que H est une partie équicontinue et bornée de $C_0(\mathbb{R})$.
4. Soit $\varphi(x) = (x^2-1)^2\ \mathbf{1}_{|x|\leqslant 1}$, et $f_n(x) = \varphi(x-n)$; montrer que $\lambda f_n \in H$ pour une constante λ bien choisie et que cette suite n'a aucune valeur d'adhérence dans $C(\mathbb{R})$. Conclusion ?

10 Applications différentiables

10.1 Applications différentiables

Exercice 297 Soit f une application f de E dans F espaces vectoriels normés de dimension finie.
On rappelle les implications suivantes : si $x_0 \in E$, “f de classe C^1 en x_0” $\Rightarrow$ “f différentiable en x_0” $\Rightarrow$ “f continue en x_0”. On sait de même que “f différentiable en x_0” $\Rightarrow$ “f admet des dérivées partielles en x_0” montrer que les réciproques sont fausses en général en s'inspirant de :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2 \sin\frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } y = 0 \\ y^2 \sin\frac{1}{y} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en } (0,0) \end{cases}$$

ou de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 298
1. Soit f une application de E dans F espaces vectoriels normés et supposons f différentiable en a ; montrer que pour tout vecteur $u \in E^*$, la dérivée de f en a dans la direction u existe , i.e. $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(a+hu) - f(a)\big)$ et l'exprimer à l'aide de $f'(a)$.
2. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^4+y^2}$. Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ dans toutes les directions, mais que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 299 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \text{ si } x \neq y, \quad F(x,x) = g'(x).$$

Montrer que F est de classe C^1 en tout point de $\mathbb{R}^2$ et calculer sa différentielle.

Exercice 300 Soit E^n l'espace des polynômes de degré $\leqslant n$. Etudier la différentiabilité des applications $P \mapsto \int_0^1 (P^3(t) - P^2(t))\, dt$ et $P \mapsto P' - P^2$.

Exercice 301 Soit H un espace préhilbertien sur $\mathbb{R}$, et $f(x) = ||x||$ de H dans $\mathbb{R}$; montrer que f est différentiable en tout point de $H\backslash\{0\}$, et calculer sa différentielle. (indic. étudier directement $||x+h||$ ou considérer la fonction composée $x \to ||x||^2 \to \sqrt{||x||^2}$.) Décrire le noyau $\mathrm{Ker} f'(x)$ en tout $x \neq 0$.

Exercice 302 Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n\backslash\{a\} \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(x) = \frac{a-x}{||x-a||^2}$.
1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{a\}$.
2. Montrer que $f'(x).h = \frac{Sh}{||x-a||^2}$ où S est la symétrie orthogonale d'axe $x - a$. Que peut-on dire de la transformation $f'(x)$ de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 303 Soit f une application différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, propre (i.e. $||f(x)||$ tend vers ∞ quand $||x|| \to \infty$), telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ $f'(x)$ soit injective. On va montrer que f est surjective. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $g(x) = ||f(x) - a||^2$;
1. Calculer $g'(x)$.
2. Montrer que g atteint sa borne inférieure en un point x_0 de $\mathbb{R}^2$, et que $g'(x_0) = 0$; en déduire le résultat.

Exercice 304 Soit, dans $\mathbb{R}^n$, F un sous-espace fermé, et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = d(x,F)$. On rappelle que f est 1-lipschitzienne, et que pour chaque x il existe $y \in F$ tel que $f(x) = d(x,y)$.
1. On suppose que f est différentiable en $x \notin F$. Montrer que $||f'(x)||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} \leqslant 1$.
2. On considère la fonction $\varphi : t \in [0,1] \to f((1-t)x + ty)$; en calculant $\varphi'(0)$ de deux façons, montrer que $f'(x).\frac{x-y}{||x-y||} = 1$ et $||f'(x)||_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} = 1$.
3. En déduire que y est unique.

Exercice 305 Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G, où E, F, G sont des evn de dimension finie.
1. Calculer $B'(a)$ sa différentielle en un point $a = (a_1, a_2)$ de $E \times F$.

2. En déduire, pour f et g deux applications différentiables de I intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, la différentielle de $t \to f(t) \wedge g(t)$ et de $t \to \langle f(t), g(t)\rangle$ en tout $t \in I$.
3. Application : Soit A un opérateur de $\mathbb{R}^n$ tel que $Ax \perp x$ pour tout x ; montrer que e^{tA} est une isométrie pour tout réel t. (Dériver $t \to ||e^{tA}x||^2$.)

Exercice 306 Soit E un espace de Banach et $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes linéaires continus de E.

1. Soit $A \in \mathcal{L}(E)$; montrer que l'application $\varphi : t \in \mathbb{R} \to e^{tA}$ est dérivable et calculer sa dérivée.
2. On suppose que la norme de E est associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $x \in E$. Montrer que l'application $\Phi : t \to \langle e^{tA}x, e^{tA}x\rangle$ est dérivable et calculer sa dérivée.
3. On suppose que A est antisymétrique. Montrer que pour tout t, e^{tA} est unitaire.

Exercice 307 Soit E et F deux evn sur $\mathbb{C}$. Une application de E dans F $\mathbb{C}$-linéaire est $\mathbb{R}$-linéaire, mais la réciproque est fausse.

1. Soit $\varphi : E \to F$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Montrer que φ est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si $\varphi(ix) = i\varphi(x)$ pour tout $x \in E$. En déduire les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui sont $\mathbb{C}$-linéaires.

   Soit U un ouvert de E et $f : U \to F$. On suppose f $\mathbb{R}$-différentiable en $a \in U$. Il est clair que f est $\mathbb{C}$-différentiable en a si et seulement si $f'(a)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.
2. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s'écrit $f(z) = u(z) + iv(z) = f(x + iy)$ avec u et v réelles, qu'on identifie à $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, traduire à l'aide de a) "f est $\mathbb{C}$-différentiable en $a = \alpha + i\beta$". En quels points les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ sont-elles $\mathbb{C}$-différentiables : $f_1(z) = e^x$; $f_2(z) = |z|^2$; $f_3(z) = e^{x-iy}$?
3. (extrait de septembre 99) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : U \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-différentiable en $a = \alpha + i\beta \in U$, telle que $f(a) \neq 0$. Montrer que si $g = |f|$ est $\mathbb{C}$-différentiable en $a = \alpha + i\beta \in U$, alors $f'(a) = 0$.

[Exercice corrigé]

Exercice 308 Soit $\alpha > 0$. Étudier la différientiabilité à l'origine de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui est définie par $f(0, 0) = 0$ et par
$$f(x, y) = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0)\ .$$

Exercice 309 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$
et $f(0, 0) = 0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, que pour tout $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)$ existe, mais que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 310 Soit $X = \mathcal{C}([0, 1])$ muni de la norme uniforme et soit f une application de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note F l'application $\varphi \mapsto f \circ \varphi$ de X dans X. Montrer que pour chaque $\varphi \in X$, $DF(\varphi)$ est l'opérateur linéaire de multiplication par $f' \circ \varphi$ dans X :
$$DF(\varphi) \cdot (h) = h\, f' \circ \varphi\ ,$$
et que DF est continue.

Exercice 311 Soit $\mathcal{F}$ l'algèbre des matrices carrés $p \times p$ munie d'une norme.

1. Soit $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ l'application qui associe à une matrice A son déterminant $f(A) = \det\,(A)$. Montrer qu'elle est différentiable et déterminer Df.
2. Pour $n \geqslant 1$, on considère l'application $\varphi_n(A) = A^n$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$. Montrer qu'elle est différentiable en toute matrice $A \in \mathcal{F}$.
3. On désigne par U l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{F}$. Montrer que U est un ouvert de $\mathcal{F}$ et calculer la différentielle de l'application $A \mapsto A^{-1}$ de U dans U.

Exercice 312 1. Que peut-on dire de la différentiabilité de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = \|x\|_\infty = \max\,(|x_1|, |x_2|)$?

2. Généraliser ceci à $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_\infty$, avec $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{F}$ l'ensemble des suites convergentes vers zero.

Exercice 313 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $x = (x_1, x_2) \mapsto \|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$. Est-ce qu'elle est différentiable ? Considérons maintenant l^1 l'espace des suites réelles muni de la norme $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$.

1. Montrer que pour toute forme linéaire continue L sur l^1 il existe une suite bornée $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...)$ telle que
$$L(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j \quad .$$
2. Montrer que la norme $\|.\|_1 : l^1 \to \mathbb{R}$ n'est pas différentiable en aucun point de l^1 (raisonner par l'absurde en utilisant (1.)).

Exercice 314 Dans un espace normé $(\mathcal{F}, N)$, on considére l'application $x \mapsto N(x)$. Rappeler que, lorsque cette application N est différentiable en $x \in \mathcal{F}$, alors
$$DN(x) \cdot (h) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(N(x + th) - N(x) \right) \ .$$
En déduire que N n'est pas différentiable en $0 \in \mathcal{F}$. Supposons N différentiable en $x \in \mathcal{F}$, alors justifier que N l'est aussi en λx, où $\lambda > 0$, et que $DN(x) = DN(\lambda x)$. En considérant la dérivée en $\lambda = 1$ de l'application $\lambda \mapsto N(\lambda x)$, montrer que $DN(x) \cdot (x) = N(x)$ et en déduire $|||DN(x)||| = 1$.

Exercice 315 Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ et de la norme associée $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$. Soit u un endomorphisme continu de $\mathcal{E}$ que l'on suppose symétrique, i.e.
$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle \quad \text{pour tout } \ x, y \in \mathcal{E} \ .$$
1. Montrer que l'application $x \in \mathcal{E} \mapsto \langle u(x), x \rangle$ est différentiable sur $\mathcal{E}$ et calculer sa différentielle. L'application $x \mapsto \|x\|^2$ est donc différentiable.
2. On définit une application $\varphi : \mathcal{E} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ en posant $\varphi(x) = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle}$. Établir qu'il s'agit d'une application différentiable. Calculer ensuite $D\varphi$. Montrer que, pour un élément non nul $a \in \mathcal{E}$, on a $D\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est vecteur propre de u.

10.2 Théorème des accroissements finis

Exercice 316 1. Soit f une application réelle continue et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f'(x)$ ait une limite quand $x \overset{<}{\to} b$; alors f se prolonge en une fonction continue et dérivable à gauche au point b.
2. Soit f une application continue et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et de dérivée croissante ; montrer que f est convexe sur I i.e. $f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$ pour tous $x < y$ de I et $t \in [0, 1]$. (Poser $z = (1-t)x + ty$ et appliquer les AF à $[x, z]$ puis $[z, y]$.)

Exercice 317 1. Montrer que l'identité des accroissements finis n'est pas vraie pour les fonctions vectorielles en considérant $f(x) = e^{ix}$.
2. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, on a vu que $f'(]a, b[)$ est connexe. Montrer que ceci est faux pour les fonctions vectorielles en considérant $f(x) = (x^2 \cos(\frac{1}{x}), x^2 \sin(\frac{1}{x}))$.

Exercice 318 Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R}^n)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E constitué de fonctions différentiables, telles que
$$||f'(x)|| \leqslant M, \ \ \forall x \in [0, 1], \ \ \forall f \in F, \ ||f|| \leqslant 1$$
où M est une constante fixée à l'avance. Montrer que la boule unité de F est compacte ; que peut-on dire de F ?

Exercice 319 (partiel du 5 décembre 1999) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2 - y, x^2 + y^2)$ et $g = f \circ f$.
1. Montrer que f et g sont de classe C^1.
2. Calculer en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ la matrice jacobienne de f notée $D_{(x,y)} f$; calculer la matrice jacobienne de g au point $(0, 0)$ notée $D_{(0,0)} g$.
3. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \overline{B_\rho((0, 0))}$ (la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon ρ) on a $||D_{(x,y)} g|| \leqslant \frac{1}{2}$.
4. Montrer que la fonction g admet un unique point fixe dans $\overline{B_\rho((0, 0))}$.

Exercice 320 On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x, y) = (\cos x - \sin y, \ \sin x - \cos y)$; on note $F^{(k)}$ l'application F composée k-fois

1. Montrer que $||F'(x,y)|| \leqslant \sqrt{2}$ pour tout (x,y).
2. En déduire que la suite récurrente définie par x_0, y_0 et pour $n \geqslant 1$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\cos x_n - \sin y_n), \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin x_n - \cos y_n)$$

converge pour tout (x_0, y_0). Quelle est sa limite ?

Exercice 321 Soit f une application différentiable de $]a,b[\subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$; on suppose qu'il existe $k > 0$ tel que

$$||f'(x)|| \leqslant k||f(x)||, \quad \forall x \in]a,b[.$$

Montrer que si f s'annule en un point $x_0 \in]a,b[$, f est identiquement nulle dans $]a,b[$ (montrer que $E = \{x \in]a,b[\ ;\ f(x) = 0\}$ est ouvert).

Exercice 322 Soit E un espace de Banach, U un ouvert de E et f une application différentiable de U dans $\mathbb{R}$ telle que l'on ait $||f'(x)|| \leqslant k|f(x)|, \ \forall x \in U$. Montrer que pour x assez voisin de $a \in U$,

$$|f(x)| \leqslant e^{k||x-a||}\ |f(a)|.$$

Indication : considérer l'application $t \in [0,1] \to f(a + t(x-a)))$.

Exercice 323 On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y) = (x^2+y^2, y^2)$; on note $F^{(k)}$ l'application F composée k-fois avec elle-même. On considère $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ \lim_{k\to\infty} F^{(k)}(x,y) = (0,0)\}$.

1. Vérifier que $(x,y) \in \Omega \Longleftrightarrow F(x,y) \in \Omega$.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $||(x,y)|| < \varepsilon \Longrightarrow ||F'(x,y)|| \leqslant \frac{1}{2}$; en déduire que 0 est intérieur à Ω puis que Ω est ouvert.
3. Montrer que Ω est connexe.

Exercice 324 On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x,y) = (x^2+y^2, y^2)\ .$$

Soit $\Omega = \{p \in \mathbb{R}^2\ ;\ \lim_{k\to\infty} F^k(p) = (0,0)\}$.

1. Vérifier que $p \in \Omega$ si et seulement si $F(p) \in \Omega$.
2. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|||DF(p)||| < \frac{1}{2}$ si $\|p\| < \delta$. En déduire que $(0,0)$ est dans l'intérieur de Ω puis que Ω est un ouvert.
3. Utiliser l'homogénéité de F pour montrer que Ω est connexe.

Exercice 325 Soient E, F des espaces normés, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ une application continue.

1. Soit a un point de Ω. Si f est différentiable dans $\Omega \setminus \{a\}$ et si l'application $x \in \Omega \setminus \{a\} \mapsto Df(x)$ admet une limite $T \in \mathcal{L}(E,F)$ quand x tend vers a dans Ω, montrer que f est différentiable au point a et que $Df(a) = T$ (appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $g : x \mapsto f(x) - T(x)$).
2. Supposons f différentiable dans Ω. Montrer que $Df : \Omega \to \mathcal{L}(E,F)$ est continue en $a \in \Omega$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|f(a+h) - f(a+k) - Df(a)(h-k)\| \leqslant \varepsilon\|h-k\| \quad \text{si } \ \|h\| < \delta \textit{ et } \|k\| < \delta\ .$$

3. Supposons maintenant qu'il existe une application continue $x \in \Omega \mapsto T_x \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que pour tout $x \in \Omega$ et tout $h \in E$

$$\lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = T_x(h)\ .$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $Df(x) = T_x$ pour tout $x \in \Omega$. (On pourra considérer la fonction $g(t) = f(x+th) - tT_x(h)$.)

Exercice 326 Soient E, F des espaces de Banach, Ω un ouvert connexe de E et $f_n : \Omega \to F$ une suite d'applications différentiables. On suppose que cette suite vérifie :

(i) Il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $(f_n(x_0))$ converge dans F.

(ii) La suite (Df_n) converge uniformément sur toute boule fermée $B_F(a,r) \subset \Omega$.

Alors, montrer que (f_n) converge uniformément sur toute boule fermée de Ω et que, si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ et $L_x = \lim_{n\to\infty} Df_n(x)$, alors f est différentiable avec $Df(a) = L_a$, $a \in \Omega$.

Exercice 327 Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 qui est injective sur Ω et telle que $Df(x)$ soit injective pour tout $x \in \Omega$.

1. Montrer que, pour tous $a, b \in \Omega$,
$$\|f(b) - f(a) - Df(a)(b-a)\| \leqslant \|b-a\| \sup_{c\in[a,b]} \|Df(c) - Df(a)\| .$$
2. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 telle que $f_n \to f$ et $Df_n \to Df$ uniformément sur tout compact de Ω. On va montrer : *pour tout compact K de Ω il existe n_0 tel que f_n soit injective sur K pour $n \geqslant n_0$.*
   - En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existerait K compact et, pour une infinité d'entiers n, des points $a_n, b_n \in K$ tels que $f_n(a_n) = f_n(b_n)$.
   - Quitte à extraire, montrer qu'alors $b_n - a_n \to 0$.
   - Utiliser (1.) pour en déduire une contradiction.

11 Théorème d'inversion locale et des fonctions implicites

11.1 Théorèmes d'inversion ; difféomorphismes

Exercice 328
1. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et telle que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$. Montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ et que f^{-1} est différentiable en tout point de $f(\mathbb{R})$.
2. Soit f définie par $f(x) = x + x^2 \sin \frac{\pi}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
   Montrer que $f'(0)$ existe et est $\neq 0$, mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Expliquer.

Exercice 329
1. Montrer que l'application $\varphi : (r, \theta) \to (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $]0, \infty[\times] - \pi, \pi[$ sur le plan privé de la demi-droite $\mathbb{R}^-$. Si $f(x, y) = g(r, \theta)$ donner les formules de passage entre les dérivées partielles de f et celles de g.
2. Soit U le plan privé de l'origine, et $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.
   Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U mais n'est pas un difféomorphisme global.
3. Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (x + y, xy)$. Trouver un ouvert connexe maximal $U \subset \mathbb{R}^2$ tel que g soit un difféomorphisme de U sur $g(U)$.
4. Soit h l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \to (e^x \cos y, e^x \sin y)$.
   Montrer que h est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$; que $h'(x, y)$ est un élément de $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$; mais que h n'est pas un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $h(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 330 Soit $i = \sqrt{-1}$. Calculer la matrice jacobienne de l'application $(x, y) \to (X, Y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $X + iY = (x + iy)^3$.

Exercice 331 Soit U l'ouvert $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Soit $(x, y, z) \to (X, Y, Z)$ l'application inversion de pôle 0, de puisssance 1, définie dans U, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, par les formules
$$X = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \quad ; \quad Y = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \quad ; \quad Z = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$$
Calculer la matrice jacobienne de cette transformation (on posera $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) et vérifier que cette matrice est égale à son inverse.

Exercice 332 Réconsidérez l'exercice 331 dans l'esprit suivant : "si f est un difféomorphisme, la matrice inverse de la matrice jacobienne de f est la matrice jacobienne de f^{-1}."

Exercice 333 Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et I la matrice unité dans E. En considèrant $\varphi : E \to E$ telle que $\varphi(A) = A^2$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que toute matrice A vérifiant $||A - I|| < \alpha$ admette une racine carrée.

Exercice 334
1. Montrer que si a, b sont voisins de 1, on peut trouver $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $y + e^{xy} = a,\ x + e^{-xy} = b$.

2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par $f(x,y) = (x\sin(xy)+y, y\cos(xy)+x)$, et soit (a_n, b_n) une suite tendant vers $(0,0)$. Montrer que si $f(a_n, b_n)= 0$ pour tout n, la suite (a_n, b_n) stationne.

Exercice 335 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 $\varphi = (f,g)$. On considère u, v réels et on cherche x, y tels que

$$(*) \quad f(x,y) = u, \ g(x,y) = v.$$

1. On suppose que la différentielle de φ est de rang 2 en tout point de U. Montrer que pour tout (u,v) le système $(*)$ admet une solution, unique localement. Que peut-on dire si la différentielle est de rang 2 en un point de U seulement ?
2. A-t-on des solutions si la différentielle est de rang 0 ?
3. On suppose maintenant que la différentielle de φ est de rang 1 en tout point de U. Si f'_x ne s'annule pas sur U, montrer que $\psi : (x,y) \to (f(x,y), y)$ définit un difféomorphisme d'un ouvert $V \subset U$ sur $\psi(V)$. En déduire G telle que $g(x,y) = G(f(x,y))$ sur V. Que peut-on dire des solutions du système $(*)$?

Exercice 336 Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni d'une norme quelconque, et B_r la boule fermée $||x|| \leqslant r$. Soit f un C^1-difféomorphisme entre deux ouverts U et V de E, contenant 0, tel que $f(0) = 0$. On pose $A = f'(0) \in \mathcal{L}(E)$. Soit $0 < \varepsilon < 1$.

1. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \in B_R$,
$$||A^{-1}(f(x)) - x|| \leqslant \varepsilon \ ||x||.$$
2. Montrer qu'il existe $R' > 0$ tel que pour $0 \leqslant r \leqslant R'$,
$$(1-\varepsilon)\ A(B_r) \subset f(B_r) \subset (1+\varepsilon)\ A(B_r).$$
3. En déduire que $\lim_{r\to 0} \frac{\text{vol } f(B_r)}{\text{vol } (B_r)} = |\det A|$.

Exercice 337 Démontrer le résultat suivant (théorème d'inversion globale) :
Soit E, F deux Banach, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application de classe C^1 sur U. Alors f est un C^1-difféomorphisme de U sur $f(U)$ si et seulement si :
(i) f est injective ;
(ii) $f'(x) \in \text{Isom}(E,F)$ pour tout $x \in U$.

Exercice 338 1. On considère l'application φ de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par $(x,y,z) \to (e^{2y}+e^{2z}, e^{2x}-e^{2z}, x-y)$. Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur son image que l'on précisera.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et F l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par $(x,y,z) \to (e^{x-y+2z}+e^{-x+y+2z}, e^{2x}+e^{2y}-2\lambda e^{x-y}, e^{2x}+e^{2y}-2e^{-x+y})$. Montrer que F s'écrit $G\circ\varphi$, G à préciser, et que c'est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur son image si et seulement si $\lambda \geqslant 0$.

Exercice 339 On va proposer trois démonstrations possibles de l'exercice classique suivant : soit f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans lui-même, telle que $|f'(x)| \leqslant k$ pour tout x réel, où $k \in]0,1[$. Alors F définie par $F(x,y) = (x+f(y), y+f(x))$ est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ **sur** lui-même.

1. Remarquer que F est injective et $F'(x,y) \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ pour tout (x,y).
   Reste à établir la surjection.
2. 1ère méthode : Montrer que F est propre ($\lim ||F(x,y)|| = +\infty$ quand $||(x,y)|| \to +\infty$) et que si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $g(x,y) = ||F(x,y)-(a,b)||^2$ est différentiable et atteint sa borne inférieure en un point annulant $g'(x,y)$; conclure.
3. 2ème méthode : Montrer que $F(\mathbb{R}^2)$ est à la fois ouverte et fermée. Conclure.
4. 3ème méthode : Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, appliquer le théorème du point fixe à l'application $\phi(x,y) = (a-f(y), b-f(x))$; conclure.

Exercice 340 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x + a\sin y, y + b\sin x)$.

1. Montrer que si $|ab| < 1$, f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.
2. Montrer que si $|ab| = 1$, f n'est plus un difféomorphisme mais reste un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Exercice 341 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que

$$||f(x) - f(y)|| \geqslant k||x - y||$$

pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$, k étant une constante > 0. On va montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

1. Montrer que f est injective et que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermée dans $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $f'(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
3. En déduire que $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert-fermé de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 342 Soit P un polynôme de degré 3 normé, de racines $x_1 < x_2 < x_3$:

$$P(t, x_1, x_2, x_3) = \Pi_{l=1}^3 (t - x_l) = t^3 + \sum_{k=1}^{3} a_k t^{k-1}.$$

Les coefficients a_k sont des fonctions polynômiales, donc de classe C^1, des racines. On pose $\Omega = \{x_1 < x_2 < x_3\}$ et on définit $f : x \in \Omega \to (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. On va montrer que f est un C^1-difféomorphisme de Ω sur $f(\Omega)$.

1. Vérifier que f est injective sur Ω.
2. On appelle J la matrice jacobienne de f, et V la matrice de coefficients $v_{ij} = x_i^{j-1}$. En calculant $\dfrac{\partial P}{\partial x_k}(t, x_1, x_2, x_3)$ de deux façons, montrer que VJ est une matrice diagonale inversible si $x \in \Omega$. Conclure.
3. En déduire la dérivée de f^{-1} en tout point de $f(\Omega)$.

Exercice 343 Soit G un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ une application continue dans $\overline{G}$ et C^1 dans G. Pour tout $x \in G$, on suppose $Df(x)$ inversible. Démontrer que, sous ces conditions, l'application $x \mapsto \|f(x)\|$ atteint son maximum en un point du bord $\partial G = \overline{G} \setminus G$.

Exercice 344 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, Ω un ouvert connexe de E et soit $f : \Omega \to E$ une application de classe C^1 telle que $|||Df(x)||| \leqslant c$, pour tout $x \in \Omega$, où $0 \leqslant c < 1$. Montrer que $Id_{|E} - f$ est un difféomorphisme C^1 de Ω sur son image.

Exercice 345 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^1. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $h, x \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle Df(x)(h), h \rangle \geqslant \alpha \langle h, h \rangle \quad .$$

1. En considérant la fonction $t \mapsto \varphi(t) = \langle f(a + t(b - a)), b - a \rangle$, montrer que
$$\langle f(b) - f(a), b - a \rangle \geqslant \alpha \langle b - a, b - a \rangle \quad \text{pour tout } \ a, b \in \mathbb{R}^n \ .$$
En déduire que f est une application fermée.
2. Démontrer que, pour tout $x \in E$, $Df(x)$ et un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$. En déduire que f est une application ouverte.
3. Conclure que f est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ sur lui même.

Exercice 346 Soit φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\varphi(x, y) = \left(\sin(\frac{y}{2}) - x \ , \ \sin(\frac{x}{2}) - y \right) \quad .$$

1. Justifier que φ est de classe C^1, calculer sa différentielle et voir que $D\varphi(x, y)$ est inversible pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer que φ est un C^1- difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}^2)$ et justifier que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert.
3. Montrer que φ^{-1} est lipschitzienne (on prendra comme norme sur $\mathbb{R}^2$: $\|(x, y)\| = |x| + |y|$). En déduire que l'image $\varphi(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.
4. Calculer $D\varphi^{-1}(p)$ où $p = (1 - \pi/2, \sqrt{2}/2 - \pi)$.

11.2 Théorème des fonctions implicites

Exercice 347
1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ et C l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) = 0$.

   En quels points (a,b) peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites ? Calculer la dérivée de la fonction implicite lorsqu'elle existe et écrire l'équation de la tangente à C.
2. Montrer que l'équation $e^x + e^y + x + y - 2 = 0$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite φ de x dont on calculera le développement limité à l'ordre 3 en 0.
3. Montrer que les équations $x + y - zt = 0,\ xy - z + t = 0$ définissent au voisinage de $(0,1)$ deux fonctions implicites $x = \varphi_1(z,t),\ y = \varphi_2(z,t)$ avec $\varphi_1(0,1) = 1$, dont on calculera les différentielles en ce point.

Exercice 348 Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \to F(u,v) \in \mathbb{R}$ une application de classe C^1, telle que $F(0,0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial v}(0,0) \neq 0$. On considère $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\varphi(x,y,z) = (xy, x^2 - y^2 - z)$ et l'application $f = F \circ \varphi$. Montrer que l'équation $f(x,y,z) = 0$ définit au voisinage de $(0,0)$ une application $z = \psi(x,y)$ vérifiant

$$x\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2(x^2 + y^2).$$

Exercice 349 (novembre 1999) Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f : O \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $(a,b,c) \in O$ tel que $f(a,b,c) = 0$.

1. Donner une condition suffisante pour qu'on puisse résoudre : et x en fonction de (y,z) et y en fonction de (x,z) et z en fonction de (x,y). Plus précisément, donner une condition suffisante pour qu'il existe U voisinage de a, V voisinage de b, W voisinage de c avec $U \times V \times W \subset O$, et $\varphi : V \times W \to U$, $\chi : U \times W \to V$, $\psi : U \times V \to W$ des fonctions de classe C^1 tels que pour $(x,y,z) \in U \times V \times W$:

$$f(x,y,z) = 0 \Longleftrightarrow x = \varphi(y,z) \Longleftrightarrow y = \chi(x,z) \Longleftrightarrow z = \psi(x,y).$$

2. Si la condition donnée en 1. est satisfaite, démontrer que pour $(x,y,z) \in U \times V \times W$ tel que $f(x,y,z) = 0$ on a

$$\partial_1\varphi(y,z)\partial_2\chi(x,z)\partial_1\psi(x,y) = -1.$$

Exercice 350 On considère $E = M_n(\mathbb{R})$, $F = GL(n,\mathbb{R})$ et l'application Ψ de $F \times E$ dans E définie par $\Psi(A,B) = AB - I$. Montrer à l'aide du théorème des fonctions implicites que $\varphi : A \in F \to A^{-1}$ est différentiable en tout point de F et retrouver sa différentielle.

Exercice 351 On considère le système d'équations d'inconnues x et y :

$$x = \frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1, \quad y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2}.$$

1. Montrer que pour chaque $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution (x_0, y_0), et que la fonction ainsi définie est continue..
2. Montrer en considérant la fonction $F(x,y,t) = (x - \frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1, \quad y - \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2})$, que le système admet une unique solution $x = x(t),\ y = y(t)$ constituée de fonctions C^∞.
3. Donner un développement limité à l'ordre 2 de $x(t), y(t)$ au point $(0,0)$.

Exercice 352 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0,0)$. Montrer qu'il existe un intervalle I contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.

Exercice 353 Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Démontrer que, pour x suffisamment proche de 0, il existe un unique $y = y(x) > 0$ tel que $F(x,y) = 0$. Vérifier, sans résolution explicite, que $y'(x) = -\frac{x}{y}$.

Exercice 354 On considère le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 - 2z^2 & = & 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 & = & 4 \end{array} \right. .$$

Montrer que, pour x proche de l'origine, il existe des fonctions positives $y(x)$ et $z(x)$ telles que $(x, y(x), z(x))$ soit solution du système. On déterminera y' en fonction de x, y et z' en fonction de x, z.

Exercice 355 Considérons $F(x, y) = y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + ... + a_1(x)y + a_0(x)$ un polynôme à coefficients variables. On suppose :

1. les fonctions $x \mapsto a_j(x)$ sont C^1, $j = 0, 1, ..., n-1$,
2. pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}$, le polynôme $y \mapsto F(x_0, y)$ a un zéro simple $y_0 \in \mathbb{R}$.

Démontrer que, dans ces conditions, $F(x, y)$ possède, pour x voisin de x_0, un zéro $y(x)$ qui lui est proche de y_0 et que la dépendance $x \mapsto y(x)$ est C^1.

Exercice 356 Donner l'allure de $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \ x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y = 0\}$ au voisinage des points $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

Exercice 357 Montrer que l'équation $e^x + e^y + x + y - 2 = 0$ définit, au voisinage de l'origine, une fonction implicite φ de x dont on calculera le développement limité d'ordre trois en 0.

11.3 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Exercice 358 Déterminer, parmi les sous-ensembles définis ci-dessous, ceux qui sont des sous-variétés :

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}$;
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ xy = 0\}$;
3. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ et \ x^2 + y^2 - x = 0\}$;
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y^2 = x^3\}$;
5. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2 + y^2 = \tan(\alpha)z^2\}$;

Exercice 359 Soient α et β des fonctions de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par $\varphi(x) = (\alpha(x), 0, \beta(x))$. Donner des conditions à α, β pour que $\mathcal{C} = \varphi(\mathbb{R})$ soit une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit maintenant $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application $f(x, y) = (\alpha(x)\cos(y), \alpha(x)\sin(y), \beta(x))$. On cherche encore des conditions pour α, β sous lesquelles $\mathcal{S} = f(\mathbb{R}^2)$ soit une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
3. Notons $p = f(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. Quel est le lien entre les espaces tangents $T_p\mathcal{S}$ et $T_p\mathcal{C}$.

Exercice 360

1. Montrer que l'équation $xy + xz + yz + 2x + 2y - z = 0$ définit au voisinage de $(0, 0, 0)$ une surface. Donner l'équation du plan tangent de cette surface à l'origine.
2. Montrer que les équations $4xy + 2xz + 4y - z = 0$ et $xy + xz + yz + 2x + 2y - z = 0$ définissent au voisinage de l'origine une courbe. Déterminer l'espace tangent de cette courbe à l'origine.

Exercice 361 Soit $F = (F_1, ..., F_k)$ une application C^1 d'un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^k$. Notons $M = \{x \in U \ ; \ F(x) = 0\}$ et soit $a \in M$.

1. Établir l'équivalence des propriétés suivantes :
   - $DF(a)$ est surjective.
   - Les formes linéaires $DF_1(a), ..., DF_k(a)$ sont linéairement indépendantes.
   - $\operatorname{Ker} DF(a) = \bigcap_{i=1}^k \operatorname{Ker} DF_i(a)$ est de dimension $m - k$.
2. Un point $a \in M$ est dit *point régulier* si $DF(a)$ est surjective. Montrer que l'ensemble des points réguliers de M est un ouvert de M.

Exercice 362 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un polynôme homogène de degré $\alpha > 0$ à n variables.

1. En calculant la dérivée de $\lambda \mapsto f(\lambda x)$ de deux manières différentes, établir l'identité d'Euler :
$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha\, f(x) \quad \text{pour tout } \ x \in \mathbb{R}^n \ .$$
2. Soit a un réel non nul. Montrer que $X_a = f^{-1}(\{a\})$ est une sous-variété de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$. Établir ensuite que, pour $a_1 > a_2 > 0$, X_{a_1} et X_{a_2} sont difféomorphes.
3. Supposons que φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ avec $\varphi(X_{a_1}) = X_{a_2}$ et soit $p \in X_{a_1}$. Exprimer l'espace tangent $T_{\varphi(p)}X_{a_2}$ en fonction de $T_pX_{a_1}$.

Exercice 363 Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application C^∞ donnée par $f(A) = \det(A)$.

1. Montrer que
$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\det(I + \lambda X) - 1}{\lambda} = \mathrm{tr}(X) \quad , \quad X \in M_n(\mathbb{R}) \ .$$
En déduire $Df(I)(X)$.
2. En remarquant que
$$\frac{\det(A + \lambda X) - \det(A)}{\lambda} = \det(A) \frac{\det(I + \lambda A^{-1} X - 1)}{\lambda} \ ,$$
pour A une matrice inversible, calculer $Df(A)(X)$ lorsque A est inversible.
3. Montrer que $Sl_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \ ; \ \det(A) = 1\}$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$ (on pourra faire le lien avec l'exercice 362) dont l'espace tangent en I est
$$T_I Sl_n(\mathbb{R}) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \ ; \ \mathrm{tr}(X) = 0\} \ .$$

Exercice 364 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $a \in E$ et $f : E \to E$ un difféomorphisme de classe C^1. On suppose que $f^n = id$ et $f(a) = a$. On pose $A = Df(a)$ et $u(x) = \sum_{p=1}^{n} A^{-p} f^p(x)$ pour $x \in E$.

1. Montrer que u est un difféomorphisme local en a tel que $u \circ f = A \circ u$.
2. Soit F l'ensemble des points fixes de f. Montrer que F est une sous-variété de E.
3. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (x, y + y^3 - x^2)$. Montrer que g est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$. En déduire que 2) n'est plus nécessairement vrai si on supprime l'hypothèse $f^n = id$.

12 Différentielles d'ordre supérieur, formule de Taylor, extremums

12.1 Différentielles d'ordre supérieur

Exercice 365 (Rappel du Cours) Soient E_1, E_2 et F des espaces normés et $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire continue. Montrer que B est de classe C^∞ et déterminer les différentielles $D^k B$.

Exercice 366 Soient E et F des espaces de Banach et $f : E \to F$ une application de classe C^2.

1. Soit $h \in E$ et $\varphi_h : E \to F$ l'application définie par $\varphi_h(x) = Df(x)(h)$. Justifier que
$$D^2 f(a)(k, h) = D\varphi_h(a)(k) \quad \text{pour tout } \ k \in E \ .$$
2. Supposons que, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, $f(tx) = t^2 f(x)$. Montrer que $D^2 f(0)(x, x) = 2f(x)$ pour tout $x \in E$.
3. Soit $a, h, k \in E$ et soit $\Psi : \mathbb{R}^2 \to F$ définie par $\Psi(t, s) = f(a + th + sk)$. Calculer $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial s}(0, 0)$.

Exercice 367 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $Df(x)$ est un automorphisme orthogonal, i.e. $Df(x)$ est linéaire bijective et conserve le produit scalaire :
$$\langle Df(x)(h), Df(x)(k) \rangle = \langle h, k \rangle \quad \text{pour tout } \ h, k \in \mathbb{R}^n \ .$$
Montrer que l'application f est elle même un automorphisme orthogonal.
Indications :

1. Déterminer la différentielle de $x \mapsto \langle Df(x)(h), Df(x)(k) \rangle$.
2. Vérifier que $A(h, k, l) = \langle Df(x)(h), D^2 f(x)(k, l) \rangle$ est antisymétrique par rapport aux deux premières variables et symétrique par rapport aux deux dernières variables.
3. En déduire que $A(h, k, l) = 0$ pour tous $h, k, l \in \mathbb{R}^n$ puis conclure.

Exercice 368
1. Trouver les applications $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = 0$.
2. Trouver les applications $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \ .$$
(Indication : poser $\varphi(u, v) = \frac{1}{2}(u + v, u - v)$ et $G = F \circ \varphi$).

Exercice 369 Soient E, F, G des Banach et $u : E \to F$, $v : F \to G$ deux applications C^2. Calculer, à l'aide de la définition, la différentielle seconde de $w = v \circ u$.

12.2 Fonctions harmoniques

Exercice 370 Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *harmonique* si $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 0$ pour tout $x \in U$. Une fonction $f(x,y)$ est dite *radiale* si ses valeurs au point (x,y) ne dépendent que de la distance $r = \sqrt{x^2+y^2}$ à l'origine, c'est à dire si $f(x,y) = F(r) = F(\sqrt{x^2+y^2})$, où $F = F(r)$ est une fonction d'une seule variable. Montrez que les seules fonctions radiales et harmoniques, dans $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine, sont les fonctions $C\ln(r) + D = C\ln(\sqrt{x^2+y^2}) + D$, où C et D sont des constantes.

Exercice 371 Vérifiez que les fonctions suivantes sont harmoniques dans $\mathbb{R}^2$:

1. $e^x \cos y$;
2. $x^3 - 3xy^2$;
3. pour tout entier $k \geqslant 0$, la fonction $f(x,y) = r^k \cos(k\theta)$, où r et θ sont les coordonnées polaires de (x,y).

Exercice 372 Exprimez en coordonnées polaires : $y^2\dfrac{\partial^n f}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^n f}{\partial x \partial y} + x^2\dfrac{\partial^n f}{\partial y^2} - x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Exercice 373 Soit U l'ouvert $\mathbb{R}^3$ privé de l'axe des z.

1. Vérifiez que la fonction $f(x,y,z)$, qui vaut $e^z \cos\frac{\theta}{2}\frac{\sin r}{\sqrt{r}}$ en coordonnées cylindriques, est harmonique sur U.
2. Soit λ une constante réelle. Montrer qu'une fonction du type $f(x,y,z) = e^z\cos(\lambda\theta)u(r)$ est harmonique dans U si et seulement si $u = u(r)$ est solution de l'équation différentielle (dite de *Bessel*) :
$$r^2u''(r) + ru'(r) + [r^2 - \lambda^2]u(r) = 0. \qquad (E_\lambda)$$
3. Vérifiez, que pour $\lambda = 3/2$, la fonction $u(r) = \dfrac{\sin r - r\cos r}{r\sqrt{r}}$ convient.

Exercice 374 Dans $\mathbb{R}^3$ privé de l'origine, montrez que les seules fonctions harmoniques et *radiales* (c'est-à-dire ne dépendant que de la distance ρ de (x,y,z) à l'origine) sont les fonctions $f(x,y,z) = \frac{C}{\rho} + D = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + D$, où C et D sont des constantes.

Exercice 375 Soient ρ, θ, φ les coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$. On pose $\sin\varphi = t$. Montrer que, pour qu'une fonction de la forme $f(x,y,z) = \rho^n P(t)$, où n est un entier $\geqslant 0$, soit harmonique, il faut et il suffit que la fonction $t \mapsto P(t)$ soit solution de l'équation différentielle (dite *de Legendre*) :
$$(1-t^2)P''(t) - 2tP'(t) + n(n+1)P(t) = 0. \qquad (D_n)$$
Pour $n = 0,1,2,3,4,5$, vérifiez, en le calculant par la méthode des coefficients indéterminés, qu'il y a un polynôme $P_n(t)$, et un seul, de degré n, solution de (D_n), et tel que $P_n(1) = 1$. [Remarque : ce fait vaut pour tout n ; les polynômes P_n s'appellent polynômes de Legendre].

Exercice 376 Dans $\mathbb{R}^n$, on pose $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n^2}$, et $\rho = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Soit une fonction *radiale* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(\rho)$. Montrer que $\Delta f = F''(\rho) + (n-1)F'(\rho)$. Si $n \geqslant 3$, en déduire que les seules fonctions radiales et harmoniques dans $\mathbb{R}^n$ privé de l'origine sont les $f(x,y,z) = \frac{C}{\rho^{n-2}} + D$, où C et D sont des constantes.

Exercice 377 $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + \langle \nabla f \mid \nabla g\rangle$.

Exercice 378 Une fonction f de classe C^4 (par exemple à 2 variables) est dite *biharmonique* si
$$\Delta(\Delta f) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \equiv 0.$$
Ces fonctions interviennent en théorie de l'Elasticité. Bien entendu toute fonction harmonique est biharmonique. Montrez que, si f et g sont deux fonctions harmoniques, alors la fonction $xf + (x^2+y^2)g$ est biharmonique.

12.3 Formule de Taylor, extremums

Exercice 379 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application C^∞ et soit $n \geqslant 1$. Établir l'équivalence des propriétés suivantes :
- $f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0$.
- $f(x) = x^n g(x)$ avec $g \in C^\infty$.

2. Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et soit $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On suppose $f(0) = Df(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g_{i,j} \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ telles que $f(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j g_{i,j}(x)$.

Exercice 380 Déterminer approximativement la valeur de $1,05^{1,02}$ avec une erreur d'au plus $\varepsilon < 10^{-2}$ (Indication : Appliquer Taylor à la fonction $f(x, y) = x^y$).

Exercice 381 Montrer que si $x = 1,32 \pm 10^{-2}$ et $y = 0,45 \pm 10^{-2}$, alors $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} = 0,14 \pm 10^{-2}$.

Exercice 382 Ecrire le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 au voisinage de (0,0) pour la fonction $f(x, y) = \frac{e^x}{\cos y}$. En déduire la limite $\frac{e^x-(1+x)\cos y}{(x^2+y^2)\cos y}$ quand (x, y) tend vers (0,0).

Exercice 383 Soit $f(x, y)$ une fonction de classe C^2 au voisinage du cercle $x^2 + y^2 = 1$. On pose $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = a$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) = b$. Pour tout nombre réel θ, soit $F(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$. Calculez $F''(0)$ en fonction de a et b.

Exercice 384 Déterminer les extremums (locaux et/ou globaux) de :
1. $f(x, y) = x^2 - y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. $f(x, y) = x^3 - y^3$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
4. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 385 Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel λ, la nature des extremums de la fonction $f(x, y) = y(x^2 + y^2 - 2\lambda y)$.

Exercice 386 Soit $f : (t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mapsto f(t, x, y) \in \mathbb{R}$ une application de classe C^2 telle que
- $\frac{\partial^2 f}{\partial(x,y)^2}$ soit une matrice définie positive en tout point et
- $(x, y) \mapsto f(0, x, y)$ atteint son minimum en (x_0, y_0).

Montrer que, si t est voisin de 0, l'application $(x, y) \mapsto f(t, x, y)$ atteint son minimum en $(x(t), y(t))$, où $t \mapsto (x(t), y(t))$ est une application de classe C^1 sur ce voisinage de 0.

Exercice 387 Soit $g(x, y, z) = xyz - 32$, $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\ g(x, y, z) = 0\}$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application $f(x, y, z) = xy + 2yz + 2xz$. Déterminer $\min\{f(x, y, z) ; (x, y, z) \in S\}$.

Exercice 388 Déterminer le point p du plan $\Sigma = \{(x, y, x+y) ;\ x, y \in \mathbb{R}\}$ qui réalise la distance dist $(\Sigma\ ,\ (1, 0, 0))$.

Exercice 389 1. Déterminer les extremums de la fonction $f(x, y) = xy$ sur le cercle unité $S = \{(, x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 1\}$.

2. Même question pour la fonction $f(x, y) = xy^2$.

Exercice 390 Déterminer le minimum et maximum de la fonction $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ sur l'intersection du plan $\Sigma = \{x + y + z = 0\}$ avec la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 391 Déterminer les extremums de la fonction $f(x, y, z) = 2x + 3y + 2z$ sur l'intersection du plan d'équation $x + z = 1$ avec le cylindre $\mathcal{Z} = \{x^2 + y^2 = 2\} \subset \mathbb{R}^3$.

13 Equations différentielles

13.1 Equations différentielles : rappels

Exercice 392 1. Pour chacune des équations suivantes où $y = y(x)$ est réelle de variable réelle, décrire les solutions en précisant leur intervalle maximal de définition et dessiner les trajectoires :

$$(i)\ y' = e^{-y};\quad (ii)\ y' - y = e^x;\quad (iii)\ xy' - 2y = 0;\quad (iv)\ x^2y' - y = x^2 - x.$$

2. Quelles sont les courbes isoclines de l'équation $y' = y^2 - x$; en déduire l'allure des trajectoires.

Exercice 393 Soit f, g deux fonctions réelles continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, et on suppose que $g^{-1}(0)$ est fini ou discret ; montrer que la solution de l'équation $y' = f(x)g(y),\ y(x_0) = y_0$ s'obtient sous forme implicite, et préciser son intervalle de définition.
Exemples : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ g(y) = \sqrt{1-y^2}$; $f(x) = 1,\ g(y) = y - y^2$.

Exercice 394 On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + y' + y = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E) et étudier le comportement des solutions en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f'' + f' + f$ soit T-périodique. Montrer que $f(x+T) - f(x)$ est solution de (E). En déduire que si f est bornée sur $\mathbb{R}$, f est elle-même T-périodique.

Exercice 395 On considère les deux équations différentielles du second ordre

$$(\mathcal{E}_1) \qquad y'' = \sin x \qquad (\mathcal{E}_2) \qquad y'' + \omega^2 y = \sin x$$

où ω est un nombre réel de module strictement inférieur à 1.

1. Trouver la solution y de l'équation $\mathcal{E}_1$ vérifiant $y(0) = 0,\ y(\pi) = 4\pi$.
2. Décrire la solution générale de l'équation $\mathcal{E}_2$, et prouver ainsi que la solution y_ω vérifiant $y_\omega(0) = 0,\ y_\omega(\pi) = 4\pi$, a pour expression
$$y_\omega(x) = 4\pi \frac{\sin \omega x}{\sin \pi\omega} - \frac{\sin x}{1-\omega^2}.$$
3. Trouver, à x fixé, la limite de $y_\omega(x)$ quand ω tend vers 0. Interprétation.
4. On restreint x à parcourir l'intervalle $[0, \pi]$, et on suppose $0 \leqslant \omega \leqslant \frac{1}{2}$. A l'aide de la formule de Taylor, montrer que $|\pi \sin \omega x - x \sin \pi\omega| \leqslant \pi^3\omega^3$. En déduire : $|y_\omega(x) - y(x)| \leqslant A\omega^2$, où A est une constante.

Exercice 396 On considère l'équation différentielle du second ordre

$$(\mathcal{E}) \qquad y'' + y = f(x)$$

où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1. On suppose que f est un polynôme de degré n. On note E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leqslant n$. Montrer que l'application u, définie sur E par $u(P) = P'' + P$, est une application injective de E dans lui-même.
En déduire que l'équation $(\mathcal{E})$ a une et une seule solution polynômiale g qui est de même degré que f.
2. On suppose maintenant que f est une fonction continue quelconque sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction
$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\ dt$$
est une solution particulière de $(\mathcal{E})$; en déduire la solution générale de l'équation.
3. Montrer que si f vérifie l'inégalité $f(t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, toutes les solutions de $(\mathcal{E})$ sont des fonctions bornées. A-t-on la même conclusion si la fonction f est seulement bornée sur $\mathbb{R}$?

13.2 Solutions maximales d'équations différentielles

Exercice 397 (Méthode de Picard) On construit de proche en proche la suite de fonctions réelles (y_n) par la relation
$$y_0(x) = 1, \quad y_n(x) = 1 + \int_0^x (y_{n-1}(t))^2 dt.$$

1. On suppose d'abord $x \in [0, 1[$. Montrer que la suite (y_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{1-x}$. En déduire que y_n tend, quand $n \to \infty$, vers une limite qui est la solution de l'équation différentielle $y' = y^2$ valant 1 en 0.
2. Si $-1 < x \leqslant 0$, montrer que (y_{2n}) et (y_{2n+1}) sont des suites adjacentes, telles que, pour $n \geqslant 1$, $\frac{1}{1-x} \leqslant y_{2n} \leqslant 1$ et $1 + x \leqslant y_{2n+1} \leqslant \frac{1}{1-x}$; retrouver la solution de l'équation sur $]-1, 1[$ valant 1 en 0.

Exercice 398 1. En suivant la méthode d'itération de Picard, trouver la solution des équations avec condition initiale :

(i) $x'(t) = ax(t) + b;\ x(0) = 0$.

(ii) $x'(t) = \sin x(t);\ x(0) = 0$.

2. Soit A une matrice $n\times n$ constante. Trouver par la méthode de Picard la solution de $X'(t) = A\,X(t); X(0) = X_0$; retrouver ainsi la solution de
$x''(t) = -x(t);\ x(0) = 0, x'(0) = 1$.
3. Soit cette fois $A(t)$ une famille de matrices $n \times n$ de fonctions continues, telle que pour s, t, on ait $A(s)A(t) = A(t)A(s)$. Trouver la solution de l'équation $X'(t) = A\ X(t); X(0) = X_0$ (on montrera que $B(s)B(t) = B(t)B(s)$ où $B(t) = \int_0^t A(u)\ du$).

Exercice 399 On considère l'équation (1) $\quad x' = 3x^{2/3}$ avec condition initiale $x(0) = 0$.

1. Soit φ une solution de (1) définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(0) = 0$; on pose $\lambda = \inf\{t \leqslant 0;\ \varphi(t) = 0\} \geqslant -\infty$ et $\mu = \sup\{t \geqslant 0;\ \varphi(t) = 0\} \leqslant +\infty$. Montrer que φ est identiquement nulle sur (λ, μ).
2. Montrer que φ vaut $(t-\lambda)^3$ si $t \leqslant \lambda$, 0 sur $[\lambda, \mu]$ et $(t-\mu)^3$ si $t \geqslant \mu$; en déduire toutes les solutions maximales de (1) définies sur $\mathbb{R}$ avec $x(0) = 0$.

Exercice 400 On considère l'équation différentielle $x' = |x| + |t|$;

1. Montrer que pour tout x_0 réel, il existe une solution maximale (φ, J) telle que $\varphi(0) = x_0$.
2. Déterminer la solution maximale correspondant à $x_0 = 1$, en distinguant les cas $t \geqslant 0$ et $t < 0$, et vérifier qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Combien de fois est-elle dérivable ?

Exercice 401 On considère l'équation différentielle $x' = |x| + |t|$.

1. Montrer que pour tout réel x_0, il existe une solution maximale (φ, J) telle que $\varphi(0) = x_0$.
2. Déterminer la solution maximale correspondant à $x_0 = 1$, en distinguant les cas $t \geqslant 0$ et $t < 0$, et vérifier qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Combien de fois est-elle dérivable ?

Exercice 402 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(t, x) = 4\frac{t^3 x}{t^4 + x^2}$ si $(t, x) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad . \tag{2}$$

1. L'application f, est-elle continue et/ou localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable ? Que peut-on en déduire pour l'équation (2) ?
2. Soit φ une solution de (2) qui est définie sur un intervalle I ne contenant pas 0. On définit une application ψ par $\varphi(t) = t^2\psi(t)$, $t \in I$. Déterminer une équation différentielle (2') telle que ψ soit solution de cette équation, puis résoudre cette équation (2').
3. Que peut-on en déduire pour l'existence et l'unicité des solutions de l'équation différentielle (2) avec donnée initiale $(t_0, x_0)) = (0, 0)$?

Exercice 403 Soit l'équation différentielle

$$x''' - xx'' = 0 \quad . \tag{3}$$

où x est une application trois fois dérivable, définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Mettre cette équation différentielle sous la forme canonique
$$y'(t) = f(t, y(t)) \ ,$$
où f est une application que l'on déterminera.
2. Soient $t_0, a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique solution maximale φ de l'équation (3) qui satisfasse aux conditions initiales
$$\varphi(t_0) = a \ , \ \varphi'(t_0) = b \ \ et \ \ \varphi''(t_0) = c \ .$$
3. Soit φ une telle solution maximale. Calculer la dérivée de la fonction
$$t \mapsto \varphi''(t) \exp\left(-\int_a^t \varphi(u)\, du\right) \ .$$
En déduire que la fonction φ est soit convexe, soit concave sur son intervalle de définition. Déterminer φ dans le cas où $\varphi''(a) = 0$.

13.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Exercice 404 On considère l'équation différentielle (de Ricatti) sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathcal{E}) \qquad x'(t) = a(t)x^2(t) + b(t)x(t) + c(t),$$

où $a, b, c \in C(\mathbb{R}, R)$. Soit $x_i, 1 \leqslant i \leqslant 4$, quatre solutions distinctes définies sur I. On pose $B = \dfrac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}\dfrac{x_4 - x_2}{x_4 - x_1}$.

1. Montrer que B est bien défini sur I.
2. Montrer que B est une fonction constante sur I (utiliser la dérivée logarithmique).

Exercice 405 On considère l'équation différentielle (de Bernoulli) sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathcal{E}) \qquad y' + y + xy^2 = 0.$$

1. Recherche des solutions qui ne s'annulent jamais. Transformer l'équation par le difféomorphisme $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to (x, \frac{1}{y})$ en une équation $(\mathcal{E}')$ qu'on résoudra. En déduire une famille (φ_λ) de solutions de $(\mathcal{E})$ avec leur intervalle maximal de définition.
2. Montrer que par tout point (x_0, y_0) du plan avec $y_0 \neq 0$, il passe une solution φ_λ. En déduire toutes les solutions de $(\mathcal{E})$.

Exercice 406 Soit f un champ de vecteurs de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, et, (1) $x' = f(x)$, l'équation associée.

1. Soit $x_0 \in U$ tel que $f(x_0) = 0$. Si $\varphi : J \to U$ est une solution de (1) telle que $\varphi(t_0) = x_0$ pour un $t_0 \in J$, alors $\varphi(t) = x_0$ pour tout $t \in J$.
2. Si f est bornée sur U et $\varphi : J \to U$ est une solution de (1) où $J =]a, b[$, $b \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{t\to b} \varphi(t)$ existe.
3. Soit $\varphi : J \to U$ une solution de (1) où $J \supset]0, +\infty[$, et supposons en outre que $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = a \in U$. Montrer que $f(a) = 0$.

Exercice 407 Soit f un champ de vecteurs de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, et on suppose (pour simplifier) que, pour toute donnée initiale x de $\mathbb{R}^n$, il existe une unique solution passant par x au temps $t = 0$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. On note $\phi(t, x)$ cette solution (ou ϕ le flot du champ).

1. Montrer qu'on a $\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(s + t, x)$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$. et la vérifier sur l'équation $x' = x^2, x(0) = \alpha \geqslant 0$ aprés avoir précisé le domaine de définition du flot.
2. On fait $n = 2$; décrire le flot lorsque $f(x, y) = (-x, y); \quad (y, x); \quad (-y, x)$, et vérifier la relation précédente.

Exercice 408 (Fonctions implicites et Cauchy-Lipschitz) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to R$, de classe C^2, et (a, b) un point tel que $f(a, b) = 0$, et $f'_y(a, b) \neq 0$. Montrer que si $y = \varphi(x)$ est la fonction implicite associée à $f(x, y) = 0$, φ est solution de l'équation différentielle :

$$y' = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}; \; y(a) = b.$$

Réciproque.

Exercice 409 (Inégalité de Gronwall) Soit u, v deux applications de $[0, \beta]$ dans $\mathbb{R}$ continues et positives telles que

$$u(t) \leqslant C + \int_0^t u(s)v(s)\; ds$$

où C est une constante positive ou nulle. Montrer que $u(t) \leqslant Ce^{\int_0^t v(s)\; ds}$.

Exercice 410 Soit f une application K-lipschitzienne sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. On va démontrer que le flot de solutions de $x' = f(x)$, supposé défini sur un intervalle $[t_0, t_1]$, dépend continument de la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

1. Soit $x_1,\ x_2$ deux telles solutions ; montrer que si $t \in [t_0, t_1]$,

$$||x_1(t) - x_2(t)|| \leqslant ||x_1(t_0) - x_2(t_0)||e^{K(t-t_0)}$$

2. En déduire le résultat et le vérifier sur l'exemple : $x' = x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 411 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^n$, $f(t,x)$ une fonction continue de $I \times E$ dans E telle que $||f(t,x_1) - f(t,x_2)|| \leqslant k(t)\ ||x_1 - x_2||$, où k est une fonction continue $\geqslant 0$ définie sur I.

1. On considère J intervalle compact $\subset I$ et l'opérateur T défini sur $C(J,\mathbb{R}^n)$ par
$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\ ds;$$
montrer que pour p assez grand, T^p est contractante ; en déduire que l'équation $x' = f(t,x)$ admet une unique solution définie sur J tout entier telle que $x(t_0) = x_0$.
2. Montrer que l'équation $x' = f(t,x)$ admet une unique solution telle que $x(t_0) = x_0$, définie sur I tout entier (on pourra écrire I comme union d'intervalles compacts).
3. Exemples : Montrer que les solutions maximales des équations
$y'' = -\sin y, y(0) = a, y'(0) = b$ (qu'on mettra sous forme canonique), et $x' = A(t).x, x(0) = x_0$ où $A(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est constituée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 412 On considère l'équation $xx'' = (x')^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, $x_0 \neq 0$ et x'_0 étant donnés dans $\mathbb{R}$, il existe une unique solution φ définie au voisinage de 0, telle que $\varphi(0) = x_0$ et $\varphi'(0) = x'_0$.
2. Si de plus $x'_0 \neq 0$, on peut supposer que φ est un C^1–difféomorphisme d'un voisinage de 0 sur un voisinage de x_0 (pourquoi ?) ; on note ψ l'application réciproque et on pose $z(x) = \varphi'(\psi(x))$. Calculer $z'(x)$, trouver l'équation satisfaite par z et expliciter z ; en déduire une expression de φ.
3. Quelle est la solution φ de l'équation telle que $\varphi(0) = x_0 \neq 0$ et $\varphi'(0) = 0$.

Exercice 413

1. On cherche à résoudre le problème
$$x' = t^2 + tx \quad , \quad x(0) = 0\ .$$
Écrire l'équation intégrale associée et utiliser les cylindres de sécurités pour justifier que le procédé itératif de Picard donne une suite de fonctions (x_n) convergent uniformément sur $[-1/2, 1/2]$ vers une solution du problème. Partant de $x_0 \equiv 0$, déterminer ensuite cette suite (x_n) et la solution du problème donné.
2. Résoudre avec ce procédé itératif le problème
$$x' = tx \quad , \quad x(0) = 1\ ,$$
puis aussi
$$\begin{array}{ll} x'_1 = x_2x_3\ , & x_1(0) = 0\ , \\ x'_2 = -x_1x_3\ , & x_2(0) = 1\ , \\ x'_3 = 2\ , & x_3(0) = 0\ , \end{array}$$
en commençant avec $x_0(t) = (0,1,0)$.

Exercice 414 Calculer les premiers termes de l'itération de Picard avec les conditions initiales données. Si possible trouver des solutions explicites, y compris leurs domaines de définition.

1. $x' = x + 2$; $x(0) = 2$.
2. $x' = x^{4/3}$; $x(0) = 0$.
3. $x' = x^{4/3}$; $x(0) = 1$.
4. $x' = 1/(2x)$; $x(1) = 1$.

13.4 Systèmes à coefficients constants

Exercice 415 On rappelle les différentes méthodes pour résoudre un système différentiel linéaire à coefficients constants $X'(t) = A.X(t)$ sur E de dimension finie :

1. On met A sous forme triangulaire et on résout de proche en proche le nouveau système obtenu par changement de base avant de revenir au système initial.
2. On met A sous forme de Dunford, $P^{-1}AP = D + N$, où D semi-simple et N nilpotente, qui commutent. On calcule ainsi $e^{tA}.X_0$, la solution valant X_0 au temps $t = 0$.
3. On utilise le théorème de Cayley-Hamilton pour établir des relations entre les puissances de A et calculer ainsi e^{tA}.

4. (cf. Cartan) On décompose $E = \oplus_i E_i$ en sous-espaces caractéristiques, on calcule e^{tA_i} où $A_i = A_{|E_i}$, puis $X(t) = \sum_i e^{tA_i} v_i$, si $X_0 = \sum_i v_i$.
5. On cherche une base de solutions par identification sous la forme de polynômes-exponentielles, suivant le résultat du cours.

Résoudre les systèmes différentiels de matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -12 \\ -1 & 2 & -20 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 416 Soit A un opérateur de $\mathbb{R}^n$ et $x' = Ax$ le système associé.

1. On suppose que A laisse un sous-espace E invariant ; montrer que si φ est une solution de condition initiale $\varphi(t_0) \in E$ alors $\varphi(t) \in E$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Que peut-on dire des solutions du système si A est nilpotente ; ?
3. On suppose que A a une valeur propre de partie réelle < 0 ; montrer qu'il existe au moins une solution φ telle que $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$.
4. A quelles conditions le système n'a-t-il que des solutions bornées ?

Exercice 417 Montrer que $\left(I + \frac{A}{n}\right)^n$ converge vers e^A quand $n \to \infty$ en majorant la différence. Retrouver ainsi la valeur de $\det e^A$.

Exercice 418 Soit $E = \mathbb{C}^n$, $A \in \mathcal{L}(E, E)$ et le système différentiel $X' = AX$.

1. On suppose que $X = e^{r_1 t} u_1 + e^{r_2 t} u_2$ est solution, où $u_i \in E$ et $r_i \in \mathbb{C}$ distincts. Montrer que $e^{r_1 t} u_1$ et $e^{r_2 t} u_2$ sont solutions.
2. On suppose que $e^{rt}(u + tv)$ est solution où $u, v \in E$ et $v \neq 0$. Montrer que u n'est pas proportionnel à v et que $\dim \ \mathrm{Ker}(A - rI_E)^2 \geqslant 2$.

Exercice 419 Trouver la solution générale de l'équation $y^{(4)} + y = 0$ sous forme réelle. On admet que la fonction $f(a) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(at)}{1+t^4}\, dt$ vérifie cette équation. Sachant que $\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, montrer que pour $a \geqslant 0$

$$f(a) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}} \Big(\cos(\frac{a}{\sqrt{2}}) + \sin(\frac{a}{\sqrt{2}}) \Big).$$

Exercice 420 Résoudre le système

$$(S) \quad \begin{cases} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_1 \end{cases}$$

en utilisant d'abord les valeurs propres de la matrice A définissant ce système, puis en calculant A^n et e^{tA}.

Exercice 421

1. Soit le système

$$x' = Ax \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs propres de A puis un système de solutions de $x' = Ax$.

2. Même exercice avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 422 On considère le système linéaire $x'(t) = A(t)x(t)$, où $A \in \mathcal{C}([0, \infty))$. Soit φ une solution non-triviale de ce système et soit

$$\gamma = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|\varphi(t)\| \quad , -\infty \leqslant \gamma \leqslant \infty .$$

1. Montrer que γ ne dépend pas du choix de la norme $\|.\|$ de $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer que γ est une valeur finie si on suppose que les coefficients de la matrice $A(t)$ sont des fonctions bornées (on utilisera l'inégalité de Gronwall).
3. Dans le cas où A est une matrice constante diagonalisable, montrer que γ est forcément la partie réelle d'une valeur propre de A.

Exercice 423 Résoudre le système $x' = 2x-y$, $y' = x+2y$. Quelle est la solution vérifiant $x(0) = 1$, $y(0) = -2$?

Exercice 424 Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $A \in M(n,\mathbb{R})$ une matrice préservant E. Si $x(t)$ est une solution de l'équation $x' = Ax$ telle que $x(t_0) \in E$, montrer que $\forall t \in \mathbb{R} : x(t) \in E$.

Exercice 425 Classifier et esquisser les portraits de phase des équations $x' = Ax$ pour $A \in M(2,\mathbb{R})$ ayant zéro comme valeur propre.

Exercice 426 Pour quelle(s) valeur(s) de k l'origine est-elle un puits pour l'équation $x' = Ax$?

1. $\begin{pmatrix} a & -k \\ k & 2 \end{pmatrix}$,
2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ k & -4 \end{pmatrix}$,
3. $\begin{pmatrix} k^2 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$,
4. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & k \end{pmatrix}$.

Exercice 427 Trouver les solutions du système $x' = -y$, $y'' = -x - y + y'$.

Exercice 428 Soit $A \in M(n,\mathbb{R})$. Montrer que si toutes les solutions de l'équation $x' = Ax$ sont périodiques de même période, alors A est semi-simple et le polynôme caractéristique est une puissance de $\lambda^2 + b^2$ pour un certain $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 429 Soit $A \in M(4,\mathbb{R})$ semi-simple, et soient $\pm ai$, $\pm bi$, $a > 0$, $b > 0$ les valeurs propres.

1. Montrer que si a/b est rationnelle, alors toutes les solutions de $x' = Ax$ sont périodiques.
2. Montrer que si a/b est irrationnelle, alors il existe une solution non-périodique $x(t)$ telle que $M < |x(t)| < N$ pour certaines constantes $M, N > 0$.

Exercice 430 Si A est nilpotente, quelle est la forme des solutions de l'équation $x' = Ax$?

Exercice 431 Trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit

1. diagonalisable, semi-simple, nilpotente.

Exercice 432 Trouver toutes les solutions périodiques de l'équation $x^{(4)} + 2x'' + x = 0$.

13.5 Résolvantes

Exercice 433 On considère l'équation différentielle $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$.
Ecrire le système différentiel du premier ordre associé et déterminer le noyau résolvant $R(t,t_0)$ de ce système. En déduire e^{tA} pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 434

1. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} e^{-2t}\cos t & -\sin t \\ e^{-2t}\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ est la résolvante du système linéaire $x'(t) = A(t).x(t)$ où
$$A(t) = \begin{pmatrix} -2\cos^2 t & -1-\sin 2t \\ 1-\sin 2t & -2\sin^2 t \end{pmatrix}.$$
En déduire la solution du système $x'(t) = A(t).x(t) + b(t)$ avec $b(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ e^{-t}\sin t \end{pmatrix}$
2. On considère maintenant l'équation différentielle $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = f(t)$ où f est une application continue sur $\mathbb{R}$. En appliquant la méthode de variation de Lagrange, trouver la solution du système telle que $x(0) = x_0$.

Exercice 435 On considère les équations

$$(1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (2) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

où p, q et r sont des fonctions continues d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Etablir ce qui suit :

1. Pour tout $x_0 \in I$, et tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, (1) admet une solution maximale définie sur I tout entier, telle que $y(x_0) = a, y'(x_0) = b$.
2. Soit $x_0 \in I$; les solutions de (1) forment un espace vectoriel V de dimension 2 dont une base est (y_1, y_2) avec $y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = 0$, $y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1$.
3. Soit u et v deux solutions de (1) et $W = u'v - uv'$ leur wronskien ; trouver une équation différentielle satisfaite par W ; en déduire que W est soit identiquement nul, soit jamais nul, et que $W \neq 0 \iff (u,v)$ est une base de V. Quel est le rapport entre W et la résolvante du système associé ?
4. La solution y de (2) vérifiant $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 1$, où x_0 fixé dans I, est
$$y(x) = y(x_0)y_1(x) + y'(x_0)y_2(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{r(t)\Big(y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)\Big)}{W(t)}\, dt.$$
5. Exemple : Résoudre $y'' + 4y = \tan x$.

Exercice 436 On considère l'équation différentielle linéaire sur $\mathbb{R}^n$

$$(1) \quad y' = A(x).y$$

où $A(x)$ est continue sur un intervalle I.

1. Montrer que si l'on suppose $A(x)A(x') = A(x')A(x)$ pour tous $x, x' \in I$, la résolvante de (1) est
$$R(x, x_0) = \exp\Big(\int_{x_0}^{x} A(s)\ ds\Big) =: \exp B(x).$$
(Indic. : remarquer que $B(x)B(x') = B(x')B(x)$.)
2. Montrer que si $A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ -b(x) & a(x) \end{pmatrix}$, A vérifie l'hypothèse de a) et $B(x)$ est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ -\beta(x) & \alpha(x) \end{pmatrix}$.
3. Résoudre l'équation $y' = A(x).y$ lorsque $a(x) = -\frac{x}{2(1+x^2)}$ et $b(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}$.
4. Résoudre l'équation $y' = A(x).y + C(x)$ lorsque $A(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{sh}(x) & 1 \\ -1 & \mathrm{sh}(x) \end{pmatrix}$ et $C(x) = \begin{pmatrix} \sin x & \mathrm{sh}(x) \\ \cos x & \mathrm{sh}(x) \end{pmatrix}$.

Exercice 437 Soit E un espace de Banach et $t \to A(t)$ une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(E,E)$. On suppose que A est périodique de période ω. Cela n'implique pas nécessairement que les solutions de $\quad (1) \quad x' = A(t).x$ soient également ω-périodiques.

1. Dans le cas où E est un espace de dimension 2 et A est une matrice constante, donner une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions de (1) soient ω-périodiques.
2. Dans le cas général, soit $R(t,a)$ le noyau résolvant associé à (1).
   (a) Montrer que $R(t+\omega, a+\omega) = R(t,a)$ pour tout t.
   (b) Montrer que la solution $x(t)$ de (1) telle que $x(0) = x_0$ est ω-périodique si et seulement si $R(\omega,0)x_0 = x_0$.
   (c) A quelle condition l'équation $x' = A(t).x$ a-t-elle une solution ω-périodique ?.
3. On considère l'équation (1) $\quad x'' + f(t)x = 0$ où f est une fonction continue, ω-périodique. Calculer $\det R(a+\omega, a)$; (1) a-t-elle toujours une solution ω-périodique ?

13.6 Divers

Exercice 438 On considère l'équation du pendule $x'' + \sin x = 0$.
On sait que les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1. Soit φ la solution maximale de condition initiale $\varphi(0) = a, \varphi(0) = 0$; montrer que $\varphi'(t)^2 = 2(\cos x(t) - \cos a)$ et en déduire que $|x(t)| \leqslant a$ pour tout t.

2. Soit $y'' = -y,\ y(0) = a,\ y'(0) = 0$ le problème linéarisé correspondant. Montrer que Z définie par $Z = (x - y,\ x' - y')$ vérifie un système différentiel du premier ordre de la forme $Z'(t) = AZ(t) + B(t)$, où A est antisymétrique. En déduire, pour tout t, $|x(t) - y(t)| \leqslant \frac{a^3}{6}|t|$.

Exercice 439 Soit V un champ de vecteurs défini sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On dit qu'une application $h : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est une *intégrale première* de V, si $h \circ \varphi(t)$ est constante sur J pour toute solution (φ, J) de l'équation autonome associée. On suppose le champ de classe C^1 sur Ω.

1. Montrer que h est une intégrale première de V si et seulement si $h'(x).V(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$.
2. Donner une intégrale première sur $\mathbb{R}^n$ du système différentiel $X' = AX$ où A est une matrice anti-symétrique $n \times n$ (commencer avec $n = 2$).
3. Soit f une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$, et on note $F(x) = \int_0^x f(u)\,du$. Montrer que la fonction $(x, y) \to y^2 + 2F(x)$ est une intégrale première sur $\mathbb{R}^2$ du champ de vecteurs $V(x, y) = (y,\ -f(x))$ défini sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que F tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $\pm\infty$. Montrer que si une solution $(x(t), y(t))$ de $X' = V(X)$ est définie sur un intervalle quelconque I, les fonctions x et y sont bornées sur I (remarquer que F est bornée inférieurement).

Exercice 440 (Extrait de l'épreuve de septembre 97) Soit f une application de classe C^1 d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $f(0) = 0$. On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x).$$

1. Soit F un difféomorphisme de classe C^1 de Ω sur un ouvert Ω_1 de $\mathbb{R}^n$ tel que $F(0) = 0$, et on note G le difféomorphisme inverse. Montrer que si φ est solution de (1), $\psi = F \circ \varphi$ est solution de l'équation

$$(2) \qquad \frac{dy}{dt} = g(y),$$

   où g est une application de classe C^1 de Ω_1 dans $\mathbb{R}^n$ que l'on déterminera.
   On suppose maintenant $n = 3$.
2. Montrer que l'application F de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $F(x_1, x_2, x_3) = (2x_2 - x_3, x_1 - x_2^2, x_3)$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de classe C^∞ tel que $F(0) = 0$.
3. Déduire à l'aide de a) et b) les solutions de l'équation différentielle

$$\begin{array}{rcl} \frac{dx_1}{dt} &=& 2(x_1 - x_2^2) - 2x_2 + x_3 + 2x_2(x_1 - x_2^2 + 5x_2 - x_3) \\ \frac{dx_2}{dt} &=& x_1 - x_2^2 + 5x_2 - x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &=& 2(x_1 - x_2^2) + 4x_2 + x_3 \end{array}$$

Exercice 441 (Calcul fonctionnel holomorphe) Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $0 < \rho = \sup\{|\lambda|;\ \lambda$ valeur propre de $A\}$. On va montrer sur un exemple que l'on peut calculer $f(A)$ pour toute f somme d'une série entière de rayon $> \rho$.
Soit donc A un opérateur de $\mathbb{R}^n$ tel que $(A - I)^2(A - 2I) = 0$.

1. On note $E_1 = \ker(A - I)^2$, $E_2 = \ker(A - 2I)$, p_i le projecteur sur E_i (parallèlement à l'autre). Calculer p_1 et p_2 en fonction de A (Solution : $p_1 = -A(A - 2I)$ et $p_2 = (A_I)^2$.)
2. Calculer $A^n x$ pour $x \in E_1$, puis $x \in E_2$. Déduire de a) l'expression de A^n pour tout $n \geqslant 0$ (Solution : $A^n = (I + n(A - I))A(2I - A) + 2^n(A_I)^2$).
3. Soit f un polynôme de degré > 2 et P le polynôme minimal de A. Montrer que $\frac{f(x)}{P(x)} = g(x) + \frac{f(2)}{x-2} - \frac{xf(1)}{(x-1)^2} - \frac{f'(1)}{x-1}$ où g est lui-même un polynôme. En déduire $f(A)$ pour f polynôme puis f somme d'une série entière de rayon > 2.
4. Trouver ainsi e^{tA} si $t \in \mathbb{R}$ et résoudre le système $x' = A.x$ où $A =$ **? ?**

Exercice 442 On considère A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^3 et montrer que $e^{tA} = \begin{pmatrix} f & g & h \\ h & f & g \\ g & h & f \end{pmatrix}$, où $f(t) = \sum_0^\infty \frac{t^{3n}}{3n!},\ g(t) = \sum_0^\infty \frac{t^{3n+1}}{3n+1!},\ h(t) = \sum_0^\infty \frac{t^{3n+2}}{3n+2!}$.
   Montrer que $f(t) = \frac{1}{3}(e^t + e^{jt} + e^{j^2 t})$ et donner l'expression de h.

2. On considère $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞. Montrer qu'une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})\quad y''' - y = \varphi(t)\quad$ est
$$y(t) = \int_0^t h(t-s)\varphi(s)\ ds.$$
3. On suppose φ 1-périodique (ie $\varphi(t+1) = \varphi(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$). Soit y une solution de $(\mathcal{E})$ telle que $y(0) = y(1),\ y'(0) = y'(1),\ y''(0) = y''(1)$. Montrer que y est 1-périodique.
   Montrer que $(\mathcal{E})$ possède une et une seule solution 1-périodique.

Exercice 443 Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $t \to A(t)$, $t \to B(t)$ deux applications de J dans $\mathcal{L}(E)$ où $J =]\alpha, +\infty[$.
On considère les deux équations
$$(1)\ x' = A(t).x \qquad (2)\ x' = \big(A(t) + B(t)\big).x,$$
et $a \in J$. On note $R(t,a)$ la résolvante de (1) telle que $R(a,a) = I_E$.

1. Si y est une solution de (2), montrer que la fonction z définie par $y(t) = R(t,a).z(t)$ est solution d'une équation de la forme (3) $z' = C(t).z$, où $C(t) = R(a,t)B(t)R(t,a)$.
2. On suppose que $||R(t,s)|| \leqslant k$ pour tous $t, s \in J$ où k est une constante et que $||B(t)|| \leqslant \varepsilon(t)$ où ε est continue sur J.
   Montrer que $||C(t)|| \leqslant k^2\varepsilon(t)$.
3. On suppose de plus que $\int_a^\infty \varepsilon(t)\ dt$ converge. Montrer (à l'aide de Gronwall) que si z est telle que $z(a) \neq 0$, $||z(t)||$ est uniformément bornée sur $[a, +\infty[$, puis que z a une limite lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 444 Soit $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ une application bornée et soit φ la solution maximale du problème
$$x'(t) = f(t, x(t))\ \ ,\ \ x(t_0) = x_0\ \ ,$$
que l'on suppose définie sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. (Rappeler pourquoi une telle solution existe). Montrer que φ est définie sur $I = \mathbb{R}$ tout entier. (Indication : supposer $\beta = \sup\{t\ ;\ t \in I\} < \infty$. Établir que φ est bornée sur $[t_0, \beta[$ et que $\lim_{t\to\beta} \varphi(t)$ existe. Conclure).

Exercice 445 Soit f une application C^1 et bornée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et soit $x_0, x_0' \in \mathbb{R}^n$. Montrer que le problème
$$x''(t) = f(x(t))\ \ ,\ \ x(0) = x_0\ , x'(0) = x_0'$$
admet une unique solution maximale définie sur $\mathbb{R}$.
Exemple : $x'' + \sin(x) = 0$, l'équation du pendule simple .

Exercice 446 Soit $a > 0$ et soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 vérifiant
$$|\langle x, f(t,x)\rangle| \leqslant a\langle x, x\rangle \quad \text{pour tout}\ \ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\ .$$
Soit φ une solution de l'équation différentielle $x' = f(t,x)$ que l'on suppose définie sur l'intervalle I.

1. On pose $N(t) = \langle \varphi(t), \varphi(t)\rangle$. Montrer que l'application N est dérivable sur I, calculer sa dérivée et montrer qu'elle vérifie $|N'(t)| \leqslant 2aN(t)$.
2. Soient t et t_0 deux points de I. Comparer $N(t)$ et $N(t_0)$.
3. Montrer que les solutions maximales de l'équation différentielle en considération sont définies sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que les solutions maximales du système
$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & 2x_1(t) + tx_2(t) + x_2^2(t) \\ x_2'(t) & = & -tx_1(t) + x_2(t) - x_1(t)x_2(t) \end{array}\right.$$
   sont définies sur $\mathbb{R}$.

Troisième partie
Algèbre et géométrie

14 Généralités sur les groupes

Exercice 447 Soit G un groupe et S une partie de G.

1. Montrer que $H := \{a_{i_1}^{\varepsilon_1} ... a_{i_n}^{\varepsilon_n}, a_i \in S, \varepsilon_i \in \{-1, +1\}\}$ est le sous-groupe engendré par S (i.e le plus petit sous-groupe de G contenant S), noté $< S >$.
2. Soit A une partie de G, on appelle *centralisateur* de A, l'ensemble : $C_A := \{g \in G : \forall a \in A \ ga = ag\}$.
   (a) Montrer que C_A est un sous-groupe de G.
   (b) Montrer que $C_A = C_{<A>}$
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur S pour que $< S >$ soit abélien, $< S >$ soit normal dans G.

Exercice 448 Soit G un groupe et A, B deux sous-groupes de G, on note $AB := \{g = ab : a \in A, b \in B\}$.

1. Montrer que AB est un sous-groupe de G si et seulement si $AB = BA$.
2. Montrer que si AB est un sous-groupe de G alors $AB =< A, B >$.

Exercice 449 Dans $GL(2, \mathbb{R})$: le groupe des matrices $(2, 2)$ inversibles à coefficients réels.

1. (a) Montrer que $H := \left(\begin{smallmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), p \in \mathbb{Z}$ est un sous-groupe abélien.
   (b) Montrer qu'il est cyclique, est-il normal ?
2. Soient $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ deux matrices.
   (a) Montrer que A et B appartiennent à $SL(2, \mathbb{Z})$, calculer leur ordre et montrer que H est contenu dans $< A, B >$.
   Que pensez-vous des assertions suivantes ?
   – "un groupe engendré par des éléments d'ordre fini est fini."
   – "tous les éléments d'un groupe engendré par des éléments d'ordre fini sont d'ordre fini."
   (b) Le groupe engendré par A et B est-il abélien ?
   (c) Calculer l'intersection du groupe cyclique engendré par A et du groupe cyclique engendré par B.

Exercice 450 1. Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique (monogène) est cyclique.

2. Rappelons qu'un groupe s'appelle localement cyclique si chaque sous-ensemble fini engendre un sous-groupe cyclique . Montrer que $\mathbb{Q}$ est localement cyclique, mais pas cyclique et en déduire que $\mathbb{Q}$ n'est pas de type fini.

Exercice 451 Soit G un groupe.

1. Soient A, B deux sous-groupes de G.
   (a) On suppose que A est d'indice fini dans G, montrer alors que $A \cap B$ est d'indice fini dans B.
   (b) On suppose que A et B sont d'indice fini dans G, montrer alors que $A \cap B$ est d'indice fini dans G, généraliser au cas d'un nombre fini de sous-groupes.
2. Montrer que $\cap\{A : A \text{ est d'indice fini dans } \mathbb{Z}\} = \{\text{id}\}$. (Comparer avec 1.b).

Exercice 452 1. Supposons que H est d'indice fini dans G montrer qu'il existe $K < \infty$ tel que $\forall\ g \in G\ \exists n_g \in \mathbb{N}^*\ :\ g^{n_g} \in H$ et $n_g \leqslant K$.

2. Montrer que $\mathbb{Q}$ ne possède pas de sous-groupe d'indice fini (autre que lui-même).

Exercice 453 1. Soit G un groupe et A un sous-groupe de G d'indice fini. Montrer qu'il existe un sous-groupe B de A normal dans G et d'indice fini dans G.
(*Indication* : poser $B = \bigcap_{g \in G} gAg^{-1}$.)

2. Montrer qu'un groupe infini simple ne contient pas de sous-groupe propre d'indice fini.

Exercice 454 Soit G un groupe, A et B deux sous-groupes de G tels que $A \subset B$. On suppose que A est d'indice fini dans G. Montrer que $|G : A| = |G : B||B : A|$.

Exercice 455 Le but de cet exercice est de donner la construction d'un groupe libre et d'introduire la notion de présentation d'un groupe.
Soit $S = \{s_i\}_{i \in I}$ un ensemble quelconque qu'on appellera alphabet. Un mot dans l'alphabet S est par définition une succession finie (ou vide) :

$$w = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_k}^{\varepsilon_k},\ o\grave{u}\ \varepsilon_i = \pm 1\ et\ s_{i_j} \in S,\ k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Notons W l'ensemble de tous les mots. Un mot $w \in W$ est dit réduit si son écriture (1) ne contient pas deux lettres consécutives du type s_i^{ε} et $s_i^{-\varepsilon}$. Les mots w_1 et w_2 sont dits voisins si $w_2 = gs_i^{\varepsilon}s_i^{-\varepsilon}h$ et $w_1 = gh$. Deux mots f et g s'appellent équivalents (on note $f \sim g$) s'il existe une succession finie de mots : $f = w_0, w_1, ..., w_n = g$ où les mots w_i et w_{i-1} sont voisins ($i \in \{1, ..., n\}$).

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

   Etant donné un mot $f = a_1...a_t$ (où $a_j = s_{i_j}^{\varepsilon_j}$) définissons une suite de transformations appelée R-procédé : $R_0 = e$ (le mot vide), $R_1 = a_1$ et

$$R_{i+1} = \begin{cases} R_i a_{i+1} & \text{si } R_i \text{ n'est pas un mot réduit du type } Xa_{i+1}^{-1} \\ X & \text{si } R_i \text{ est un mot réduit du type } Xa_{i+1}^{-1} \end{cases}.$$

   Autrement dit un R-procédé consiste à faire toutes les simplifications de droite à gauche.

2. On suppose que $w_1 = a_1...a_r a_{r+1}...a_t$ et $w_1 = a_1...a_r s_j^{\varepsilon} s_j^{-\varepsilon} a_{r+1}...a_t$ sont deux mots et que R^i désigne le R-procédé appliqué au mot w_i. Montrer que $R_t^1 = R_{t+2}^2$ c.-à.-d. $R^1(w_1) = R^2(w_2)$. En déduire que chaque classe de $W/\sim$ contient un mot réduit et un seul.

   Pour deux classes $[w_i] \in W/\sim\ \ (i = 1, 2)$ définissons maintenant leur produit comme suit (de gauche à droite) :

$$[w_1][w_2] = [w_1 w_2] \qquad (2).$$

3. Démontrer que (2) ne dépend pas du choix des représentants des classes $[w_i]$. Montrer que l'ensemble $F = W/\sim$ muni de l'opération (2) est un groupe.

   Ce groupe s'appelle groupe libre engendré par S, on appelle les éléments de S générateurs libres de F.

   Soit maintenant G un groupe quelconque engendré par un système X où $X = \{x_i\}_{i \in I}$ et F est le groupe libre engendré par S. Supposons qu'il existe une bijection $f : S \mapsto X$ telle que $f(s_i) = x_i$ $(i \in I)$.

4. (a) Montrer que f se prolonge en un homomorphisme $f : F \mapsto G$.

   (b) En particulier, en déduire que si Card $(S) =$ Card (S'), alors le groupe libre engendré par S est isomorphe au le groupe libre engendré par S'.

   Si de plus Card $(S) = n$ ce groupe est noté F_n.

   Notons $H = \mathrm{K}er\ f$, et appelons un sous-ensemble $H' \subset H$ ensemble des relations de G si le plus petit sous-groupe normal de G contenant H' coïncide avec H. La donnée du couple S, H' définit le groupe G à un isomorphisme près (G est isomorphe au groupe quotient X/H). La donnée d'un tel couple est notée $< S \mid H' >$ et s'appelle présentation de G.

5. Montrer que le groupe libre ne contient pas d'élément non-trivial d'ordre fini.

Exercice 456 Montrer que le groupe G donné par sa présentation :

$$< x_1, ..., x_n \mid [x_i, x_j],\ \forall\ i, j \in \{1, ..., n\}\ > \tag{3}$$

est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$.

15 Groupes et actions

Exercice 457 Soit G un groupe, H un sous-groupe d'indice n dans G.

1. A l'aide des classes à gauche modulo H dans G, construire un homomorphisme $\phi : G \mapsto \mathcal{S}_n$.
2. Montrer que si $N \subset H$ et N est normal dans G, on a $N <$ Ker $\phi < H$.
3. En déduire que tout groupe fini G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.

Exercice 458 Soit K un corps fini à q éléments, $GL(n, K)$ l'ensemble des matrices (n, n) inversibles à coefficients dans K. Montrer par récurrence sur n que $|GL(n, K)| = (q^n - 1)(q^n - q)...(q^n - q^{n-1})$ en considérant l'action de $Aut(K^n)$ sur l'espace vectoriel K^n (de base $\{v_1, ..., v_n\}$), l'orbite et le stabilisateur d'un vecteur de base (v_1 par exemple).

Exercice 459 Soit φ une action d'un groupe G opèrant dans X (notée $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X$).

1. Montrer que $G_{g(x)} = gG_xg^{-1}$, où $g \in G$ et G_x désigne le stabilisateur du point x.
2. Si l'action φ est transitive et fidèle et G est abélien alors montrer que φ est simplement transitive.

Exercice 460 Soit $G =< \gamma_1, \gamma_2 >$ opère sur le plan complexe $\mathbb{C}$ où $\gamma_1 : z \mapsto z+1$ et $\gamma_2 : z \mapsto z+i$.

1. Montrer que $G \cong \mathbb{Z}^2$ et G agit isométriquement sur $\mathbb{C}$.
2. Trouver un ensemble fondamental F pour cette action et l'ensemble d'orbites $\mathbb{C}/\sim = \mathbb{C}/G = \overline{F}/\sim$ en identifiant les points équivalents sur le bord de $\overline{F}$.

Exercice 461 1. Montrer que la quantité suivante (appelée forme de Killing) est un produit scalaire sur le groupe matriciel $M_n(\mathbb{R})$.

$$< X, Y >= \text{tr } (X^TY). \quad X, Y \in M_n(\mathbb{R})$$

2. Montrer que la forme de Killing reste invariante par rapport à l'action de $O(n)$ par conjugaison :

$$< gXg^{-1}, gYg^{-1} > = < X, Y >, \quad X, Y \in M_n(\mathbb{R}), \; g \in O(n).$$

Exercice 462 Soient G un groupe et S un système de générateurs de G contenant avec chaque élément s son inverse s^{-1}. Rappelons la construction du graphe de Cayley $C(G, S)$. L'ensemble V des sommets de $C(G, S)$ est en bijection avec l'ensemble des éléments de G. Deux sommets g_1 et g_2 sont joints par une arête si $g_1^{-1} \cdot g_2 = s \in S$. La longueur de cette arête est déclarée par définition égale à 1. Un chemin $l \subset C(G, S)$ entre deux sommets g et h est une succession finie d'arêtes $\{e_1, ..., e_n\}$ joignant g et h. La longueur $|l|$ de l vaut par définition n : le nombre des arêtes qui le constituent.

1. Montrer que la fonction $d : G \times G \mapsto \mathbb{N}$ donnée par
$$d(g, h) = \inf\{\text{longueurs des chemins joignant } g \text{ et } h\}$$
est une distance et qu'il existe un chemin $l \subset C(G, S)$ qui la réalise c.-à.-d. $|l| = d(g, h)$.
2. Pour chaque $g \in G$ posons $|g| = d(0, g)$. Montrer que $|g| = \inf\{k \mid g = s_{i_1} \cdot ... \cdot s_{i_k}, \; s_{i_j} \in S\}$.
3. Montrer que G agit isométriquement sur les sommets de $C(G, S)$, c.-à.-d. $\forall g \in G \; d(g\gamma_1, g\gamma_2) = d(\gamma_1, \gamma_2)$ où $\gamma_i \in V$ $(i = 1, 2)$. En déduire que $d(f, h) = |f^{-1} \cdot h|$ $(f, h \in V)$.
4. Soit $F_2 =< a, b >$ un groupe libre sur les générateurs a et b (voir l'exercice 455). Donner un fragment (initial) de son graphe de Cayley $C(F_2, \{a, b\})$.
5. Démontrer que le graphe de Cayley d'un groupe libre est toujours un arbre (un graphe sans lacet s'appelle arbre).

16 Isométries euclidiennes

Exercice 463 Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

1. Montrer que $A \in GL(E)$ appartient à $\mathcal{O}(n)$ si et seulement si ${}^TAA = I$.
2. Montrer que si $A \in \mathcal{O}(n)$ alors $\det A = \pm 1$.
3. Montrer que $A \in U(n)$ si et seulement si ${}^TA\bar{A} = I$.

Exercice 464 Soit L un espace hermitien. Est-il vrai que $A \in IsoL$ implique $Ax = Ux + b$ avec $U \in U(n)$.

Exercice 465 Soit E est un espace euclidien de dimension n. Montrer que $Iso(E) \not\cong \mathcal{O}(n) \times T(E)$.

Exercice 466 Déterminer la nature des applications suivantes : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto Ax$ et $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto Bx$ où $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$.

Exercice 467 1. Notons $l \subset \mathbb{R}^2$ une droite affine et τ_l la réflexion par rapport à l. Montrer que si $f \in Iso(\mathbb{R}^2)$ vérifie $f_{|l} \equiv id$ alors soit $f = id$ soit $f = \tau_l$.

2. Soient l et m deux droites affines dans $\mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer qu'il existe $\alpha \in Iso(\mathbb{R}^2)$ telles que $\alpha\tau_l\alpha^{-1} = \tau_m$.
   (b) Montrer que $\tau_l.\tau_m$ est une translation si et seulement si l et m sont parallèles.

Exercice 468 Notons $R(a, \alpha)$ la rotation d'angle α autour du point $a \in \mathbb{R}^2$ et t_b la translation $t_b : x \mapsto x + b$. Montrer que

1. $\exists\, \beta \in Iso(\mathbb{R}^2) : \ \beta R(a, \alpha)\beta^{-1} \in SO(2)$.
2. $R(a, \alpha) = \tau_l \cdot \tau_m$ où m est une droite quelconque passant par a et l est une droite passant par a fixée.
3. t_b et t_c sont conjuguée ssi $||b|| = ||c||$.

Exercice 469 Une application du type $G(l, a) = \tau_l . t_a$ s'appelle *réflexion glissée* si le vecteur a est parallèle à la droite $l \subset \mathbb{R}^2$.

1. Si $G = \tau_l . t_a$ est une réflexion glissée alors montrer que $\tau_l . t_a = t_a . \tau_l$ et $G^2 = t_{2a}$.
2. Montrer que $G = \tau_l t_a$ est une réflexion si l et a sont perpendiculaires et est une réflexion glissée si l et a ne sont pas perpendiculaires.
3. En regardant l'ensemble des points fixes $fix(f) := \{x \in \mathbb{R}^2 | f(x) = x\}$ d'une isométrie $f \in Iso(\mathbb{R}^2)$ montrer que :
   (a) si $fix(f) \neq \emptyset$ alors $f = R(a, \alpha)$ ou $f = \tau_l$
   (b) si $fix(f) = \emptyset$ alors $f = t_a$ ou $f = G(l, a)$ (*indication : utiliser la question 2. et l'exercice 468, question 2*).

Exercice 470 Notons $l \subset \mathbb{R}^2$ une droite affine de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que l'ensemble I_l des $g \in Iso(\mathbb{R}^2)$ telles que $g(l) = l$ est un sous-groupe de $Iso(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les translations qui appartiennent à I_l.
3. Montrer que si $g \in I_l$ possède un point fixe alors g a un point fixe sur l.
4. Soit $g \in I_l$, montrer qu'il existe une translation t de I_l telle que $g.t$ possède un point fixe.
5. Décrire I_l.

Exercice 471 Soit E un espace euclidien de dimension n et $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ un sous-ensemble de E.

1. Montrer que $Aff(X) := \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i | x_i \in X, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}$ est le plus petit sous-espace affine de E contenant X.
2. Soit $S = \{x_0, ..., x_n\}$ un sous-ensemble de E, montrer que S est un repère affine de E si et seulement si S n'est contenu dans aucun hyperplan.

Dans toute la suite, on se place dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$.

Exercice 472 Etudier la composée de deux rotations, puis la composée de deux réflexions glissées et finalement la composée d'une rotation et d'une réflexion glissée.

Exercice 473 Soit f une application qui préserve les rapports de longueur : $\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}^2$,on a : $\frac{d(f(x),f(y))}{d(f(z),f(t))} = \frac{d(x,y)}{d(z,t)}$. (Par définition une telle application est une *similitude*)

1. Monter $\exists k \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $d(f(x), f(y)) = kd(x, y)$.
2. Montrer qu'un similitude s'écrit comme composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Exercice 474 Soit ABC un triangle isocèle en A non equilatéral, le but de cet exercice est d'étudier l'ensemble des isométries de $\mathcal{P}$ qui préservent globalement ABC.

1. Montrer que cet ensemble est groupe.
2. Montrer que si f préserve ABC alors f fixe le barycentre G de ABC.
3. En étudiant les distances GA, GB, GC montrer que $f(A) = A$
4. En déduire (en utilisant la classification des isométries de $\mathbb{R}^2$) le groupe de symétries de ABC.

Exercice 475 (Étude des sous-groupes commutatifs d'isométries) Soient f, g deux isométries du plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que si g et f commutent alors $g = f \circ g \circ f^{-1}$ et f conserve (globalement) l'ensemble des points fixes de g.
2. Décrire les cas dans lesquels f et g commutent ($f \circ g = g \circ f$).
3. En déduire une description des sous-groupes commutatifs d'isométries.

17 Géométrie différentielle élémentaire de $\mathbb{R}^n$

Exercice 476 1. Soient $\xi(t)$ et $\eta(t)$ deux courbes paramétrées de $\mathbb{R}^3$ de classe C^1, montrer que $\frac{d}{dt}[\xi,\eta] = [\frac{d\xi}{dt},\eta] + [\xi,\frac{d\eta}{dt}]$, où $[,]$ désigne le produit vectoriel.

2. Montrer que $\kappa = -\frac{<r',[r'',r''']>}{k^2}$, où $s \mapsto r(s)$ une courbe de classe C^2 paramétrée par sa longueur, κ et k sont respectivement sa torsion et sa courbure.

Exercice 477 Pour la courbe $r = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $a > 0$, $b > 0$ trouver courbure, torsion et repère de Frenet.

Exercice 478 1. Montrer qu'une courbe $s \mapsto r(s)$ est plane ssi $< r', [r'', r'''] >= 0$.

2. Soit $s \mapsto r(s)$ une courbe de classe C^2 paramétrée par sa longueur. On considère la nouvelle courbe $s \mapsto n(s)$ où n est le vecteur normal unitaire. Notons s^* le paramètre naturel de cette courbe. Montrer que $\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{k^2+\kappa^2}$.

Exercice 479 1. Montrer que si une courbe $s \mapsto r(s)$ est tracée sur une sphère de rayon R et si $\kappa(s) \neq 0, k(s) \neq 0$ $(\forall s)$ alors $R^2 =< r, r >= \frac{1}{k^2}(1 + \frac{(k')^2}{(\kappa k)^2}))$.

2. Soit $s \mapsto r(s)$ une courbe à courbure constante qui est tracée sur la sphère S^2. Montrer que son image r est un arc de cercle. La propriété d'être à courbure constante dépend-t-elle de la paramétrisation de la courbe ?

Exercice 480 1. Montrer que 3 points x, y et z sont colinéraires dans $\mathbb{R}^n$ avec y entre x et z (rappelons que ça signifie que $y = x + t(z - x)$ $t \in [0, 1]$) ssi

$$||x - y|| + ||y - z|| = ||x - z||.$$

2. Montrer que si $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ est une courbe alors $|\gamma([a, b])| \geqslant ||\gamma(a) - \gamma(b)||$ et que l'égalité a lieu ssi γ est une géodésique (où $|\cdot|$ désigne la longueur d'une courbe).

18 Géométrie et trigonométrie sphérique

Exercice 481 Soit $\alpha : [a, b] \to S^n$ une courbe avec $b - a < \pi$. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

1. α est une courbe géodésique.
2. Il existe deux vecteurs orthogonaux $A, B \in S^n$ tels que $\alpha(t) = A\cos(t - a) + B\sin(t - a)$.
3. La courbe α vérifie l'équation $\alpha'' + \alpha = 0$.

Exercice 482 Soit S^n est la sphère unité dans l'espace linéaire E de dimension $n + 1$.

1. Montrer que la distance sphérique induit sur S^n une topologie équivalente à celle induite de l'espace ambiant E.
2. Montrer que l'intersection d'un sous-espace linéaire L de E de dimension k avec S^n est une sphère de dimension $k - 1$ (si $k = 2$ cette intersection est un cercle appelée grand cercle de S^n).

Exercice 483 Nous noterons $[X, Y]$ le produit vectoriel de deux vecteurs X et Y dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que trois vecteurs X, Y, et Z dans $\mathbb{R}^3$ sont libres ssi les vecteurs $[X, Y]$, $[Y, Z]$ et $[Z, X]$ sont libres.
Indication : Démontrer d'abord l'identité suivante :

$$[[X, Y], Z] =< X, Z > Y- < Y, Z > X$$

Exercice 484 Soit $T = \triangle ABC \subset S^2$ un triangle sphérique d'angles intérieurs $\alpha = \angle A,\ \beta = \angle B,\ \gamma = \angle C$

1. Montrer qu'il existe un triangle $T' = \triangle A'B'C'$ dit polaire tel que

$$a' = \pi - \alpha,\ b' = \pi - \beta,\ c' = \pi - \gamma,$$

où comme d'habitude on note a', b', c' les longueurs des côtés opposés aux sommets A', B', C'. *Indication.* Poser : $C' = \frac{[A,B]}{||[A,B]||}, A' = \frac{[B,C]}{||[B,C]||}, B' = \frac{[C,A]}{||[C,A]||}$

2. Montrer que $(T')' = \text{sign}(< A, [B, C] >) \cdot T$. En déduire que

$$\angle A' = \pi - a,\ \angle B' = \pi - b,\ \angle C' = \pi - c,$$

Exercice 485 En utilisant le résultat et les notations de l'exercice 484 montrer que :

1. $\cos\gamma = \cos c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta - \cos\alpha \cdot \cos\beta$
2. $\cos\beta = \cos b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma - \cos\alpha \cdot \cos\gamma$
3. $\cos\alpha = \cos a \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma - \cos\beta \cdot \cos\gamma$

Exercice 486 Le but de cet exercice est démontrer que pour chaque triplet $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\alpha+\beta+\gamma > \pi$ il existe un triangle sphérique d'angles intérieurs égaux à $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

1. Montrer que $\forall\ \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[\ \forall\ d \in]0, \alpha]$ il existe un triangle sphérique $\triangle ABC$ tel que $\angle C = \frac{\pi}{2},\ \angle A = \alpha$ et $a = |BC| = d$ (dans les notations précédentes).
2. En utilisant 1. et les formules de l'exercice 485 démontrer le résultat.

19 Le groupe orthogonal et les quaternions

Exercice 487 Le but de cet exercice est d'introduire une topologie sur le groupe linéaire $GL(E)$. Soit $A \in GL(E)$, alors on introduit la norme :

$$||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| \qquad (1).$$

Montrer que les topologies suivantes sur $GL(E)$ sont équivalentes :

1. $A_n \to A$ si la suite a_{ij}^n des coefficients de A_n converge vers a_{ij}.
2. $A_n \to A$ si $||A_n - A|| \to 0$.
3. $A_n \to A$ si l'application $A_n : x \to A_n(x)$ converge vers l'application $A(x)$ uniformément sur chaque compact $K \subset E$.

Exercice 488

1. En utilisant la norme (1) démontrer que $O(n)$ est compact dans $GL(E)$.
2. En utilisant le résultat du cours qu'une matrice orthogonale est une matrice en blocs démontrer que $O(n)$ contient deux composantes connexes : $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = +1\}$ et $O^-(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = -1\}$. $O^-(n)$ est-il un sous-groupe de $O(n)$?

Exercice 489 Rappelons qu'une application $g \in SO(3)$ est dite *retournement* si g est une rotation d'angle π autour d'une droite fixée $L \subset \mathbb{R}^3$ ($g|_L \equiv \mathrm{id}$). Soit $g \in SO(3)$ un retournement d'axe la droite $L \in \mathbb{R}^3$ ($0 \in L$). Montrer que $g_1 \in SO(3)$ est un retournement ssi il existe $f \in SO(3)$ tel que $g_1 = fgf^{-1}$ et l'axe de g_1 est $f(L)$.

Exercice 490

1. Soit $S = \{z + tj \mid z \in \mathbb{C},\ t \in \mathbb{R}\}$ un sous-ensemble $\mathbb{H}$ des quaternions. Montrer que S est invariant par l'application :
$$\rho_j\ : \to jqj^{-1},\ q \in \mathbb{H}.$$
2. En identifiant S avec $\mathbb{R}^3$ décrire $\rho_j : S \to S$.
3. Montrer que l'application $\rho_k : q \to kqk^{-1}$ laisse S invariant (i.e. $\rho_k(S) = S$). Décrire ρ_k.

Exercice 491

1. Montrer que S^3 est un sous-groupe de $\mathbb{H}^*$ considéré comme groupe multiplicatif. Est-il normal ?
2. Montrer que si $\exists\ q \in S^3\ :\ \forall\ q_1 \in \mathbb{R}^3 = \{y \cdot i + u \cdot j + v \cdot k \mid y, v, u \in \mathbb{R}\}\ :\ qq_1q^{-1} = q_1$ alors $q = \pm\mathrm{id}_{\mathbb{H}}$.

Exercice 492 Soit $q, r \in (\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4)$ alors montrer que $< q, r >= \frac{1}{2}(\overline{q}r + \overline{r}q)$ où $<\ ,\ >$ est le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^4$, et on note $\overline{q} = \overline{z} - wj$ si $q = z + wj$.

Exercice 493

1. On considère l'application $\xi_s(q) = -sqs^{-1}$ ($s \in (\mathbb{R}^3)^*,\ q \in \mathbb{R}^3$). Montrer que ξ_s est la reflection dans $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan $s^\perp$.
2. Démontrer la surjectivité de l'application $\varphi : S^3 \to SO(3)$ où $\varphi(s) = \rho_s$, et $\rho_s(q) = sqs^{-1}$ ($s \in S^3,\ q \in \mathbb{R}^3$).

Exercice 494 Si $q \in S^3$ tel que $q = \cos\theta + I\sin\theta,\ I \in S^2$, alors montrer que $\rho_q \in SO(3)$ est la rotation d'angle 2θ autour de l'axe OI.

20 Géométrie projective I

Exercice 495 Trouver la formule explicite suivante pour la projection stéréographique $\pi : \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \to S^n$:

$$\pi(x) = \Big(\frac{2x_1}{1+||x||^2}, \; ..., \; \frac{2x_n}{1+||x||^2}, \; \frac{||x||^2-1}{||x||^2+1}\Big),$$

où $x = (x_1, ..., x_n, 0) \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
Indication : Écrire $\pi(x) - e_{n+1} = t(x - e_{n+1}), \; t \in \mathbb{R}$.

Exercice 496 Soit L un espace vectoriel de dimension $n+1$.

1. Montrer que si M_i $(i \in I)$ sont des sous-espaces vectoriels de L alors $P(\bigcap_{i\in I} M_i) = \bigcap_{i\in I} P(M_i)$.
2. Soient M_i $(i \in \{1, ..., k\}$ des sous-espaces linéaires de L, montrer que
$$< P(M_1), ..., P(M_k) >= P(M_1 + ... + M_k).$$
3. Soient $p : L^* \to P(L) = L^*/\!\sim$ l'application de la projectivisation (qui associe à chaque $x \in L^*$ sa classe $[x] \in P(L)$) et S un sous-ensemble de l'espace $P(L)$. Alors montrer que $< S >= P(D)$, où D est le sous-espace de L engendré par $p^{-1}(S)$.

Exercice 497
1. Montrer que le plan projectif P_1 et la droite P_2 dans $\mathbb{P}^3$ soit se coupent en un point soit $P_2 \subset P_1$.
2. Soient $P_i = P(M_i)$ deux sous-espaces projectifs $(i = 1, 2)$. Montrer que si $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ alors la somme $M_1 + M_2$ est directe.

Exercice 498 Montrer que la fibration de Hopf $FH : S^3 \to S^2$ ($FH^{-1}(x)$ est un grand cercles de S^3 $(\forall\, x \in S^2)$) s'écrit comme ceci :

$$FH(z, z') = (2z'\overline{z}, |z'|^2 - |z|^2).$$

Exercice 499
1. Montrer que tout sous-espace projectif de dimension $k-1$ dans $\mathbb{P}^n$ peut être recouvert par au moins k cartes affines.
2. Trouver le nombre d'éléments d'un espace projectif de dimension n sur un corps avec q éléments.

Exercice 500
1. Montrer que le groupe projectif $PGL(L)$ agit transitivement sur l'ensemble de sous-espaces projectifs de la dimension k fixée.
2. Montrer que $PGL(L)$ agit transitivement sur l'ensemble de couples ordonnés $\{(P_1, P_2) \mid \dim P_1 = k_1, \; \dim P_2 = k_2, \; \dim(P_1 \cap P_2) = k_3\}$, où k_1, k_2, k_3 sont fixés.
3. Montrer que $PGL(L)$ agit transitivement sur l'ensemble des drapeaux projectifs $\mathcal{D} = \{(P_1, ..., P_k) \; | P_1 \subset ... \subset P_k, \}$ où la longueur k est fixée et P_i est un sous-espace projectif de $P(L)$ de dimension i fixée $(i = 1, ..., k)$.

Exercice 501
1. Montrer que toute homographie $\gamma \in PGL_n\mathbb{C}$ possède au moins un point fixe
2. Montrer que toute homographie $\gamma : \mathbb{RP}^{2n} \to \mathbb{RP}^{2n}$ a toujours au moins un point fixe.
3. Soit $\gamma \in PGL(L)$ tel que $\text{card}(\text{fix}(\gamma)) < \infty$ et $\dim P(L) = n$ alors montrer que $\text{card}(\text{fix}(\gamma)) \leqslant n+1$ où $\text{fix}(\gamma) = \{x \; |\gamma(x) = x\}$.

21 Géométrie projective II : homographies de $\mathbb{C}P^1$

21.1 Applications conformes

Donnons d'abord deux définitions :
Une application $f : D \mapsto \mathbb{R}^n$ d'un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^1 est dite conforme au point $x_0 \in D$ si sa matrice dérivée $f'(x_0)$ vérifie :

$$f'(x_0) = \mu \cdot U \text{ où } \mu > 0, \text{ et } U \in O(n) \tag{2}$$

Une matrice du type (2) s'appelle conforme. L'application f est dite conforme dans D si elle est conforme en tout point de D.
En analyse complexe on a vu qu'une fonction complexe $f(z)$ est conforme en $z_0 \in \mathbb{C}$ si $f'(z_0) \neq 0$.

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On dit qu'une application linéaire $A : E \mapsto E$ conserve les angles si $\forall x, y \in E^* = E \setminus \{0\} : <(x,y) =<(Ax, Ay)$ où $<(x,y)$ est l'angle entre deux vecteurs non-nuls (on a comme d'habitude $\cos(<(x,y)) = \frac{<x,y>}{||x|| \cdot ||y||}$).
2. Soient $\gamma_i : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$ deux courbes de classe C^1, telles que $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ et $\gamma_i'(t_0) \neq 0$ $(i = 1,2)$ pour un $t_0 \in [a,b]$. On appelle **angle** entre deux courbes γ_1 et γ_2 au point t_0 l'angle entre les vecteurs $\gamma_1'(t_0)$ et $\gamma_2'(t_0)$.
3. On dit qu'une application $f : D \mapsto \mathbb{R}^n$ de classe C^1 d'un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$ conserve les angles dans D si sa matrice dérivée conserve les angles entre toutes deux courbes de classe C^1 dans D, c.-à.-d. : $<((f \circ \gamma_1)', (f \circ \gamma_2)')|_{t=t_0} =<(\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0))$.

Exercice 502 Cet exercice ne concerne pas directement la géométrie projective mais sera utilisé par la suite.

1. Montrer que chaque réflexion par rapport à un hyperplan dans $\mathbb{R}^n$ est une application conforme dans $\mathbb{R}^n$. En déduire que chaque isométrie euclidienne et chaque isométrie sphérique sont conformes dans $\mathbb{R}^n$ et sur S^n respectivement.
2. Montrer qu'une application linéaire $A : E \mapsto E$ conserve les angles non-orientés entre les vecteurs non-nuls ssi A est une matrice conforme.
3. Montrer qu'une application $f : D \mapsto \mathbb{R}^n$ d'un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$ est conforme dans D ssi elle conserve les angles dans D.

En utilisant la projection stéréographique on identifie la droite projective $\mathbb{C}P^1$ avec la sphère $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$. On dit qu'une application $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ d'un ouvert D de $\overline{\mathbb{C}}$ est conforme au point $f^{-1}(\infty)$ si l'application $\varphi \circ f$ est conforme en $f^{-1}(\infty)$ où $\varphi(z) = 1/z$. On dit que f est conforme à l'infini si $f \circ \varphi$ est conforme en 0.

Exercice 503 Démontrer que toute application de Möbius $\gamma \in M(2)$ est conforme sur $\overline{\mathbb{C}}$.

21.2 Propriétés des homographies de $\mathbb{C}P^1$

Exercice 504 Rappelons qu'un cercle généralisé est soit un cercle euclidien $\Sigma(z_o, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ soit une droite à laquelle on ajoute le point $\{\infty\}$ (à l'aide la projection stéréographique). On note $M = \{\frac{az+b}{cz+d} \mid a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0\}$.

1. Montrer que le groupe $PGL_2\mathbb{C}$ agit trois fois transitivement sur $\overline{\mathbb{C}}$.
2. Vérifier que chaque cercle généralisé dans $\overline{\mathbb{C}}$ s'écrit sous la forme :
$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0,\ B^2 + C^2 > 4AD$$
3. Soit $C_1 \in \mathbb{C}$ un cercle généralisé, alors montrer que un sous-espace $C_2 \subset \mathbb{C}$ est un cercle généralisé ssi il existe $\gamma \in M$ telle que $\gamma(C_1) = C_2$.
4. Soit $K \subset \mathbb{C}$ un cercle généralisé et $f \in M(2)$ tel que $f|_K \equiv \mathrm{id_K}$ alors montrer que soit $f \equiv \mathrm{id}$ soit f est la réflexion par rapport à K.

Exercice 505 Montrer que

$$M(2) = \left\{\frac{a_2\overline{z} + b_2}{c_2\overline{z} + d_2}\ ;\ \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\ \middle|\ a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{C}\ ;\ a_i d_i - b_i c_i \neq 0\right\}$$

et en déduire que $|M(2) : M| = 2$ où $M = M_+(2)$ est le groupe des transformations de Möbius paires.

Exercice 506 Soit τ_Σ la réflexion par rapport au cercle euclidien $\Sigma = \{z \in \mathbb{C}\ ||z - z_0| = r\}$ alors montrer que

$$|\tau_\Sigma(z) - \tau_\Sigma(w)| = r^2 \frac{|z - w|}{|z - z_0||w - z_0|}$$

Exercice 507

1. Montrer que chaque application $g \in M$ possède soit un point fixe dans $\overline{\mathbb{C}}$ soit deux points fixes. Cette affirmation reste-t-elle vraie pour les éléménts de $M(2)$?
2. Notons $\mathrm{fix}(g)$ l'ensemble $\{x \in \overline{\mathbb{C}} \mid g(x) = x\}$ des points fixes de g. Montrer que si $\gamma = fgf^{-1}$ alors $\mathrm{fix}(\gamma) = f(\mathrm{fix}(g))$.
3. Soient C_i $(i = 1,2)$ deux cercles généralisés. Montrer que $\exists\ \gamma \in M\ :\ \tau_{C_1} = \gamma\tau_{C_2}\gamma^{-1}$, où τ_{C_i} désigne l'inversion par rapport à C_i.

Exercice 508 Soient C_i $(i = 1,2)$ deux cercles généralisés. Montrer que τ_{C_1} et τ_{C_2} commutent si et seulement si le cercle C_1 est orthogonal à C_2 (e.g. si C_i sont deux cercles euclidiens alors ils sont orthogonaux ssi les angles entre deux rayons aux points de l'intersection C_1 et C_2 sont égaux à $\frac{\pi}{2}$).

22 Géométrie et trigonométrie hyperbolique

On notera $\mathbb{H}^2$ le plan de Poincaré dans l'un de deux modèles du disque ou du demi-plan, muni de la distance hyperbolique ρ.

Exercice 509 1. Montrer que $\mathbb{H}^2$ est un espace métrique complet mais pas compact.

2. Dans le modèle du demi-plan on suppose que z, w sont deux points distincts dans $\mathbb{H}^2$, montrer que $\rho(z,w) = |\ln([z^*, z, w, w^*])|$, où $[z^*, z, w, w^*]$ désigne le birapport de quatre points, où z^*, w^* sont les extrémités de la géodésique passant par z et w dans l'ordre indiqué sur le Figure 1 :

Fig. 1 – Une géodésique

Exercice 510 Soit $\triangle abc$ un triangle dans $\mathbb{H}^2$ (c-à-d le sous-ensemble de $\mathbb{H}^2$ bordé par trois géodésiques dont les points de l'intersection sont a, b, c) d'angles intérieurs α, β, γ. On suppose que $\gamma = \frac{\pi}{2}$; en utilisant les notations indiquées sur le Figure 2 démontrer les identités suivantes :

1. $\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b$
2. $\operatorname{th} b = \sinh a \cdot \tan \beta$
3. $\cosh a \cdot \sin \beta = \cos \alpha$

Fig. 2 – Triangles géodésiques

Exercice 511 Soient α, β, γ trois nombres positifs tels que $0 \leqslant \alpha, \beta, \gamma < \pi;\ \alpha + \beta + \gamma < \pi$ alors montrer qu'il existe un triangle hyperbolique d'angles intérieurs α, β, γ.

Exercice 512 En utilisant le théorème du cours que la somme d'angles intérieurs d'un polygone convexe à n sommets dans $\mathbb{H}^2$ est inférieure à $(n-2)\pi$ démontrer que :

1. Soient $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ une collection ordonnée de nombres tels que $0 \leqslant \theta_i < \pi$ $(i = 1, ..., n)$. Pour qu'il existe un polygone convexe d'angles intérieurs θ_i il faut et il suffit que $\theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_n < (n-2)\pi$.
2. Un polygone à n côtés et d'angles droits existe ssi $n \geqslant 5$.

Exercice 513 1. Démontrer que chaque homographie non-triviale $g \in M^+(2) \setminus \{\mathrm{id}\}$ possède soit un point fixe soit deux. Un élément $g \in M^+(2)$ est dit *parabolique* si son ensemble des points fixes : $\operatorname{fix}(g) = \{x \in \overline{\mathbb{C}} \mid f(x) = x\}$ est un singleton. Montrer qu'un élément est parabolique ssi il est conjugué dans $M^+(2)$ à la translation $z \mapsto z+1$.

2. Un élément $f \in M^+(2)$ est dit *elliptique* s'il est conjugué dans $M^+(2)$ à une rotation $z \mapsto k \cdot z$ où $|k| = 1$, $k \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
   Un élément $g \in M^+(2)$ est dit *loxodromique* s'il est conjugué dans $M^+(2)$ à $z \mapsto k \cdot z$ où $|k| \neq 1$. De plus, un élément loxodromique est dit *hyperbolique* si $k \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; un élément loxodromique est dit srtictement loxodromique si $k = \lambda \cdot e^{i\theta},\ \lambda > 0\ ,\ \theta \neq 2\pi m$. Pour un élément $g \in M^+(2)$ on utilise la même lettre pour une de deux matrices dans $SL_2\mathbb{C}$ qui le représentent (en fait c'est g ou $-g$). Montrer que pour tout élément $g \in M^+(2)$ l'une des possibilités suivantes peut avoir lieu :
   (a) g est parabolique ssi $\operatorname{tr}^2(g) = 4$, où tr^2 est la trace carré de la matrice g.
   (b) g est elliptique ssi $\operatorname{tr}^2(g) \in [0, 4[$.
   (c) g est hyperbolique ssi $\operatorname{tr}^2(g) \in]4, \infty[$.
   (d) g est strictement loxodromique **ssi** $\operatorname{tr}^2(g) \notin [0, \infty[$.
3. En utilisant le modèle du demi-plan démontrer que les points fixes d'un élément parabolique ou hyperbolique se trouvent toujours sur le bord $\overline{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{H}^2$.
   En utilisant le modèle du disque démontrer qu'un élément elliptique a exactement un des deux points fixes dans $\mathbb{H}^2$.

Exercice 514 Soit $g \in M$ une homographie. Montrer que

1. Si g est parabolique $\text{fix}(g) = \{x\}$ alors
$$\forall z \ \in \overline{\mathbb{C}} \ : \ \lim_{n\to\pm\infty} g^n(z) = x.$$
2. Si g est loxodromique et $\text{fix}(g) = \{x, y\}$ alors
$$\forall z \ \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{y\} \ : \ \lim_{n\to+\infty} g^n(z) = x,$$
et le point x est dit *point fixe attractif* de g.
$$\forall z \ \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{x\} \ : \ \lim_{n\to+\infty} g^{-n}(z) = y,$$
et le point y est dit *point fixe répulsif* de g.

Exercice 515 Montrer que si un élément $g \in M$ n'est pas strictement loxodromique conjugué à $z \to ke^{i\theta}$ $(\theta \neq \pi + \pi m,\ k > 0)$ alors il existe deux familles $\mathcal{C}_i$ $(i = 1, 2)$ de cercles généralisés vérifiant les conditions suivantes :

1. $\forall\ C \in \mathcal{C}_1 \ : \ g(C) = C$
2. $\forall\ C \in \mathcal{C}_2 \ : \ g(C) = \mathcal{C}_2 \setminus \{C\}$
3. $\forall\ C_1 \in \mathcal{C}_1,\ \forall\ C_2 \in \mathcal{C}_2 \ : \ C_2 \perp C_1$.

De plus, si $g \in M$ est strictement loxodromique conjugué à $z \to ke^{i\theta}$ $(\theta \neq \pi + \pi m,\ k > 0)$ alors montrer que g n'a pas de cercle invariant.

Quatrième partie
Analyse complexe

23 Séries entières

Exercice 516 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$.

1. Montrer que la fonction exp est continue et vérifie :
$\exp(0) = 1;\quad \forall a, b \in \mathbb{C},\ \exp(a + b) = \exp(a).\exp(b)$.
2. On note $e = \exp(1)$ et $f(z) = \exp(z) = e^z$. Etablir les résultats suivants :
   (a) $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z \neq 0$.
   (b) $f'(z) = f(z)$.
   (c) $f_{|\mathbb{R}}$ est croissante, positive, tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$, tend vers 0 quand $x \to -\infty$.
   (d) Il existe un nombre positif π tel que $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et tel que $e^z = 1$ ssi $z \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
   (e) f est périodique de période $2i\pi$.
   (f) $t \to e^{it}$ est une surjection de $\mathbb{R}$ sur le cercle unité.
   (g) $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

Exercice 517 Trouver le domaine maximal de convergence des séries entières suivantes :
$$(1) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad (2) \ \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n \cos n\theta, \quad (3) \ \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}.$$

Exercice 518 Développer en série entière les fonctions suivantes et préciser le domaine maximal de convergence $(a, b \neq 0)$:
$$f(z) = \frac{1}{1 + z + z^2}, \quad g(z) = \frac{1}{(a - z)(b - z)}, \quad h(z) = \frac{z \sin a}{z^2 - 2(\cos a)z + 1}.$$

Exercice 519 Développer en série entière sur $\mathbb{R}$: $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\, dt$.

Exercice 520 Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que f est de classe C^∞ et développable en série entière.

Exercice 521 Trouver les solutions de l'équation différentielle :$(1+x^2)y'' - 2y = 0$ en commençant par chercher des solutions développables en série entière.

Exercice 522 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1 . Montrer les équivalences (i)$\Longleftrightarrow$(ii) $\Longleftrightarrow$(iii) où
(i) La série converge uniformément sur D.
(ii) La série converge uniformément sur $\overline{D}$.
(iii) La série converge uniformément sur ∂D
(*Indication* : pour l'implication (iii)$\Longrightarrow$(ii), on posera $r_N = \sum_N^\infty a_n e^{in\theta}$ et on fera une tranformation d'Abel dans la somme $\sum_M^N a_n \rho^n e^{in\theta}$ où $0 \leqslant \rho \leqslant 1$.)

Exercice 523 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1. On pose $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, $t_n = \frac{1}{n+1}(s_0 + s_1 + \cdots + s_n)$, $u(z) = \sum s_n z^n$ et $v(z) = \sum t_n z^n$.

1. Montrer que les rayons de convergence de u et de v sont égaux à 1.
2. Etablir pour tout $|z| < 1$, $u(z) = \frac{1}{1-z} \sum a_n z^n$. Retrouver ainsi le théorème d'Abel : soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1, telle que $\sum a_n$ converge vers A. Alors $f(z)$ tend vers A quand $z \to 1$ non tangentiellement.

Exercice 524 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. On dit que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ s'il existe une sous-suite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui tend vers a. Montrer que $L = \limsup_{n\to\infty} u_n = \inf_n \sup_{k\geqslant n} u_k$ et $l = \liminf_{n\to\infty} u_n = \sup_n \inf_{k\geqslant n} u_k$ sont des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Vérifier que ce sont respectivement la plus grande et la plus petite des valeurs d'adhérence.

Exercice 525 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de réels. Etablir les propositions suivantes :

$$\limsup_{n\to\infty} (u_n + v_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} u_n + \limsup_{n\to\infty} v_n \ ;$$

$$(\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n) \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} u_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} v_n.$$

Donner l'exemple de deux suites pour lesquelles la première inégalité est stricte.

Exercice 526 Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On suppose que $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Exercice 527 Déterminer le rayon de convergence des séries $\sum_{n\geqslant 0} a^n z^n$ $(a \in \mathbb{C})$; $\sum_{n\geqslant 0} e^{\sqrt{n}} z^n$; $\sum_{n\geqslant 0} z^n/n!$; $\sum_{n\geqslant 0} z^{2n}$; $\sum_{n\geqslant 0} z^{n!}$.
Comparer le rayon de convergence des séries $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^{2n}$.
Si le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ est strictement positif et fini, quel est celui de $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^{n^2}$?

Exercice 528 Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$ est supérieur ou égal au plus petit des rayons de convergence des séries $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$. Montrer par un exemple que l'inégalité peut être stricte.

Exercice 529 On considère une série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Sa somme est notée $f(z)$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{c_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini. Sa somme notée $F(z)$ est appelée transformée de Borel.
2. Soit r un réel vérifiant $0 < r < R$. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sup_{N\geqslant 0} \left|\sum_{n=0}^N \frac{c_n}{n!} z^n\right| \leqslant P(|z|) + \exp\left(\frac{|z|}{r}\right).$$

On pourra considérer un entier n_0 tel que, pour tout $n > n_0$, on ait $|c_n| \leqslant r^{-n}$.

3. Montrer que, pour tout z de $\mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, on a

$$f(z) = \int_0^{+\infty} F(tz)e^{-t}\,dt.$$

Exercice 530 1. Montrer que $L = \limsup u_n \in \mathbb{R}$ est caractérisée par la condition suivante :
Pour tout $\varepsilon > 0$, tous les u_n sauf un nombre fini d'entre eux sont $\leqslant L + \varepsilon$, et une infinité d'entre eux est $\geqslant L - \varepsilon$.

2. Ecire l'analogue pour la $\liminf$.

Exercice 531 1. Déterminer à l'aide de la formule de Hadamard le rayon de convergence des séries suivantes :

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty} e^n z^{n^2} \quad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty} n! z^{n^2} \quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{(-1)^n}{n}\Big)^{n^2} z^n.$$

2. Trouver le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ où

$$a_n = q^{n^2} (|q| < 1); \quad a_n = C_{kn}^n; \quad a_n = e^{n^\alpha} (0 < \alpha < 1).$$

Exercice 532 1. Trouver le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ où $a_{2n+1} = a^{2n+1}$ et $a_{2n} = b^{2n}$ avec $0 < a, b < 1$.

2. Pour la série $\sum a_n z^n$, où $a_{2n} = a^n b^n$ et $a_{2n+1} = a^n b^{n+1}$ avec $a, b > 0$, comparer l'inverse du rayon, R^{-1}, avec $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Exercice 533 Montrer que si la série $\sum a_n z^n$ a un rayon $0 < R < +\infty$, la série lacunaire $\sum a_n z^{\lambda(n)}$, où $\lim \frac{\lambda(n)}{n} = +\infty$, a comme rayon $R' = 1$. Montrer sur un exemple que la réciproque peut être fausse.

24 Fonctions holomorphes

Exercice 534 1. Soit $f = P + iQ$ une fonction holomorphe dans un ouvert connexe non vide Ω de $\mathbb{C}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est constante, (ii) P est constante, (iii) Q est constante, (iv) $\bar{f}$ est holomorphe dans U, (v) $|f|$ est constant.

2. Soit $f, g \in H(U)$. On suppose que g ne s'annule pas dans U et $f(z)\bar{g}(z) \in \mathbb{R}$ pour $z \in U$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $f = cg$.

Exercice 535 1. Pour $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(z) = x + iy^2$. Montrer que f est $\mathbb{R}$-différentiable sur $\mathbb{C}$ et calculer sa différentielle. Existe-t-il un ouvert U de $\mathbb{C}$ telle que $f_{|U} \in H(U)$?

2. Même question avec $f(z) = |\sin z|$.

Exercice 536 1. Soit $U = \{z = x + iy \in \mathbb{C}\ ;\ -\pi < x < \pi,\ y \in \mathbb{R}\}$. Soit $P(x, y) = \frac{\sin x}{\cos x + \cosh y}$ pour $z \in U$. Montrer qu'il existe $f \in H(U)$ unique telle que $f(0) = 0$ et $P = \operatorname{Re} f$.

2. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose $P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.
Donner une CNS pour qu'il existe $f \in H(\mathbb{C})$ telle que $P = \operatorname{Re} f$. Sous cette condition trouver alors toutes les applications $f \in H(\mathbb{C})$ telles que $P = \operatorname{Re} f$.

Exercice 537 1. Montrer que les équations de Cauchy-Riemann en polaires s'écrivent $f'_r + \frac{i}{r} f'_\theta = 0$

2. Application : Soit P un polynôme non constant, supposé sans zéros. On pose alors $I(r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(re^{i\theta})}$. Montrer que $I'(r) = 0$. En calculant $\lim_{r\to\infty} I(r)$ et $I(0)$, aboutir à une contradiction. Conclusion ?

Exercice 538 En quels points la fonction $f(z) = z\Re e z$ est-elle $\mathbb{C}$-différentiable ? Même question pour $f(z) = \exp \overline{z}$.

Exercice 539 Ecrire les équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires. En déduire que chaque détermination du logarithme est holomorphe.

Exercice 540 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par

$$\begin{cases} f(z) = e^{-1/z^4} & \text{si } z \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que f vérifie les équations de Cauchy-Riemann en tout point de $\mathbb{C}$ mais n'est pas holomorphe dans $\mathbb{C}$.

Exercice 541 Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω. On désigne par P et Q respectivement ses parties réelle et imaginaire. On suppose qu'il existe des constantes réelles non toutes nulles a, b et c telles que la fonction $aP + bQ + c$ soit identiquement nulle sur Ω. Montrer que f est constante sur Ω.

Exercice 542 Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω, u sa partie réelle et v sa partie imaginaire. On suppose que les dérivées partielles secondes de u et v existent et sont continues sur Ω. Montrer que u (resp. v) est harmonique (c'est-à-dire $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$).

Exercice 543 On dit que deux fonctions réelles $u(x, y)$ et $v(x, y)$ sont conjuguées harmoniques si elles vérifient les équations de Cauchy-Riemann.

1. Montrer que si u et v sont conjuguées harmoniques, alors u et v sont harmoniques.
2. Trouver les conjuguées harmoniques des fonctions harmoniques suivantes dans les ouverts indiqués :
   (a) $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ sur $\mathbb{C}$
   (b) $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
   (c) $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2)$ sur
      i. $\mathbb{C} \setminus \{x + iy|\ y = 0, x \leqslant 0\}$
      ii. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Exercice 544 Trouver des domaines de définition Ω (le plus grand possible) et des fonctions holomorphes $f = u + iv$ sur Ω étant donné la partie réelle u ou la partie imaginaire v.

1. $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}$
2. $u = e^x(x \cos y - y \sin y) + 2 \sin x \operatorname{sh} y + x^3 - 3xy^2 + y$
3. $v = \ln (x^2 + y^2) + x - 2y$

Exercice 545 Soit $f(z) = u+iv$ une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω. Montrer que les familles de courbes $u(x, y) = c_1$ et $v(x, y) = c_2$ sont orthogonales ; plus précisément, montrer qu'en tout point d'intersection $z_0 = x_0 + iy_0$ de deux de ces courbes tel que $f'(z_0) \neq 0$, leurs tangentes respectives sont perpendiculaires.

Exercice 546 Montrer que si $f(z)$ est holomorphe dans un ouvert connexe Ω et si $f'(z) \neq 0$ en tout point de Ω, alors la transformation $w = f(z)$ conserve les angles.

Exercice 547

1. Montrer les inégalités suivantes, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$|e^z - 1| \leqslant |z|e^{|z|} \text{ et } |e^z - 1 - z| \leqslant \frac{|z|^2}{2} e^{|z|}$$
2. Soit K un compact inclus dans $\mathbb{C}$, f une fonction continue sur K et $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions définies sur K convergeant uniformément vers f sur K. Montrer que $(\exp f_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $\exp f$ uniformément sur K (on pourra appliquer la première inégalité de a) à $f_n(z) - f(z)$).
3. Montrer que $\left(\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers e^z uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Exercice 548

1. Soient ρ un réel strictement positif, z et w des nombres complexes tels que $|z| > \rho$ et $|w| > \rho$, et n un entier naturel.
   Montrer que
$$\left| \frac{1}{w^n} - \frac{1}{z^n} \right| \leqslant |z - w| \frac{n}{\rho^{n+1}}$$
   et que
$$\left| \frac{1}{z - w} \left(\frac{1}{w^n} - \frac{1}{z^n} \right) - \frac{n}{z^{n+1}} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{w^n} - \frac{1}{z^n} \right) \frac{1}{z^{n-k+1}} \right| \leqslant |z - w| \frac{n^2}{\rho^{n+2}}$$
   Soient maintenant σ et ϕ deux fonctions continues à valeurs complexes définies sur un intervalle $I = [a, b]$. On fixe un point $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(I)$ et on pose $\rho = \frac{1}{2} \inf_{a\leqslant t\leqslant b} |\sigma(t) - z|$.

2. Soit $g(z) = \int_a^b \frac{\phi(t)}{(\sigma(t)-z)^n}dt$. En remplaçant dans a) z par $\sigma(t)-z$ et w par $\sigma(t)-z-h$ avec $|h|<\rho$, montrer que
$$\left|\frac{g(z+h)-g(z)}{h} - n\int_a^b \frac{\phi(t)}{(\sigma(t)-z)^{n+1}}dt\right| \leqslant \frac{|h|n^2}{\rho^{n+2}}\int_a^b |\phi(t)|dt$$
En déduire que $g(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\sigma(I)$ et que g' est donnée par
$$g'(z) = n\int_a^b \frac{\phi(t)}{(\sigma(t)-z)^{n+1}}dt$$

25 Fonctions logarithmes et fonctions puissances

Exercice 549 Montrer qu'il n'existe pas de détermination holomorphe du logarithme de z sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ tout entier. (On raisonnera par l'absurde et on exhibera ainsi une application continue injective du cercle unité dans $\mathbb{R}$).

Exercice 550 Soit Log$z$ la détermination principale du logarithme dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, ie $\mathrm{Log}z = \mathrm{Ln}|z| + i\mathrm{Arg}z$ où $|\mathrm{Arg}z|<\pi$, et on définit $z^\alpha = e^{\alpha \mathrm{Log}z}$

1. On considère $z = e^{\frac{2i\pi}{3}}$; comparer $\mathrm{Log}(z^2)$ et $2\mathrm{Log}z$.
2. On considère $z = e^{\frac{3i\pi}{4}}$; comparer z^{2i}, $(z^2)^i$ et $(z^i)^2$.

Exercice 551 On se propose de calculer les sommes de séries convergentes pour $0<t<2\pi$
$$\sum_1^\infty \frac{\cos nt}{n}, \quad \sum_1^\infty \frac{\sin nt}{n}.$$

1. Rappeler pourquoi $S(z) = -\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n}$ coincide sur D avec la détermination principale $\mathrm{Log}(1-z)$.
2. Soit $r<1$; calculer $\sum_{n\geqslant 1}\frac{r^n\cos nt}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\frac{r^n\sin nt}{n}$.
3. En déduire la valeur de ces sommes (on pourra utiliser le théorème d'Abel).

Exercice 552 Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction complexe sans zéro sur Ω. On rappelle que f admet un logarithme continu (resp. holomorphe) sur Ω s'il existe une fonction g continue (resp. holomorphe) sur Ω telle que $e^{g(z)} = f(z)$.
Montrer que deux déterminations continues du logarithme de f sur Ω diffèrent d'une constante $2ki\pi$.
En reproduisant la démonstration du théorème d'inversion locale, montrer que si f admet sur Ω un logarithme continu, elle y admet un logarithme holomorphe.

Exercice 553 On rappelle qu'une fonction complexe f a une racine $n$ième holomorphe dans un ouvert connexe Ω s'il existe $g\in H(\Omega)$ telle que $g^n(z) = f(z)$.

1. Montrer que si f admet un logarithme holomorphe dans Ω, elle y admet des racines de tous ordres ; montrer, sur un exemple, qu'une fonction holomorphe f peut admettre une racine sans admettre de logarithme (holomorphe).
2. Si g_1, g_2 sont deux fonctions continues de Ω connexe dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, telles que $g_1^n = g_2^n$ pour un entier $n\geqslant 1$, montrer que $g_1 = e^{\frac{2i\pi k}{n}}g_2$ où k est un entier et $g_1 = g_2$ dès que les fonctions coincident en un point.

Exercice 554
1. Montrer que $\mathrm{Re}(\cos z) > 0$ si $|\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2}$. En déduire une détermination holomorphe du logarithme de $\cos z$ dans $\{|\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2}\}$.
2. Montrer que l'on peut définir une fonction holomorphe $f(z) = \mathrm{Log}\frac{1+iz}{1-iz}$ sur l'ouvert $U = \mathbb{C}\backslash S$ où $S = \{ix\ ;\ |x|\geqslant 1\}$.
3. Montrer que l'on peut définir une fonction holomorphe $f(z) = \mathrm{Log}\sqrt{z^3-1}$ sur un ouvert U à déterminer (où $\sqrt{\ }$ désigne la détermination principale de la racine).

Exercice 555
1. Soit $\Omega = \mathbb{C}\backslash[-1,1]$; montrer que la fonction
$$g(z) = \exp(\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z+1) + \frac{1}{2}\mathrm{Log}(z-1))$$
se prolonge en une fonction continue sur Ω et fournit ainsi une racine carrée holomorphe de z^2-1 dans Ω, bien que $\mathrm{Log}(z^2-1)$ n'ait pas de prolongement continu à Ω.

2. Construire de même une racine carrée holomorphe de z^2+1 sur l'ouvert connexe $\Omega'\mathbb{C}\backslash[-i,i]$.

Exercice 556 Montrer que

$$\operatorname{Arg}(x+iy)=\begin{cases}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x>0\\ \frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y>0\\ -\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y<0\end{cases}$$

En déduire que la fonction Arg est $\mathbb{R}$-différentiable sur l'ouvert Ω

$$\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)|\ y=0,x\leqslant 0\}$$

et calculer sa différentielle.

Exercice 557 Soit w dans $\mathbb{C}$. Déterminer les nombres complexes z tels que $\cos z=\cos w$. Même question avec le sinus.

Exercice 558 Si $z=x+iy$ avec x et y réels, montrer que l'on a

$$\begin{aligned}|\sin z|^2 &= \sin^2 x+\operatorname{sh}^2 y\\ |\cos z|^2 &= \cos^2 x+\operatorname{sh}^2 y\end{aligned}$$

En déduire les zéros de $\sin z$ et $\cos z$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 559 Montrer que la fonction $f(z)=\tan z$ définie par $\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}$ réalise une bijection de $T=\{z\in\mathbb{C}|-\pi/2<\Re\mathrm{e} z\leqslant\pi/2,\ z\neq\pi/2\}$ sur $\mathbb{C}\setminus\{-i,i\}$. On pourra écrire $f=f_4\circ f_3\circ f_2\circ f_1$ avec $f_1(z)=2iz$, $f_2(z)=e^z$, $f_3(z)=\frac{1-z}{1+z}$, $f_4(z)=iz$.

Exercice 560 Résoudre les équations $e^z=-3$, $\cos z=2$, $\sin z=2$, $\tan z=2i$, $\operatorname{ch} z=1/2$ de la manière suivante :

1. en identifiant les parties réelles et imaginaires
2. en utilisant le logarithme

Exercice 561
1. En utilisant la détermination principale du logarithme, on définit les fonctions $z\mapsto z^{1/2}$, $z\mapsto(1-z)^{1/3}$, $z\mapsto((1-2i)z)^{2i/5}$. Donner leur domaine de définition.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit f une détermination continue de $z^{1/n}$. Montrer que $f(z)^n=z$ sur son domaine de définition.

Exercice 562 On considère $f(z)=\sqrt{z^2}=(z^2)^{1/2}$ définie à l'aide de la détermination principale du logarithme.

1. Trouver le domaine de définition et donner une expression explicite de f.
2. Peut-on prolonger f par continuité sur un ouvert plus grand ?
3. Mêmes questions en prenant la détermination $\log z=\operatorname{Log} z+2i\pi$.

Exercice 563 On définit à l'aide de la détermination principale du logarithme les fonctions $f_1(z)=(z^3-1)^{1/2}$, $f_2(z)=(z-1)^{1/2}(z-j)^{1/2}(z-j^2)^{1/2}$, et $f_3(z)=(1-z)^{1/2}(iz-ij)^{1/2}(iz-ij^2)^{1/2}$, où $j=e^{i\pi/3}$.

1. Trouver les domaines de définition des f_k et montrer que l'on a toujours $f_k(z)^2=z^3-1$.
2. Montrer que l'on peut prolonger f_3 par continuité sur un ouvert plus grand.

Exercice 564 On veut démontrer qu'il existe une détermination continue f de $\sqrt{1-z^2}$ sur $U=\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ telle que $f(i)=\sqrt{2}$.

1. Définir f sur $\mathbb{C}\setminus]-\infty,1]$ au moyen des fonctions $\operatorname{Arg}(z+1)$ et $\operatorname{Arg}(z-1)$.
2. Soit x un réel strictement inférieur à 1. Etudier $\lim_{y\to 0} f(x+iy)$ quand y tend vers 0 par valeurs positives puis négatives. Conclure.
3. Montrer qu'on obtient ainsi une application f telle que $f(U)\subset U$ et $f\circ f=-\mathrm{Id}_{|\mathrm{U}}$. En déduire que f est une bijection de U sur lui-même.

26 Formule de Cauchy

Exercice 565 Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon infini. Montrer que pour $r > 0$ et $n \geqslant 0$

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it})\ e^{-int}\ dt$$

.
En déduire que si $|f(z)| \leqslant A + B|z|^k$ pour tout z de module $\geqslant R$, f est un polynôme.

Exercice 566 On se propose de calculer $I = \int_{-\pi}^{\pi} \ln|re^{i\theta} - a|\ d\theta$, où $0 < r < |a|$.

1. Vérifier que I est bien définie.
2. On considère f la fonction définie sur $\Omega = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ par $f(z) = \frac{1}{z}\ \mathrm{Log}(1 - \frac{z}{a})$, où Log est la détermination principale du logarithme sur Ω. Montrer que f est holomorphe sur un ouvert contenant le cercle $\{z = re^{i\theta}\}$.
3. En déduire $I = 2\pi \ln|a|$.

Exercice 567 Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ de module $\neq 0, 1$, et $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta)\ d\theta}{\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1}$.

1. Vérifier que I est bien définie.
2. On considère f définie par $f(z) = \dfrac{z^n}{(z-\lambda)(z-\lambda^{-1})}$; en calculant l'intégrale de f sur le cercle unité, trouver la valeur de I (distinguer les deux cas $|\lambda| > 1, |\lambda| < 1$).

Exercice 568 Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant $\bar{D}$ et $f \in H(U)$. On note γ le paramétrage de ∂D par $t \in [0, 2\pi] \to e^{it}$.

1. Calculer $I_1 = \displaystyle\int_\gamma (2 + z + \frac{1}{z})\frac{f(z)}{z}\ dz$ et $I_2 = \displaystyle\int_\gamma (2 - z - \frac{1}{z})\frac{f(z)}{z}\ dz$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2(\frac{\theta}{2})\ d\theta$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2(\frac{\theta}{2})\ d\theta$.
3. Pour $|a| \neq 1$, évaluer $I(a) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{\overline{f(z)}}{z-a}\ dz$.

Exercice 569 1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, F et G deux fonctions holomorphes dans Ω et $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin tel que $\gamma^* \subset \Omega$. Montrer que

$$\int_\gamma F(z)G'(z)\ dz = F(\gamma(b))G(\gamma(b)) - F(\gamma(a))G(\gamma(a)) - \int_\gamma F'(z)G(z)\ dz$$

2. Calculer $\int_\gamma (z+2)e^{iz}\ dz$, où γ est l'arc de parabole $\gamma(t) = t + i\dfrac{t^2}{\pi^2}$ joignant (0,0) à $(\pi, 1)$.

Exercice 570 En évaluant $\int_C e^z\ dz$ sur le cercle unité, montrer que

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\theta + \sin\theta)\ d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\theta + \sin\theta)\ d\theta = 0$$

Exercice 571 Calculer

$$\int_\gamma \left(z + \frac{1}{z}\right)^n\ \frac{dz}{z},$$

où $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$ et $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} \cos^n t\ dt$.

Exercice 572 Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z}{z}\ dz$ où $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$
2. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin z}{z}\ dz$ où $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$
3. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z^2}{z}\ dz$ où $\gamma(t) = e^{it}$ $(t \in [0, 2\pi])$

4. $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{z^3+z}\,dz$ où $\gamma(t)=2e^{it}$ $(t\in[0,2\pi])$
5. $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^n}$ $(n\in\mathbb{Z})$, où γ est un chemin fermé ne passant pas par a
6. $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{3z^2-12z+11}{z^3-6z^2+11z-6}\,dz$, où $\gamma_r(t)=re^{it}$ $(t\in[0,2\pi])$
7. $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$, $n\in\mathbb{N}^*$, où $\gamma(t)=1+e^{it}$ $(t\in[0,2\pi])$

Exercice 573 Soit $I(z)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+z^2}dt$.

1. Pour quelles valeurs de z $I(z)$ est-elle définie ?
2. Montrer que pour $\Re e z>0$, on a
$$I(z)=\frac{1}{z}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{Log} z+\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}dt\right),$$
où Log est la détermination principale du logarithme. On pourra considérer le chemin fermé $\Gamma_{\varepsilon,R}=[\varepsilon,R]+\gamma_R+[Re^{i\varphi},\varepsilon e^{i\varphi}]-\gamma_\varepsilon$, où $\varphi=\operatorname{Arg}z$ et $\gamma_r\colon t\mapsto re^{it}$, $t\in[0,\varphi]$.
3. Qu'obtient-on pour $\Re e z<0$?

Exercice 574 Soit $a>0$ et $\gamma\colon t\mapsto a+it$, $t\in\mathbb{R}$. Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, on considère
$$J(\alpha)=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{e^{\alpha z}}{z^2}dz.$$

1. Montrer que cette intégrale converge.
2. En considérant les chemins fermés $[a-iR,a+iR]+\gamma_R$, où γ_R^* est un demi-cercle de diamètre $[a-iR,a+iR]$, montrer que $J(\alpha)=0$ si $\alpha\leqslant 0$ et $j(\alpha)=\alpha$ si $\alpha\geqslant 0$.

Exercice 575 Pour $n\geqslant 1$ et $0\leqslant k\leqslant n$, on désigne par C_n^k le coefficient binomial. Pour $r>0$, soit $c_r\colon t\mapsto re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$.

1. Montrer que
$$C_n^k=\frac{1}{2i\pi}\int_{c_r}(1+z)^n\frac{dz}{z^{k+1}}.$$
En déduire que $C_{2n}^n\leqslant 4^n$.
2. Montrer que
$$C_{2n}^n=\frac{1}{2i\pi}\int_{c_r}\left(\frac{1}{z}+2+z\right)^n\frac{dz}{z}$$
(on pourra utiliser 1.). En déduire que
$$\sum_{n=0}^{+\infty}C_{2n}^n\frac{1}{5^n}=\frac{1}{2i\pi}\int_{c_r}\frac{dz}{3z-1-z^2)}=\sqrt{5},$$
à condition que $r_1<r<r_2$, où $r_1<r_2$ sont les deux racines de $3z-1-z^2=0$.
3. Montrer que
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{c_r}(1+z)^n\left(1+\frac{1}{z}\right)^n\frac{dz}{z}=\sum_{k=0}^n\left(C_n^k\right)^2.$$
En déduire que
$$\sum_{k=0}^n\left(C_n^k\right)^2=C_{2n}^n.$$
4. Montrer que
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{c_1}\frac{(z-1)^{2n}(z+1)^n}{z^{2n+1}}dz=\sum_{k=0}^n(-1)^kC_n^kC_{2n}^k.$$
Montrer que si $z\in c_1^*$, $|z-1|^2|z+1|\leqslant\frac{16}{9}\sqrt{3}$. En déduire que
$$\sum_{k=0}^n(-1)^kC_n^kC_{2n}^k\leqslant\left(\frac{16}{9}\sqrt{3}\right)^n.$$

Exercice 576 1. Montrer que $\int_0^{2\pi} e^{re^{it}}\, dt$ est indépendant de $r > 0$.

2. Montrer que $\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}(1 - re^{it})\, dt$ est indépendant de $r \in \,]0,1[$ (Log désigne la branche principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \,]-\infty, 0]$).

Exercice 577 Calculer de deux manières $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ où $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t$ ($t \in [0, 2\pi]$, $a, b \in \mathbb{R}_+^*$) et en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$$

Exercice 578 Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe Ω contenant le disque unité fermé et $\gamma(t) = e^{it}$ ($t \in [0, 2\pi]$). Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \left(\frac{f(z)}{z-a} + \frac{ag(z)}{az-1}\right) dz = \begin{cases} f(a) & \text{si } |a| < 1 \\ g(1/a) & \text{si } |a| > 1 \end{cases}$$

Exercice 579 Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω contenant $\overline{D(a,r)}$. Montrer que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta$$

(propriété de la moyenne).

Exercice 580 Soit f une fonction continue dans le secteur

$$\{z \in \mathbb{C} |\ -\alpha \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \alpha\}$$

On suppose que $zf(z)$ tend vers $A \in \mathbb{C}$ quand $|z|$ tend vers l'infini, z restant dans ce secteur. Notons C_R la partie du cercle de centre 0 et de rayon R contenue dans ce secteur. Montrer que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 2i\alpha A$$

Exercice 581 1. Soit $C \subset \mathbb{C}$ une courbe orientée C^1 et fermée. Soit γ un chemin C^1 d'origine a et d'extrémité b, tels que a et b ne soient pas des points de C. On suppose que l'intersection de C et γ est constituée d'un nombre fini de points $m_1, \ldots, m_n$ et que les tangentes à C et à γ sont distinctes en ces points. Soit $\varepsilon_i = 1$ si l'angle de la tangente à γ avec la tangente à C en m_i est entre 0 et π, $\varepsilon_i = -1$ sinon. Montrer que

$$\sum_i \varepsilon_i = \operatorname{Ind}_C(a) - \operatorname{Ind}_C(b)$$

où $\operatorname{Ind}_C(z)$ désigne l'indice de z par rapport à C.

2. Calculer l'indice du point $z = \frac{3}{4}$ par rapport à la courbe dont l'équation en coordonnées polaires est $r = \cos\frac{\theta}{3}$ avec $0 \leqslant \theta \leqslant 3\pi$, parcourue dans le sens des θ croissants.

Exercice 582 On considère la série entière

$$L(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$$

Soit $f(z) = \frac{-\operatorname{Log}(1-z)}{z}$ où Log désigne la détermination principale du logarithme complexe.

1. On note $U = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$. Montrer que f est définie dans U.
2. Vérifier que si $D = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$, on a $L'(z) = f(z)$.
3. En déduire qu'il existe une primitive de f, définie dans U tout entier, dont la restriction à D est égale à L. On note cette primitive L par abus de langage.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$. Calculer $\lim_{y\to 0} L(x+iy) - L(x-iy)$ comme fonction de x.

Exercice 583 1. Soit P un polynôme qui ne s'annule pas sur le cercle $|z| = 1$. Montrer que le nombre de zéros de P à l'intérieur du cercle unité est

$$\frac{1}{2\pi}\left[\operatorname{Arg} P(e^{i\theta})\right]_0^{2\pi}$$

(variation d'une détermination continue de l'argument sur le cercle unité). On utilisera le théorème de d'Alembert pour factoriser P en facteurs de degré 1, puis on considèrera l'indice de chacune des racines par rapport au cercle.

2. Soit P un polynôme n'ayant aucun zéro sur le cercle $|z| = 1$ et ayant exatement k racines (comptées avec multiplicité) à l'intérieur du cercle unité. Montrer que la fonction
$$\theta \mapsto \Re e P(e^{i\theta})$$
s'annule au moins $2k$ fois pour $\theta \in [0, 2\pi]$ (indication : étudier les zéros de la fonction $\cos \operatorname{Arg} P(e^{i\theta})$, où Arg est une détermination continue de l'argument).

Exercice 584 1. Montrer qu'il existe sur $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ une détermination holomorphe de $(z^2 - 1)^{-1/2}$ qui prend la valeur 1 pour $z = \sqrt{2}$. Unicité ? On désignera par f cette détermination.

2. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on désigne par γ_z le segment $]0, z]$ orienté de 0 vers z et on pose
$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta.$$
   (a) Montrer que F est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (quelle en est la dérivée F' ?).
   (b) Etudier $\lim_{z' \to z} F(z')$ lorsque $z \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.
   (c) En déduire que f n'a pas de primitive sur $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

27 Conséquences de la formule de Cauchy

Exercice 585 1. Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \leqslant 1 + e^{|z|} \sin |z|$ pour tout z. Montrer que f est une constante.

2. Soit $f \in H(D)$ telle que $|f(z)|(1 - |z|) \leqslant 1$ pour $z \in D$. Montrer que pour tout n $|a_n| < e(n + 1)$.

Exercice 586 Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier et soit γ_R un paramétrage du cercle $C(0, R)$, $R > 0$. Calculer pour $|z| < R$: $\frac{z}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w(w-z)}\, dw$; en déduire que si $\sup_R \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})|\, dt < \infty$, f est constante. Quel théorème retrouve-t-on ?

Exercice 587 Soit f un polynôme de degré $n > 0$, supposé sans zéros dans $\mathbb{C}$, et γ_R le cercle centré en 0, de rayon R. Calculer $I_R = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{nf(z) - zf'(z)}{zf(z)}\, dz$, et trouver sa limite lorsque $R \to +\infty$. Quel théorème retrouve-t-on ?

Exercice 588 Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$.

1. Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros dans $\mathbb{C}$ notés $z_1, \ldots z_k$.
2. En déduire que f est un polynôme. (Pour cela considérer $f(z)/P(z) = g(z)$ où $P(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_k)$ et montrer que $1/g$ est entière) .

Exercice 589 Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω contenant 0. Montrer que :

1. Si $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ pour n assez grand alors $f(z) = \frac{z}{z+1}$ sur $\Omega \cap D(0, 1)$.
2. Si $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{2n})$ pour n assez grand alors f est constante sur Ω.
3. Si $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n+1})$ pour n assez grand alors f est constante sur Ω.
4. $f(\frac{1}{n}) = 2^{-n}$ pour n assez grand est impossible.

Exercice 590 On considère la série entière $\sum_0^\infty 2^n z^n$. Calculer sa somme f dans son disque de convergence. Trouver le plus grand ouvert connexe de $\mathbb{C}$ sur lequel f se prolonge en une fonction holomorphe. Donner le développement en série de f au point $z = -1/4$ et le rayon de convergence de cette série.

Exercice 591 Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω sur lequel elle ne s'annule pas. Alors sont équivalentes :
(i) Il existe une détermination holomorphe du logarithme de f sur Ω.
ii) $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$ pour toute γ une courbe fermée dans Ω de classe C^1 par morceaux.
(iii) $\frac{f'}{f}$ admet une primitive sur Ω.

Exercice 592 Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω. On va montrer l'équivalence entre
(i) f admet un logarithme holomorphe dans Ω.
(ii) f admet des racines **de tous ordres** holomorphes dans Ω.
On a vu que (i) implique (ii). Supposons maintenant que (ii) est vérifié : pour chaque n on note f_n la fonction de $H(\Omega)$ telle que $f_n^n(z) = f(z)$ si $z \in \Omega$.

1. Soit a un zéro de f ; que peut-on dire de la multiplicité de a ? En déduire que f ne s'annule pas sur Ω.
2. Soit γ une courbe fermée dans Ω de classe C^1 par morceaux. On pose $I = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$, et $I_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\, dz$. Montrer que I et I_n sont des entiers, $I = nI_n$, puis que $I = 0$. Conclure.

Exercice 593 Soit f une fonction entière ; on pose, pour $r \in \mathbb{R}_+^*$,

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

1. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que
$$\lim_{r\to+\infty} \frac{M(r)}{r^{p+1}} = 0$$
Montrer qu'alors f est un polynôme de degré au plus p.
2. On suppose qu'il existe $R \geqslant 0$, $K > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que
$$|z| > R \Longrightarrow |f(z)| \leqslant K|z|^p$$
Montrer qu'alors f est un polynôme de degré au plus p. Montrer que si de plus $R = 0$ alors f est un monôme de degré p.
3. En déduire que si f vérifie
$$\forall z \in \mathbb{C},\ |f'(z)| \leqslant |z|$$
alors f est de la forme $f(z) = a + bz^2$ avec $|b| \leqslant 1/2$.

Exercice 594 Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour $r < R$, soit $\gamma_r : t \mapsto re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ et

$$I(r) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r} |f(z)|^2 \frac{dz}{z}.$$

1. Montrer que $I(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$.
2. En déduire une nouvelle démonstration des inégalités de Cauchy et montrer que si f n'est pas un monôme, ces inégalités sont strictes.
3. En considérant $f(z) = 1/(1-z)^2$, montrer que pour $r < 1$,
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 r^{2n-2}.$$

Exercice 595 Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité ouvert D vérifiant

$$\forall z \in D,\ |f(z)| < \frac{1}{1-|z|}.$$

Montrer que les coefficients a_n du développement $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ vérifient

$$\forall n \geqslant 1,\ |a_n| < (n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < (n+1)e \text{ et } \ a_0| < e.$$

Exercice 596 Montrer qu'une fonction entière admettant 1 et i comme périodes est constante.

Exercice 597 Soit f une fonction entière non constante ne s'annulant pas. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall r > 0,\ \exists z \in \mathbb{C}, |z| > r \text{ et } |f(z)| < \varepsilon$$

Application : tout polynôme non constant admet un zéro dans $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert).

Exercice 598 Déterminer toutes les fonctions f holomorphes dans le disque $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C}|\ |z| < R\}$ telles que

$$\forall z \in D(0, \frac{R}{2}),\ f(z) = f(2z).$$

Exercice 599 On considère la série entière $f(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$.

1. Montrer que f admet un prolongement analytique sur un ouvert que l'on déterminera.
2. Déterminer le développement en série entière de ce prolongement en i. Quel est son rayon de convergence ?

Exercice 600 Soit $F_1(z) = \int_0^{+\infty} e^{-(z+1)^2 t} dt$.

1. Déterminer l'ouvert E sur lequel F_1 définit une fonction holomorphe.
2. Montrer que F_1 se prolonge analytiquement en une fonction F sur un ouvert que l'on déterminera. Calculer $F(2-4i)$.

Exercice 601 Existe-t-il des fonctions f holomorphes sur $D(0,1)$ telles que pour tout entier $n > 0$

1. $f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}$?
2. $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$?
3. $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n^3}$?

Exercice 602 Déterminer explicitement pour $a \in \mathbb{R}$

$$\max_{|z|\leqslant 1} |z^2 + 2aiz + 1|.$$

Exercice 603 Soient $P_1, P_2, \dots, P_k$ k points du plan. On désigne par $d(A,B)$ la distance entre deux points A et B du plan. Soit D un ouvert connexe borné du plan. Montrer que le sup de $\prod_{1\leqslant j\leqslant k} d(M, P_j)$ sur D est atteint sur la frontière de D.

Exercice 604 Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω et ne s'annulant pas sur Ω. On suppose qu'il existe $a \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ tels que $|f(z)| \geqslant |f(a)|$ pour $|z-a| < \varepsilon$. Montrer que f est constante.

Exercice 605 Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe sur Ω, continue sur $\overline{\Omega}$, non constante, telle que $|f|$ est constant sur la frontière de Ω. Montrer que f admet un zéro dans Ω.

Exercice 606 Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ contenant le disque fermé $\{z \in \mathbb{C}|\ |z-z_0| \leqslant r\}$, et f une fonction holomorphe sur Ω telle que $f(z) \in \mathbb{R}$ si $|z-z_0| = r$. Montrer que f est constante (considérer e^{if}).

Exercice 607 Soient f et g deux fonctions holomorphes et ne s'annulant pas dans un ouvert connexe Ω contenant le disque unité fermé. On suppose que pour $|z| = 1$, $|f(z)| = |g(z)|$ et que $f(0)$ et $g(0)$ appartiennent à $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $f = g$ sur Ω.

Exercice 608 Soit f une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}|\ |z| < R\}$. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour $|z| < R$, on pose pour $0 \leqslant r < R$:

$$M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|,\ M_1(r,f) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n,$$

$$M_2(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta\right)^{1/2}.$$

1. (a) Montrer que pour $0 \leqslant r < R$,
$$M_2(r,f) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}\right)^{1/2}.$$
   (b) Déduire de (a) que $r \mapsto M_2(r,f)$ est une fonction continue croissante.
   (c) Déduire de (a) une autre démonstration des inégalités de Cauchy.
2. (a) Montrer que pour $0 \leqslant r < r\alpha < R$, on a
$$M(r,f) \leqslant M_1(r,f) \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1} M(\alpha r, f)$$
   (pour démontrer la seconde inégalité, on pourra utiliser les inégalités de Cauchy).
   (b) Montrer que la fonction $r \mapsto M(r,f)$ est continue et croissante, et même strictement croissante si f n'est pas constante.

3. On rappelle que si les deux séries $\sum_{n\geqslant 0}|\alpha_n|^2$ et $\sum_{n\geqslant 0}|\beta_n|^2$ convergent (où $\alpha_n\in\mathbb{C}$ et $\beta_n\in\mathbb{C}$), la série $\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n\overline{\beta_n}$ converge et on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\left|\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n\overline{\beta_n}\right|^2\leqslant\left(\sum_{n\geqslant 0}|\alpha_n|^2\right)\left(\sum_{n\geqslant 0}|\beta_n|^2\right).$$
Montrer que pour $\alpha\in]0,1[$, on a
$$\sqrt{1-\alpha^2}M_1(r\alpha,f)\leqslant M_2(r,f)\leqslant M(r,f).$$
4. En utilisant les questions 2. et 3., montrer que si $0\leqslant r<R$,
$$\lim_{n\to\infty}M_1(r,f^n)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}M_2(r,f^n)^{1/n}=M(r,f)$$
(on pourra remarquer que $M(r,f^n)=M(r,f)^n$).

Exercice 609 Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle dans un ouvert Ω connexe contenant le disque fermé $\overline{D(z_0,r)}$. Soit γ le cercle $\{z|\ |z-z_0|=r\}$ orienté positivement.

1. Montrer que f a un nombre fini de zéros dans $D(z_0,r)$.
2. On suppose que f n'a pas de zéros sur γ^*. Calculer $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}z^p dz$ pour $p=0,1,\ldots$ (utiliser les zéros de f dans $D(z_0,r)$).
3. On suppose toujours que f n'a pas de zéros sur γ^*. On prend $p=0$. Montrer que l'intégrale précédente est égale au nombre total de zéros de f dans $D(z_0,r)$. Montrer que ce nombre est aussi l'indice du point 0 par rapport à la courbe fermée $\Gamma=f(\gamma)$.
4. Soit $w_0=f(z_0)$ et n la multiplicité du zéro z_0 pour la fonction $f(z)-w_0$. Montrer que l'on peut choisir $\varepsilon>0$ tel que $f'(z)$ ne s'annule pas pour $0<|z-z_0|<\varepsilon$, et qu'il existe un $\delta>0$ tel que pour tout a avec $|a-w_0|<\delta$, l'équation $f(z)=a$ a exactement n racines dans le disque $|z-z_0|<\varepsilon$.
5. En déduire le principe du maximum : si f est holomorphe et non constante dans Ω, alors $|f|$ n'a pas de maximum dans Ω.

Exercice 610 Soit D le disque unité ouvert :
$$D=\{z\in\mathbb{C}|\ |z|<1\}$$
et C le cercle unité :
$$C=\{z\in\mathbb{C}|\ |z|=1\}.$$
Pour $a\in D$, on considère l'application homographique Φ_a :
$$\Phi_a(z)=\frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

1. Montrer que $\Phi_a(C)\subset C$, puis que Φ_a est une bijection de D sur lui-même, de réciproque Φ_{-a}.
2. Soit f un biholomorphisme de D, c'est-à-dire une fonction holomorphe de D sur lui-même, bijective, telle que f^{-1} soit aussi holomorphe. Soit $a=f^{-1}(0)$. En considérant $f\circ(\Phi_a)^{-1}$ et sa réciproque, montrer qu'il existe $\varphi\in\mathbb{R}$ tel que
$$\forall z\in D,\ f(z)=e^{i\varphi}\Phi_a(z),$$
c'est-à-dire qu'à rotation près, les seuls biholomorphismes du disque sont les Φ_a.

Exercice 611 Soit D le disque unité ouvert et f une fonction holomorphe de D dans lui-même. Soit Φ_a la fonction définie dans l'exercice précédent. Quelle est l'image de 0 par $h=\Phi_{f(a)}\circ f\circ(\Phi_a)^{-1}$? En déduire que pour tout z de D,
$$\left|\frac{f(z)-f(a)}{1-\overline{f(a)}f(z)}\right|\leqslant\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|$$
puis
$$|f'(a)|\leqslant\frac{1-|f(a)|^2}{1-|a|^2}$$
(lemme de Schwarz-Pick).

Exercice 612 Soit D le disque unité ouvert et f une fonction holomorphe de D dans D. On suppose que f admet au moins deux points fixes, c'est-à-dire qu'il existe a et b dans D , $a \neq b$, tels que $f(a) = a$ et $f(b) = b$. Montrer que f est l'identité de D. On pourra utiliser l'application Φ_a définie dans l'exercice 610 pour se ramener au cas où l'un des points fixes est 0.

Exercice 613 Soit D le disque unité ouvert. On dira qu'une fonction E est unitaire si elle est holomorphe dans D, continue sur $\overline{D}$ et si $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$.

1. Montrer qu'une fonction unitaire dans D n'a qu'un nombre fini de zéros.
   Montrer qu'une fonction unitaire sans zéro est une constante.
   Montrer qu'une fonction unitaire ayant les points $a_1, a_2, \dots, a_n$ pour zéros (chacun étant compté avec son ordre de multiplicité) s'écrit
   $$E(z) = c \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j} z}.$$
2. Soit f holomorphe sur D et non identiquement nulle et supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leqslant M$ sur D. Soit E une fonction unitaire dans D et telle que $f(z)/E(z)$ soit holomorphe dans D. Montrer que l'on a
   $$\forall z \in D,\ |f(z)| \leqslant M|E(z)|.$$
   Soit $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ la suite des zéros de f dans D, chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Montrer que
   $$\forall n \geqslant 1,\ |f(0)| \leqslant M|a_1||a_2| \cdots |a_n|.$$
   En déduire que si $f(0) \neq 0$, la série $\sum_{n \geqslant 1}(1 - |a_n|)$ converge.

Exercice 614 Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Soit D le disque unité fermé.

1. Supposons que f n'a pas de zéros dans D. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = k$ pour tout z de $\mathbb{C}$.
2. Soit $a_1, \dots, a_n$ (pourquoi un nombre fini ?) les zéros de f dans D , chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. En étudiant la fonction
   $$g(z) = f(z) \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - \overline{a_j} z}{z - a_j}$$
   montrer qu'il existe $k \in \mathbb{C}$, $|k| = 1$, et $n \in \mathbb{N}$ tels que $f(z) = kz^n$.

Exercice 615 (Théorème des trois cercles d'Hadamard) Soit f une fonction holomorphe dans un domaine contenant la couronne fermée constituée par les $z \in \mathbb{C}$ tels que $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$ (où $0 < r_1 < r_2$). On pose $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ pour $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$.

1. Montrer qu'il existe un nombre réel α tel que $r_1^\alpha M(r_1) = r_2^\alpha M(r_2)$.
2. Montrer que
   $$M(r) \leqslant M(r_1)^{\frac{\ln r_2 - \ln r}{\ln r_2 - \ln r_1}} M(r_2)^{\frac{\ln r - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1}}$$
   (on appliquera le principe du maximum à la fonction $z^p f(z)^q$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, puis on considèrera une suite (p_n, q_n), $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$, telle que $\lim_{n \to \infty} p_n/q_n = \alpha$).

28 Singularités

Exercice 616 Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \dfrac{z}{\sin z + i \sinh z}$ se prolonge en une fonction holomorphe en 0 ; quel est le rayon de son développement en 0 ?

Exercice 617
1. Déterminer les développements en série de Laurent de $f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}$ dans les domaines $D = D(0,1)$, $C_1 = \{1 < |z| < 3\}$ puis $C_2 = \{|z| > 3\}$.
2. Déterminer les développements en série de Laurent de $f(z) = \frac{z}{z-1} e^z$ dans les domaines $C_1 = \{|z| < 1\}$ puis $C_2 = \{|z| > 1\}$.

Exercice 618 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que le développement en série de Laurent en 0 de la fonction $f(z) = \exp\frac{\alpha}{2}(z+\frac{1}{z})$ est de la forme $a_0 + \sum_{n\geqslant 1} a_n(z^n + \frac{1}{z^n})$, où

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(\alpha\cos t)\, dt, \quad a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(\alpha\cos t)\cos(nt)\, dt \text{ si } n \geqslant 1.$$

(Calculer f pour $|z| = 1$ et conclure avec le prolongement analytique.)

Exercice 619 Développer les fonctions suivantes en série de Laurent dans chacun des ouverts donnés

1. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ dans $|z| < 1$; $1 < |z| < 2$; $2 < |z|$;
2. $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^k}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) dans $|z| < |a|$ et dans $|z| > |a|$;
3. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-a)}$ dans $0 < |z| < |a|$ et dans $|a| < |z|$;
4. $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ ($0 < |a| < |b|$) dans $0 < |z| < |a|$; $|a| < |z| < |b|$; $|b| < |z|$;
5. une détermination holomorphe f de $[(z-a)(z-b)]^{\frac{1}{2}}$ ($0 < |a| = |b|$) dans $0 < |z| < |a|$; $|b| < |z|$;
6. $f(z) = z^2 \exp\left(z^{-1}\right)$ dans $0 < |z|$.
7. $f(z) = \exp\left(z + z^{-1}\right)$ dans $0 < |z|$.
8. $f(z) = \sin z \cdot \sin\left(z^{-1}\right)$ dans $0 < |z|$.
9. $f(z) = \mathrm{cotan} z$ dans $k\pi < |z| < (k+1)\pi$ ($k \in \mathbb{N}$) on pourra exprimer le résultat en fonction des nombres B_n de Bernoulli, définis par :
$$\frac{z}{\exp(z) - 1} = \sum_{n\geqslant 0} B_n \frac{z^n}{n!}$$
($B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, et $B_{2n+1} = 0$ pour $n \geqslant 1$).

Exercice 620 Déterminer la couronne de convergence des séries de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a^{|n|}z^n$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|!z^n$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} R(n)z^n$ (R fonction rationnelle sans pôles dans $\mathbb{Z}$).

Exercice 621 Soit un ouvert U de $\mathbb{C}$ et f une fonction définie sur U admettant en tout point a de U un développement de Laurent
$$f(z) = \sum_{n\geqslant r_a} c_n(z-a)^n$$
($r_a \in \mathbb{Z}$) convergeant dans un disque pointé $0 < |z-a| < R_a$. Montrer que pour tout compact $K \subset U$, il existe une fonction rationnelle g_K nulle à l'infini et telle que la fonction $f - g_K$ soit holomorphe sur un voisinage de K (f est dite méromorphe sur U).

Exercice 622 Déterminer les points singuliers des fonctions suivantes, puis donner la nature de ces points singuliers (singularité effaçable, pôle d'ordre n, singularité essentielle isolée, accumulation de points singuliers).

1. $$z \mapsto \frac{1}{z(z^2+4)^2}$$
2. $$z \mapsto \frac{1}{\exp(z) - 1} - \frac{1}{z}$$
3. $$z \mapsto \sin\frac{1}{1-z}$$
4. $$z \mapsto \exp\frac{z}{1-z}$$
5. $$z \mapsto \mathrm{cotan} z - \frac{1}{z}$$

6.
$$z \mapsto \text{cotan}\frac{1}{z}$$

7.
$$z \mapsto \frac{1}{\sin z - \sin a}$$

8.
$$z \mapsto \sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right)$$

9.
$$z \mapsto \exp\left(\tan\frac{1}{z}\right)$$

Exercice 623 Exhiber des fonctions n'ayant dans le plan complexe que les singularités suivantes :

1. un pôle triple en 0, un pôle simple en 1 et un point singulier essentiel en i et $-i$.
2. un point singulier essentiel en tout entier.

Exercice 624 Déterminer les singularités isolées a des fonctions f suivantes et calculer $\text{Res}(f, a)$.

$$\begin{array}{lll} 1. z \mapsto \dfrac{1}{z^3 - z^5} & 2.\ z \mapsto \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2} & 3.\ z \mapsto \exp\left(z + z^{-1}\right) \\ 4.\ z \mapsto \dfrac{\sin(2z)}{(z+1)^3} & 5.\ z \mapsto \cos\left(\dfrac{z^2+4z-1}{z-3}\right) & 6.\ z \mapsto z^n \sin\left(\dfrac{1}{z}\right) \end{array}$$

Exercice 625 Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe sur $U \setminus S$ où S est une partie fermée discrète de U. Montrer que f a une primitive sur $U \setminus S$ si et seulement si pour tout point s de S, le résidu de f au point s est nul.

Exercice 626 Calculer les intégrales suivantes, où les chemins fermés simples γ sont parcourus dans le sens direct.

1. $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} dz$ où γ est le cercle $|z-2| = \frac{1}{2}$;
2. $\displaystyle\int_\gamma \frac{\exp z}{z^2(z-9)^2} dz$ où γ est le cercle $|z| = 1$;
3. $\displaystyle\int_\gamma \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz$ où γ est le cercle $|z| = 1$;
4. $\displaystyle\int_\gamma \sin^2\left(\frac{1}{z}\right) dz$ où γ est le cercle $|z| = r$;
5. $\displaystyle\int_\gamma (z^2+z+1)^{-1/2}\, dz$ où γ est le cercle $|z| = r \neq 1$.

29 Intégrales curvilignes

Exercice 627 Calculer $\int_C (x+2y)\, dx + (y-2x)\, dy$ le long de l'ellipse C définie par $x = 4\cos\theta$, $y = 3\sin\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Exercice 628 Calculer $\int_C (z^2+3z)\, dz$ le long des chemins suivants :

1. le cercle $|z| = 2$ du point (2,0) au point (0,2)
2. le segment de droite joignant les points (2,0) et (0,2)
3. le contour polygonal formé par les segments de droite joignant (2,0) à (2,2) et (2,2) à (0,2)

Exercice 629 Calculer $\int_C \frac{dz}{(z-a)^n}$ pour $n = 1, 2, 3\ldots$, où C est un cercle de centre a.

Exercice 630 Soit $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ des fonctions continues à valeurs réelles et à dérivées partielles continues sur un ouvert connexe Ω et sur sa frontière C. La formule de Green établit que

$$\int_C P dx + Q dy = \int\int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

1. Montrer la formule de Green pour une courbe fermée simple C ayant la propriété d'être rencontrée par des parallèles aux axes de coordonnées en deux points au plus.
2. Si $f(z,\overline{z}) = u(x,y) + iv(x,y)$ est continue et possède des dérivées partielles continues dans un ouvert connexe Ω et sur sa frontière C, montrer que la formule de Green peut s'écrire sous la forme complexe suivante
$$\int_C f(z,\overline{z})dz = 2i \int\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dxdy$$
3. Si C est une courbe fermée simple délimitant un ouvert d'aire A, montrer que $A = \frac{1}{2i}\int_C \overline{z}dz$.
4. Calculer $\int_C \overline{z}dz$ le long
   (a) du cercle $|z-2| = 3$
   (b) du carré de sommets $z = 0$, $z = 2$, $z = 2i$ et $z = 2+2i$
   (c) de l'ellipse $|z-3| + |z+3| = 10$

Exercice 631 Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω. Soit c un point de Ω et $r_0 > 0$ tel que $D(c,r_0) \subset \Omega$, où $D(c,r_0)$ est le disque ouvert de centre c et de rayon r_0. On pose $\mu(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(c+re^{i\theta})d\theta$ pour $0 < r < r_0$.

1. Montrer que
$$\lim_{r\to 0^+} \mu(r) = f(c)$$
2. On suppose $f'(z)$ continue. Montrer que μ est constante (on montrera que $\dfrac{d\mu}{dr} = 0$ en dérivant sous le signe d'intégration).
   Soit maintenant $M = \sup_{z\in\Omega}|f(z)|$ et on suppose qu'il existe $c \in \Omega$ tel que $|f(c)| = M$.
3. Montrer que $M = |f(c+re^{i\theta})$ où $r > 0$ est tel que $D(c,r) \subset \Omega$.
4. Soit $V = \{z \in \Omega|\ |f(z)| = M\}$. Montrer que V est à la fois un ouvert et un fermé de Ω. En déduire le principe du maximum : si f atteint son maximum en un point d'un ouvert connexe Ω, alors f est constante.

Exercice 632
1. Soit $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$. Montrer que $\int_{\gamma_R} f(z)\ dz$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$, où $\gamma_R(t) = Re^{it}$ $(t \in [0,\pi])$.
2. Déduire de 1. la valeur de
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

Exercice 633 Si γ est l'arc de courbe $\gamma(t) = t + i(t^3 - 3t^2 + 4t - 1)$ joignant les points (1,1) et (2,3), trouver la valeur de
$$\int_\gamma (12z^2 - 4iz)\ dz$$

Exercice 634
1. Calculer l'intégrale $I = \int_\gamma \overline{z}\ dz$ où γ est le chemin joignant le point $(1,1)$ au point $(2,4)$ suivant la parabole $y = x^2$; puis le segment joignant ces points. Qu'obtient-on avec $\int_\gamma z\ dz$?
2. Soit $\gamma = e^{2i\pi t}, t \in [0,1]$ et f continue sur γ^* le cercle unité dans $\mathbb{C}$. Comparer $\int_\gamma \overline{f(z)}\ \frac{dz}{z^2}$ et $\int_\gamma f(z)\ dz$.

Exercice 635 Soit f une fonction continue du quart de plan $\{x+iy;\ x,y \geqslant 0\}$ dans $\mathbb{C}$ et C le quart de cercle paramétré par $\{re^{it};\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\}$ avec $r > 0$. On pose $M(r) = \sup_{z\in C}|f(z)|$. Montrer que si $\lim_{r\to\infty} M(r) = 0$, alors $\lim_{r\to\infty}\int_C f(z)e^{iz}\ dz = 0$.

Exercice 636 Soit $w = |w|e^{i\theta}$ un nombre complexe.

1. Montrer que $e^w - 1 = \int_{[0,w]} e^z\ dz = \int_0^{|w|} e^{te^{i\theta}}e^{i\theta}\ dt$; montrer ainsi l'inégalité $|e^w - 1| \leqslant |w|e^{|w|}$ (autre démonstration ?).
2. Application. On considère K un compact du plan inclus dans $\mathbb{C}^*$ et la suite de fonctions v_n définie sur K par $v_n(z) = \frac{1}{z(1+\frac{1}{n})^z}$. Montrer que $v_n(z)$ tend vers $\frac{1}{z}$ uniformément sur K.

Exercice 637 Soit φ une fonction continue sur le bord orienté ∂K d'un compact K ; soit $\Omega = \mathbb{C}\backslash\partial K$: pour $z \in \Omega$, on définit
$$f(z) = \int_{\partial K} \frac{\varphi(u)}{u-z}\ du.$$
On va établir que f est holomorphe dans Ω. Fixons $a \in \Omega$ et posons $r = d(a,\partial K) > 0$.

1. Soit $0 < \rho < r$ et $z \in \bar{B}(a,\rho)$. Montrer, en développant $\frac{1}{u-z}$ en série entière de $z-a$, que f est somme d'une série entière au voisinage de a ; en déduire que $f \in H(\Omega)$.
2. Montrer que f est indéfiniment dérivable en tout point a de Ω et que

$$f^{(n)}(a) = n! \int_I \frac{\varphi(u)}{(u-a)^{n+1}}\, du.$$

30 Théorème des résidus

Exercice 638 1. Calculer les résidus aux différents pôles de la fonction $f(z) = \frac{z^2+z+1}{z(z^2+1)^2}$; $f(z) = \dfrac{1}{1+z+\cdots+z^{n-1}}$; $f($
$\dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{z}$.

2. Montrer que si $f(z) = (z-a)^{-n}g(z)$ où g est holomorphe dans Ω ouvert contenant a, alors $\mathrm{Res}(f,a) = \dfrac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$. Trouver les pôles et résidus des fonctions suivantes : $\dfrac{1-\cos z}{z^3}$, $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, $\dfrac{1}{(1+z^2)^n}$.

Exercice 639 (Intégrales de fonctions trigonométriques) Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{3-2\cos t}\, dt$ (poser $z = e^{it}$).

Exercice 640 (Intégrales de fractions rationnelles sans pôle sur $\mathbb{R}$) 1. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^{2n}}$, $n \geqslant 2$, en intégrant $\dfrac{1}{1+z^{2n}}$ sur un demi-cercle.

2. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

Exercice 641 (Utilisation du logarithme) 1. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$, en intégrant $\dfrac{\log z}{1+z^3}$ sur un cercle privé de $\mathbb{R}^+$, log désignant ici la détermination du logarithme avec coupure sur $\mathbb{R}^+$.

2. En choisissant la même détermination du logarithme et le même contour, calculer simutanément les intégrales $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^4}$ et $J = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{Ln}x}{1+x^4}\, dx$. (Intégrer cette fois $\dfrac{(\log z)^2}{1+z^4}$.)
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Ln}x}{1+x^n}\, dx$, $n \geqslant 2$, en intégrant $\dfrac{\log z}{1+z^n}$ sur un secteur épointé bien choisi.

Exercice 642 (septembre 1999) Soit a un réel tel que $0 \leqslant a < 1$

1. Démontrer que les intégrales $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(ax)}{\sinh(x)}\, dx$ et $J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cosh(ax)}{\cosh(x)}\, dx$ sont convergentes.
2. Soit ε et R des réels tels que $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2} < R$, $K_{\varepsilon,R} \subset \mathbb{C}$ le compact obtenu en ôtant du rectangle de sommets $R, R+i\frac{\pi}{2}, R+i\frac{\pi}{2}, -R$, la demi-boule ouverte de centre 0 et de rayon ε, et $f(z) = \dfrac{e^{az}}{e^z - e^{-z}}$.
   (a) Montrer que $\lim_{R\to+\infty} \int_\gamma f(z)\, dz = 0$ lorsque γ est le segment $[R, R+i\frac{\pi}{2}]$; puis le segment $[-R + i\frac{\pi}{2}, -R]$.
   (b) Calculer $\int_{\partial K_{\varepsilon,R}} f(z)\, dz$ et la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ et $R \to +\infty$; en déduire les expressions de $I(a)$ et $J(a)$.

Exercice 643 Soit a un réel > 0 et $\mathrm{Log}z$ la détermination principale du log sur $\mathbb{C}\backslash R^-$. En intégrant la fonction $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)\ \mathrm{Log}z}$ sur un contour $\Gamma_{\varepsilon,R}$ constitué du cercle de rayon R évitant le demi-axe $\mathbb{R}^-$, montrer que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(\mathrm{Ln}^2 x + \pi^2)} = \frac{\pi}{2a(\mathrm{Ln}^2 a + \pi^2/4)} - \frac{1}{1+a^2}.$$

Exercice 644 (Calcul d'intégrales semi-convergentes) 1. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x}\, dx$ en intégrant $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$ sur un contour bien choisi.

2. Calculer de même $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2-1}{x^2+1} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Exercice 645 (Calcul de transformées de Fourier) 1. Calculer la transformée de Fourier de $\dfrac{1}{1+x^4}$ en intégrant $\frac{e^{itz}}{1+z^4}$ sur un demi-cercle dans un demi-plan bien choisi.

2. Calculer $I(m,a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{(1+x^2)(x^2+a^2)}\, dx$ en distinguant les cas $a = 1, a \neq 1$. Vérifier que $I(m,1) = \lim_{a\to 1} I(m,a)$.

   En déduire sans nouveaux calculs la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \sin mx}{(1+x^2)^2}\, dx$.

Exercice 646 Soit P et Q deux polynômes tels que $\deg Q > \deg P$.

1. Exprimer $\sum \mathrm{Res}(\frac{P}{Q})$ à l'aide des coefficients de P et Q.
2. Soit $P(z) = z^n + \sum_0^{n-1} a_k z^k$ un polynôme dont toutes les racines sont dans $D(0,R)$. Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_{\Gamma_R} \frac{e^{xz}}{P(z)}\, dz$ est la solution de l'équation différentielle d'ordre n, $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$ de condition initiale $y^{(j)}(0) = 0$ si $j < n-1$ et $y^{(n-1)}(0) = 1$.

Exercice 647 Calculer

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t}$ $(a > 1)$;
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a+b\cos t)^2}$ $(a > b > 0)$;
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 3t}{1-2a\cos t + a^2}\, dt$ $(a \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\})$;
4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \exp(\cos t) \cos(nt - \sin t)\, dt$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Exercice 648 Dans cet exercice, on justifiera soigneusement chaque passage à la limite. Calculer les intégrales :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6}\, dx$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x)}\, dx$, $0 < \alpha < 1$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx$ (on pourra considérer la fonction $\dfrac{1-e^{2ix}}{x^2}$)
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}\, dx$ (on pourra utiliser le rectangle de sommets $-R$, R, $R+i\pi$, $-R+i\pi$)
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Log}^2 x}{1+x^2}\, dx$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Log}\, x}{(1+x)^3}\, dx$

Exercice 649 Soit $f(z) = z^5 + 5z^3 + z - 2$. Montrer que f a trois de ses zéros dans le disque $D(0,1)$ et tous ses zéros dans le disque $D(0,3)$.

Exercice 650 Soit c un nombre complexe vérifiant $|c| > e$. Montrer que l'équation $e^z = cz$ a une solution et une seule dans $H = \{ z \in \mathbb{C} \mid \Re e z < 1 \}$. (On pourra considérer $D_r = H \cap D(1,r)$ avec $r \geqslant 2$ et les fonctions $e^z - cz$ et $-cz$.)

Exercice 651 En utilisant le théorème de Rouché, démontrer le théorème de d'Alembert.

Exercice 652 Soit $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, $n \geqslant 1$, $a_j \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un point c de $\partial D(0,1)$ tel que l'on ait $|P(c)| \geqslant 1$.

Exercice 653 Montrer que, si f est holomorphe au voisinage de $\overline{D(0,1)}$ et si $f(\partial D(0,1)) \subset D(0,1)$, alors il existe un z_0 et un seul dans $D(0,1)$ tel que l'on ait $f(z_0) = z_0$.

Exercice 654 En utilisant le théorème de Rouché, on se propose de donner une preuve du théorème d'inversion local "holomorphe" n'utilisant pas le théorème d'inversion local dans $\mathbb{R}^2$.
Soit donc f une fonction holomorphe au voisinage d'un point z_0 de $\mathbb{C}$ telle que $f'(z_0) \neq 0$. On suppose sans restreindre la généralité que $z_0 = 0$, $f(z_0) = 0$, et $f'(z_0) = 1$.

1. Montrer qu'il existe un voisinage V de z_0 et une constante $K > 0$ tel que l'on ait, pour tout z dans V, $|f(z) - z| \leqslant K\,|z^2|$.
2. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, si l'on a $|\alpha| < r/2$, l'équation $f(z) = \alpha$ a une solution unique dans le disque $D(0, r)$.
3. Montrer enfin qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{C}$ tel que f soit une bijection de U sur le disque $D(0, r/2)$.
4. En déduire que $g = f^{-1}$ est continue sur le disque $D(0, r/2)$ et, de là, que g est holomorphe dans ce disque.

Exercice 655 On considère la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$.

1. Montrer que cette série converge normalement sur tout compact K de $\mathbb{C}$. En déduire que $f(z) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Vérifier que l'on a $f(z+1) = f(z)$.
2. Déterminer le résidu de f en chacun de ses pôles. Montrer que, si l'on note $z = x + iy$, $f(z)$ tend vers 0, uniformément par rapport à x, lorsque $|y|$ tend vers ∞.
3. Montrer que $f(z) = \left(\dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$. (On pourra utiliser le théorème de Liouville.) En déduire que l'on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 656 Soit γ_n le chemin dont l'image γ_n^* est le rectangle de sommets $\pm(n + \frac{1}{2}) \pm in$ parcouru une fois dans le sens direct. Evaluer pour $a \notin \mathbb{Z}$

$$\int_{\gamma_n} \frac{\pi \mathrm{cotan}(\pi z)}{(z+a)^2}\, dz\ .$$

Montrer que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} \frac{\pi \mathrm{cotan}(\pi z)}{(z+a)^2}\, dz = 0\ .$$

(On pourra établir auparavant que, si z appartient à γ_n^* et si n est assez grand, on a $|\mathrm{cotan}(\pi z)| \leqslant 2$.) En déduire (cf. exercice 655) que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(a+n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi a)}\right)^2$.

31 Fonctions Zeta et autres...

31.1 Divers

Exercice 657 Montrer que

$$\prod_{n\geqslant 1} \left(1 + \frac{e^{-nz}}{n^2}\right)$$

définit une fonction holomorphe sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C} |\ \Re e z > 0\}$.

Exercice 658 On se propose de démontrer que pour tout z de $\mathbb{C}$,

$$\prod_{n\geqslant 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$$

1. On pose

$$F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}, n\neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

Montrer que F est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

En utilisant

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$$

montrer que $F(z) - \dfrac{\pi}{\tan(\pi z)}$ est constante sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, puis calculer cette constante par un argument de parité. En déduire que

$$\frac{\pi}{\tan(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{2z}{z^2-n^2}$$

2. Pour $n \geqslant 1$, soit $f_n(z) = 1 - \dfrac{z^2}{n^2}$. Montrer que $\prod_{n\geqslant 1} f_n(z)$ définit une fonction entière f.
   Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)}$$

   avec $g(z) = \dfrac{\sin(\pi z)}{\pi z}$. En déduire le résultat voulu.
3. Déduire de la décomposition de $\dfrac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ en produit que

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sh} z}{z} &= \prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)\\
\operatorname{ch} z &= \prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\\
\cos z &= \prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 659 On pose $F(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zx^2}\,dx$.
1. Montrer que F est holomorphe sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C} | \Re e z > 0\}$. Calculer $F'(z)$ en fonction de $F(z)$.
2. En déduire une autre expression de $F(z)$ pour $z \in \Omega$ (on pourra utiliser $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$). Conclure enfin que la fonction F se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$.

Exercice 660 (Fonction ζ de Riemann) On introduit la fonction “Zeta” :

$$\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$$

I Produit d’Euler Montrer que ζ est holomorphe dans l’ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C} |\ \Re e z > 1\}$.
Soient $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots, p_n, \ldots$ la suite des nombres premiers. Montrer que dans Ω, on a

$$\zeta(s) = \prod_{n\geqslant 1} \frac{1}{1-p_n^{-s}}$$

(produit d’Euler).

II Relation de ζ avec la répartition des nombres premiers
1. Montrer que

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n\geqslant 1} \lambda(n) n^{-s}$$

   où $\lambda(n) = \ln p$ si n est une puissance d’un nombre p premier et $\lambda(n) = 0$ si n a au moins deux diviseurs premiers distincts.
2. On a le théorème suivant :
   Théorème des nombres premiers (Hadamard-De la Vallée Poussin 1896) : Lorsque x tend vers $+\infty$, la somme des $\lambda(n)$ pour $n \leqslant x$ est équivalente à x.
   Démontrer que cette assertion est équivalente à dire que le nombre de nombres premiers plus petits que x est équivalent à $x/\ln x$.

III Equation fonctionnelle de ζ, démonstration par la formule de Poisson Soit

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$$

θ vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall t > 0,\ \theta\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{t}\theta(t)$$

On pose

$$\psi(t) = \sum_{n\geqslant 1} e^{-\pi n^2 t}$$

On a évidemment $\theta(t) = 1 + 2\psi(t)$.

1. Soit s tel que $\Re e s > 1/2$. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s-1}\ dt$ en fonction de n et $\Gamma(s)$. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \psi(t) t^{s-1}\ dt = \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)$$

2. Montrer que F définie par

$$F(z) = \int_1^{+\infty} \psi(t) t^z\ dt$$

est une fonction entière. En écrivant

$$\int_0^{+\infty} \psi(t)t^z\ dt = \int_0^1 \psi(t)t^z\ dt + \int_1^{+\infty} \psi(t)t^z\ dt$$

et en effectuant dans la première partie de la somme le changement de variable $u = 1/t$, puis en utilisant l'équation fonctionnelle de θ, montrer que la fonction L :

$$L(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

se prolonge en une fonction entière, invariante par la transformation s donne $1-s$. Montrer alors que ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, ayant 1 pour seule singularité (pôle simple). Montrer enfin que $\mathrm{Res}(\zeta, 1) = 1$.

IV Equation fonctionnelle de ζ, démonstration par le théorème des résidus

1. Soit s tel que $\Re e(s) > 1$. Par la même méthode qu'au III.1., montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\ dt = \Gamma(s)\zeta(s)$$

2. Pour tout s de $\mathbb{C}$, on définit F_s sur $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$:

$$F_s(z) = \frac{\exp\left[(s-1)\,\mathrm{Log}\,(-z)\right]}{\exp z - 1}$$

où Log est la détermination principale du logarithme. On définit également le contour $A_{\varepsilon,\varphi}$:
Calculer

$$\lim_{\varphi\to 0} \int_{A_{(\varepsilon,\varphi)}} F_s(z)\ dz$$

Montrer que pour $\Re e s > 1$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\lim_{\varphi\to 0}\int_{A_{(\varepsilon,\varphi)}} F_s(z)\ dz\right) = 2i\sin(\pi z)\Gamma(s)\zeta(s)$$

Montrer que $\int_{A_{(\varepsilon,\varphi)}} F_s(z)\ dz$ est en fait indépendant de $\varepsilon \in]0,1[$, puis que

$$s \mapsto \lim_{\varphi\to 0}\int_{A_{(\varepsilon,\varphi)}} F_s(z)\ dz$$

est une fonction entière. En déduire que $\sin(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s)$ se prolonge en une fonction entière.

3. Soit $C_{n,\varepsilon,\varphi}$ le chemin fermé :
   En appliquant la formule des résidus à F_s sur $C_{n,\varepsilon,\varphi}$ pour $\Re e s < 0$, montrer que
$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\},\ \zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s)$$
4. Déduire de 3. que
$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},\ \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$
   En utilisant l'équation fonctionnelle de **III**, montrer alors que
$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},\ \Gamma(s) = \frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

Exercice 661 Soit f holomorphe sur $\mathbb{C}$, réelle sur l'axe réel, imaginaire pure sur l'axe imaginaire. Montrer que f est impaire.

Exercice 662 Montrer que toute fonction f holomorphe dans un ouvert connexe Ω symétrique par rapport à l'axe réel peut s'écrire $f = f_1 + if_2$, où f_1 et f_2 sont holomorphes dans Ω et réelles sur l'axe réel.

Exercice 663 Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité D, continue sur $\overline{D}$, telle que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Montrer que f est rationnelle.

31.2 Transformations de $\mathbb{C}$

Exercice 664 Donner un biholomorphisme entre les ouverts
$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| > 1,\ \Im m z > 0\} \text{ et } \Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1,\ \Im m z > 0\}$$

Exercice 665 Montrer que la transformation
$$w = \left(\frac{1+z^m}{1-z^m}\right)^2,$$
où $m \in \mathbb{N}^*$, définit une représentation conforme de
$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} |\ z = re^{i\theta},\ 0 < r < 1,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{m}\right\}$$
sur le demi-plan supérieur.

Exercice 666 Soit Ω le demi-plan $\Im m z > 0$ privé du disque fermé de centre i et de rayon 1. Trouver l'image de Ω par la transformation $w = \coth(\pi/z)$.

Exercice 667 Soit C une couronne circulaire excentrique. Montrer qu'il existe une transformation homographique appliquant C sur une couronne concentrique.

Cinquième partie

Algèbre et théorie des nombres

32 Groupes

Exercice 668
1. Soit l'ensemble $E = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ muni de l'opération binaire $(x_1, y_1)*(x_2, y_2) = (x_1x_2,\ x_2y_1+y_2)$. Est-ce que $(E, *)$ est un monoïde ? Un groupe ? Est-ce que l'opération est commutative ?
2. Mêmes questions pour l'ensemble de matrices
$$M := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a+b = c+d\right\},$$
   muni de la multiplication des matrices.

Exercice 669 Soit l'ensemble $G = [0, 1[$ muni de la loi de composition interne $x*y = \{x+y\}$, où $\{x\}$ represente la partie fractionelle du nombre réel x. Montrer que $(G, *)$ est un groupe. Montrer que $\mathbb{Q} \cap G$ est un sous-groupe.

Exercice 670 Soit l'ensemble de matrices

$$K := \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\} \right\} ,$$

muni de la multiplication des matrices. Montrer que c'est un groupe commutatif (abélien).

Exercice 671 Soient a, b, c les éléments d'un groupe. Montrer que l'équation $xaxba = xbc$ admet une solution et une seule.

Exercice 672 Dans le groupe des entiers modulo 11 muni de l'opération de multiplication, lesquels parmi les ensembles suivants forment des sous-groupes ?

$$(a)\{1, 3, 4, 5, 9\}, \quad (b)\{1, 3, 5, 7, 8\}, \quad (c)\{1, 8\}, \quad (d)\{1, 10\}, \quad (e)\{1, 3, 10\}.$$

Exercice 673 Montrer qu'un groupe ayant au plus 4 éléments est abélien. (*Indication* : Comparer les éléments e, a, b, ab, ba.)

Exercice 674 Lesquels des ensembles de nombres suivants sont des groupes ?

1. Les nombres irrationnels munis de l'addition ; de la multiplication ;
2. Les nombres complexes de valeur absolue 1 munis de l'addition ; de la multiplication ;
3. Les nombres complexes munis de l'opération binaire $z * z' = |z| \cdot z'$.

Exercice 675 Lesquelles parmi les tables de Cayley suivantes décrivent un groupe ?

*	a	b	c	d
a	d	c	b	a
b	c	d	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

*	a	b	c	d	e
a	e	d	b	c	a
b	c	e	d	a	b
c	d	a	e	b	c
d	b	c	a	e	d
e	a	b	c	d	e

Exercice 676 Montrer que si un ensemble E est muni d'une opération binaire qui vérifie les propriétés
– (P_1) $(ab)c = a(cb)$;
– (P_2) il existe $e \in E$ tel que $ea = a$, $\forall a$;
– (P_3) pour tout $a \in E$ il existe $b \in E$ tel que $ba = e$;
alors c'est un groupe abélien.

Exercice 677 Montrer que, dans un groupe G, pour tout élément $a \in G$, l'ensemble des $x \in G$ tels que $ax = xa$ est un sous-groupe (apellé le *centralisateur de a dans G*).
Montrer que l'ensemble des $x \in G$ tels que $ax = xa$, $\forall a \in G$, est un sous-groupe (apellé le *centre de G*).

Exercice 678 Combien de générateurs différents a un groupe cyclique d'ordre 6 ?

Exercice 679 Soit G un un groupe engendré par deux éléments x et y qui vérifient les relations $x^2 = y^3 = e$, $xy = yx$. Ecriver tous les éléments de G et sa table de multiplication.

Exercice 680 Trouver une décomposition en produit de transpositions des permutations suivantes :

1. $$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_3 ;$$
2. $$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_4 ;$$
3. $$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_5 .$$

Quelle est leur signature ?

Exercice 681 Déterminer la signature des permutations :

1. $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & n-k+1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_n \ ;$$
2. $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-p & n-p+1 & \dots & n \\ p+1 & p+2 & \dots & n & 1 & \dots & p \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_n \ ,$$
   où p est fixé, $1 \leqslant p \leqslant n-1$ et $n \geqslant 2$.

Exercice 682 Décomposer en produit de cycles à supports deux à deux disjoints les permutations suivantes

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_7 \ ,$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}_9 \ .$$

En déduire la signature.

Exercice 683 Ecrire les produits suivants comme produits de cycles disjoints.

$$(a)(1234)(567)(261)(47) \qquad (b)(12345)(67)(1357)(163) \qquad (c)(14)(123)(45)(14)$$

Trouver la signature de chaque produit.

Exercice 684
1. Vérifier que pour tout cycle $(i_1\, i_2 \dots i_p)$, $p \geqslant 2$, dans S_n et toute permutation $\sigma \in S_n$,
   $$\sigma(i_1\, i_2 \dots i_p)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\, \sigma(i_2) \dots \sigma(i_p))\,.$$
2. Vérifier que pour tous entiers distincts $i, j \in \{1, 2, \dots n\}$ on a $(i\, j) = (i\, k)(j\, k)(i\, k)$.
3. En déduire que les familles de transpositions $\{(1\, i) \mid i \in \{1, 2, \dots n\}\}$ et $\{(i\, i+1) \mid i \in \{1, 2, \dots n-1\}\}$ engendrent S_n.
4. Soient $\tau = (1\, 2)$ et $c = (1\, 2\, \dots n)$. Calculer $c^{i-1}\tau c^{1-i}$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots n-1\}$. Montrer que toute permutation de S_n s'écrit comme un produit de puissances de τ et c.

Exercice 685 Dans le groupe symétrique S_4 trouver les sous-groupes suivants

1. le sous-groupe des éléments σ tels que l'image par σ de l'ensemble $\{1, 2\}$ est $\{1, 2\}$.
2. le sous-groupe des éléments τ tels que si $a \equiv b \mod 2$ alors $\tau(a) \equiv \tau(b) \mod 2$. (*Indication* : (13)(24) fait partie de ce sous-groupe).

33 Sous-groupes, morphismes

Exercice 686
1. Trouver l'ordre des permutations suivantes
   $$(abcdef)(ghij)(klm) \ ; \quad (123456)(1234)(123)\,.$$
2. Montrer que toute permutation d'ordre 10 dans S_8 est impaire.

Exercice 687 Soit l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e\}$ qui, muni de l'opération binaire $*$, devient un groupe. Trouver la table de multiplication de ce groupe sachant que $a * b = d,\ c * a = e,\ d * c = b$.

Exercice 688
1. Soit $n \geqslant 2$ un nombre entier. Montrer que n est premier si et seulement si tout groupe d'ordre n a seulement deux sous-groupes.
2. Montrer qu'un groupe d'ordre p^m, $m \geqslant 1$, où $p \in \mathbb{N}$ est nombre premier, contient un sous-groupe d'ordre p.

Exercice 689 Montrer que les groupes suivants ne sont pas isomorphes :

1. $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}[X], +)$;

2. $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}[i], +)$, où $\mathbb{Q}[i] := \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Exercice 690 Soit $K = \{e, a, b, c\}$ un groupe d'ordre 4 tel que $x^2 = e, \forall x$.

1. Ecrire la table de multiplication de K.
2. Montrer que K est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ et n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
3. Montrer que tout groupe d'ordre 4 est ou bien isomorphe à K ou bien à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 691 Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini d'ordre n. Trouver toutes les morphismes de groupe $\phi : (\mathbb{Q}, +) \to (G, \cdot)$.

Exercice 692 Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On appelle sous-groupe *caractéristique* de G un sous-groupe invariant par tout automorphisme de G. Montrer que tout sous-groupe caractéristique est distingué.

Exercice 693 1. Montrer que S_3 contient un sous-groupe H distingué d'ordre 3 et que G/H est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. Montrer que les seuls groupes d'ordre 6 sont, à isomorphisme près, le groupe cyclique et S_3.

Exercice 694 Combien d'automorphismes a un groupe cyclique d'ordre p, où p est un nombre premier ? Et un groupe cyclique d'ordre pq, où p et q sont des nombres premiers distincts ?

Exercice 695 Montrer que les seuls groupes distingués de S_5 sont $\{e\}$, S_5, A_5.

Exercice 696 Soit $(G, \cdot)$ un groupe. On appelle *commutateur* un élément de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$. On note $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$.

1. Montrer que l'ensemble $G' = [G, G]$ des produits de commutateurs est un sous-groupe distingué de G. Montrer que G/G' est un groupe abélien. En particulier cela implique que $G' = \{e\} \Leftrightarrow G$ abélien.
2. Soit $N \lhd G$ tel que G/N est abélien. Montrer que $G' \subset N$.
3. Trouver G' pour $G = S_3,\ A_5,\ S_5$.
4. Montrer que si $\phi : G \to A$ est un morphisme de G à un groupe abélien A, alors il existe un morphisme $\psi : G/G' \to A$ tel que $\phi = \psi \circ \pi$, où $\pi : G \to G/G'$ est la projection canonique.

Exercice 697 Soit $V_4 := \{e,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (23)(14)\} \subset S_4$.

1. Montrer que c'est un sous-groupe distingué de S_4.
2. Montrer que $V_4 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. Soit $H = \{e,\ (12)(34)\}$. Montrer que $H \lhd V_4$ mais que H n'est pas un sous-groupe distingué de S_4.
4. Montrer que S_4/V_4 est isomorphe à S_3.

Exercice 698 1. Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

2. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ un diviseur de $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe d'ordre d dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 699 1. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe d'indice p, où p est le plus petit facteur premier de $|G|$. Montrer que $H \lhd G$.

2. Soit $H < S_4$, H de cardinal 12. Montrer que $H = A_4$.
3. Montrer que A_4 n'est pas simple.
4. Montrer que A_4 n'a pas de sous-groupe d'ordre 6.

Exercice 700 Démontrer les propriétés suivantes

1. $(\mathbb{C}/\mathbb{R}, +) \simeq (\mathbb{R}, +)$;
2. $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^* \simeq \mathbb{S}^1$;
3. $\mathbb{C}^*/\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}_+^* \simeq \mathbb{R}^*/\{\pm 1\}$;
4. $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+^* \simeq \{\pm 1\}$;
5. $(\mathbb{C}/\mathbb{Z}, +) \simeq \mathbb{C}^*$;
6. $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* \simeq \mathbb{S}^1/\{\pm 1\}$.

Exercice 701 Prouver que les permutations

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

sont conjuguées dans S_6.

Exercice 702 Soit G un sous-groupe du groupe symétrique $S_n,\ n \geqslant 2$, contenant une permutation impaire. Montrer que $GA_n = S_n$ et en déduire que G contient au moins un sous-groupe distingué d'indice 2.

Exercice 703 Soit $SL(n,\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid det\, M = \pm 1\}$ et soit l'action du groupe $SL(n,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ donnée par

$$SL(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,,$$
$$(M,\, X) \to MX\,.$$

1. Trouver les orbites de cette action. Montrer que le centre de $SL(n,\mathbb{R})$ est $\{\pm I\}$.
2. Montrer que, pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$, son stabilisateur est conjugué au sous-groupe
$$P = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & SL(n-1,\mathbb{R}) \end{pmatrix}\,.$$
3. Soit $SL(2,\mathbb{Z})$ muni de son action sur $\mathbb{Z}^2$ définie par
$$SL(2,\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2\,,$$
$$(M,\, X) \to MX\,.$$
Trouver ses orbites. Montrer que l'ensemble $\Gamma(2)$ des matrices M tels que $M = I \pmod 2$ est un sous-groupe de $SL(2,\mathbb{Z})$. Trouver ses orbites dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 704 Soit D_∞ le groupe des isométries de la droite affine $\mathbb{R}$ formé par l'ensemble des éléments de la forme τ_1^n et $\tau_1^n \circ \sigma$, où $n \in \mathbb{Z}$, $\tau_1(x) = x+1$ et $\sigma(x) = -x$. On appelle D_∞ *le groupe diédral infini.*

1. Montrer que $H =< \tau_1 >$ est le seul sous-groupe cyclique infini d'indice 2 de D_∞. Montrer que H est un sous-groupe distingué de D_∞.
2. Montrer que, pour tout sous-groupe S d'ordre 2 de D_∞, on a $D_\infty = SH$.
3. Soit $K < D_\infty$ tel que $K \not\subset H$. Montrer que $D_\infty = HK$. En déduire que $K \cap H$ est d'indice 2 dans K. Montrer que $K \cap H \neq (e)$ implique $K \simeq D_\infty$.
4. Montrer que tout sous-groupe propre de D_∞ est isomorphe soit à $\mathbb{Z}$, soit à (± 1), soit à D_∞.
5. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des sous-groupes $K < D_\infty$ tels que $K \not\subset H$ et $K \cap H = H_n$, où $H_n :=< \tau_1^n >$. Prouver que $\mathcal{S}_n$ contient n éléments.

34 Groupes finis

Exercice 705 1. Soit les applications $T : \mathbb{R}\cup\{\infty\} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\},\ T(x) = x+4,\ T(\infty) = \infty$, et $g : \mathbb{R}\cup\{\infty\} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$,

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-2x} & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}\,; \\ \infty & \text{si} \quad x = \frac{1}{2}\,; \\ -\frac{1}{2} & \text{si} \quad x = \infty \end{cases}$$

Montrer que $T^k([-2,2]) \subset]-\infty,\, -2] \cup [2,\, \infty[,\ \forall k \in \mathbb{Z}^*$ et que $g^m(]-\infty,\, -1] \cup [1,\, \infty[) \subset [-1,\, 1],\ \forall m \in \mathbb{Z}^*$.

2. Soit G le groupe des applications bijectives $h : \mathbb{R}\cup\{\infty\} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, muni de l'opération de composition. Montrer que G a une action naturelle sur $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$.
3. Montrer que le sous-groupe Γ de G engendré par T et g est un groupe libre. *Indication* : Regarder les orbites des nombres dans l'intervalle $]1,2[$.

Exercice 706 1. Soit G le groupe engendré par deux éléments a, b, défini par les relations $a^m = b^2 = e,\ (ab)^2 = e$, où $m \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Montrer que $G \simeq D_m$, où D_m est le groupe diédral de degré m.

2. Montrer que pour tout groupe H engendré par deux éléments $\alpha,\ \beta$, qui vérifient les relations $\alpha^m = \beta^2 = e,\ (\alpha\beta)^2 = e$ il existe un epimorphisme de D_m dans H.

Exercice 707 Soit H_i et N_i deux paires de groupes et $\phi_i : H_i \to Aut\,(N_i)$ deux morphismes, $i = 1, 2$. Montrer que s'il existe deux isomorphismes $\alpha : H_1 \to H_2$ et $\beta : N_1 \to N_2$ tels que $\phi_2(\alpha(h_1)) = \beta \circ \phi_1(h_1) \circ \beta^{-1}$, $\forall h_1 \in H_1$, alors $N_1 \rtimes_{\phi_1} H_1 \simeq N_2 \rtimes_{\phi_2} H_2$.

Exercice 708 Soit H et N deux groupes et $\phi,\ \psi : H \to Aut\,(N)$ deux morphismes. Montrer que

1. s'il existe $\alpha \in Aut\,(H)$ tel que $\psi = \phi \circ \alpha$, alors $N \rtimes_\phi H \simeq N \rtimes_\psi H$.
2. s'il existe $u \in Aut\,(N)$ tel que $\psi(h) = u\phi(h)u^{-1}$, alors $N \rtimes_\phi H \simeq N \rtimes_\psi H$.

Exercice 709
1. (Théorème d'Euler) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}^*$ premier avec n. Démontrer que $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod n$, où ϕ est la fonction d'Euler.
2. (Théorème de Fermat) Soit p un nombre premier et $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a^p \equiv a (\mathrm{mod}\ p)$.

Exercice 710 Soit ϕ un automorphisme de S_n. Montrer que si ϕ transforme toute transposition en une transposition alors ϕ est un automorphisme intérieur. *Indication* : Utiliser le fait que S_n est engendré par $\{(12),\ (13), \ldots,\ (1n)\}$.

Exercice 711
1. Montrer que tout groupe d'ordre pq avec p, q premiers distincts, est un produit semi-direct de deux sous-groupes cycliques.
2. Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre pq.

Exercice 712 Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble fini E.

1. On suppose que l'action est telle que toute orbite de G contient au moins 2 points. Si $|G| = 15$ et card E=17, trouver le nombre d'orbites de G dans E et le cardinal de chacune.
2. Montrer que si $|G| = 33$ et card E=19, il existe au moins une orbite qui contient un unique point.

Exercice 713 Soit G un p-groupe opérant sur un ensemble fini X et soit $Fix(G) := \{x \in X \mid gx = x,\ \forall g \in G\}$. Montrer que card X = card $Fix(G) \pmod p$. En déduire que le centre d'un p-groupe est toujours non-trivial.

Exercice 714 Montrer qu'un groupe infini G qui a un sous-groupe propre d'indice fini H n'est pas simple. *Indication* : Etudier l'action de G sur G/H.

Exercice 715 Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $GL(V)$ le groupe des automorphismes linéaires. Pour $f \in GL(V)$ et $a \in V$ on considère l'application $A_{f,a} : V \to V,\ A_{f,a}(v) = f(v) + a$.

1. Montrer que $\mathcal{A} := \{A_{f,a} \mid f \in GL(V),\ a \in V\}$ muni de l'opération de composition est un groupe. Ce groupe s'appelle *le groupe des transformations affines*.
2. Trouver deux sous-groupes de $\mathcal{A}$ isomorphes à $(GL(V), \cdot)$ et à $(V, +)$, respectivement.
3. Montrer que $\mathcal{A}$ est produit semi-direct des deux sous-groupes obtenus dans 2.

Exercice 716 Prouver que tout sous-groupe d'ordre 35 est cyclique.

Exercice 717 Soit G un groupe fini avec $|G| = p^2q$, où p, q sont deux nombres premiers distincts tels que $p^2 \not\equiv 1 \pmod q$ et $q \not\equiv 1 \pmod p$. Montrer que G est abélien.

Exercice 718
1. Prouver qu'un groupe d'ordre p^2q ne peut pas être simple.
2. Montrer qu'un groupe d'ordre 63 n'est pas simple.

Exercice 719 Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre 12. Reconnaître parmi eux D_6 et A_4. Même question pour les groupes d'ordre 18.

Exercice 720 Soit G un groupe d'ordre 399. Vérifier que G a un sous-groupe distingué d'ordre 19 et un sous-groupe distingué d'ordre 133. En déduire que G est un produit semi-direct de deux groupes cycliques.

Exercice 721 Soit G un groupe de cardinal 24. Montrer que, si aucun de ses sous-groupes de Sylow n'est distingué, $G \simeq S_4$. *Indication* : Faire opérer G sur ses 3-sous-groupes de Sylow.

Exercice 722 Soit G un groupe et K un sous-groupe fini distingué. Montrer que tout p-sous-groupe de Sylow distingué de K est distingué dans G.

Exercice 723 Soit G un groupe fini, H un sous-groupe distingué et p un nombre premier divisant $[G : H]$. Montrer que Σ est un p-sous-groupe de Sylow de G/H si et seulement si il existe un p-sous-groupe de Sylow S de G tel que $\Sigma = SH/H$.

Exercice 724 Soit G un groupe abélien de type fini. Montrer que si tout élément de G est d'ordre fini, alors G est fini.

Exercice 725 Montrer que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un groupe abélien infini dont tout élément est d'ordre fini. En déduire qu'il ne peut pas avoir une famille finie de générateurs.

Exercice 726 Soit G un groupe fini abélien. Montrer que pour tout diviseur d de $|G|$ il existe un sous-groupe de G d'ordre d.

Exercice 727
1. Trouver les invariants et la décomposition canonique du groupe abélien fini dont les diviseurs élémentaires (appellées aussi *invariants primaires*) sont $2^3,\ 2,\ 3^2,\ 3,\ 3$.
2. Trouver les diviseurs élémentaires/invariants primaires, les invariants et la décomposition canonique de $G = \mathcal{C}_{30} \times \mathcal{C}_{18}$.
3. Trouver les diviseurs élémentaires/invariants primaires, les invariants et la décomposition canonique des groupes abéliens suivants :
   (a) G_1 engendré par a et b tels que $10a = 9b = 0$;
   (b) G_2 engendré par $a,\ b$ et c tels que $15a = 6b = 4c = 0$.

Exercice 728 Soit $\mathbb{C}$ muni des opérations binaires

$$z_1 * z_2 = z_1 + z_2,\ z_1 \perp z_2 = z_1 z_2 + Im\ z_1 Im\ z_2\ .$$

1. Montrer que $(\mathbb{C}, *, \perp)$ est un anneau. Trouver ses éléments inversibles.
2. Montrer que l'ensemble de matrices
$$D := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\ ;\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \right\}.$$
muni de l'addition et la multiplication des matrices est un anneau.
3. Montrer que la fonction $f : \mathbb{C} \to D$,
$$f(x + iy) := \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$
est un isomorphisme d'anneaux.

Exercice 729 Soit A un anneau non nécessairement commutatif. Soit $a, b \in A$ tels que $a,\ b,\ ab - 1$ sont inversibles. Montrer que $a - b^{-1}$ et $(a - b^{-1})^{-1} - a^{-1}$ sont inversibles. Montrer qu'on a l'égalité
$$[(a - b^{-1})^{-1} - a^{-1}]^{-1} = aba - a.$$

Exercice 730 Montrer que les anneaux de polynômes $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 731 Soit A un anneau non nécessairement commutatif, A^* le groupe des éléments inversibles et I un idéal bilatère de A. Soit $U = \{a \in A^* \mid a \equiv 1\ mod\ I\}$. Montrer que I est un sous-groupe distingué de A^*.

35 Anneaux, corps

Exercice 732 Les ensembles suivants sont-ils des anneaux vis-à-vis des opérations usuelles d'addition et de multiplication ? Sont-ils des corps ?

$$(a)\ \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid q \in \{1,\ 2,\ 4\}\right\}\ ;\qquad (b)\ \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid q \in \{2^n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}\right\}\ ;\qquad (c)\ \mathbb{Z} + \sqrt{5}\mathbb{Z}\ ;$$

$$(d)\ \mathbb{Z} + \sqrt[3]{5}\mathbb{Z}\ ;\qquad (e)\ \mathbb{Z} + \sqrt[3]{2}\mathbb{Z} + \sqrt[3]{4}\mathbb{Z};$$

Exercice 733
1. Montrer qu'il existe un morphisme d'anneaux et un seul de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
3. m et n étant des entiers positifs, trouver des conditions pour qu'il existe un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 734 Montrer que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ a exactement trois sous-anneaux.

Exercice 735 Dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ montrer que les multiples de 5 forment un anneau isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui n'est pas un sous-anneau de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Exercice 736 Soit $M_n(F)$ l'anneau des matrices sur un corps F.

1. Montrer que si X est une matrice non-dégénérée, alors $XY \neq 0$ et $YX \neq 0$, $\forall Y \neq 0$.
2. Soit $X \in M_n(F)$ et soit l'application linéaire $f_X : F^n \to F^n$, $f_X(v) := Xv$. Trouver une écriture de la relation $XY = 0$, X, $Y \in M_n(F)$ en termes de noyaux et images des applications f_X, f_Y. Même question pour la relation $YX = 0$. En déduire que toute matrice dégénérée non-nulle est un diviseur de 0.
3. Montrer que tout idéal bilatère de $M_n(F)$ contient, avec une matrice de rang r, toutes les matrices diagonales de rang r.
4. Montrer qu'un idéal qui contient une matrice non-dégénérée coïncide avec $M_n(F)$.
5. Montrer que les seuls idéaux de $M_n(F)$ sont 0 et $M_n(F)$.

Exercice 737

1. Montrer que l'image réciproque d'un idéal par un morphisme d'anneaux est un idéal.
2. Montrer par un contre-exemple que l'image d'un idéal par un morphisme d'anneaux n'est pas toujours un idéal. Montrer que l'affirmation précédente est toutefois vraie si le morphisme est surjectif.
3. Qu'est-ce qu'on peut dire sur l'image réciproque et l'image d'un idéal premier/maximal par un morphisme d'anneaux eventuellement surjectif ?

Exercice 738 Trouver les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 739 Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Exercice 740 Soit A un anneau principal. Montrer que $(a_1, \dots, a_n) = (d)$ si et seulement si $d \sim \mathrm{pgcd}(a_1, \dots, a_n)$.

Exercice 741 Montrer que tout morphisme de corps est injectif.

Exercice 742 Soit p un nombre premier et A un anneau intègre de caractéristique p.

1. Montrer que $p \cdot a = 0$ pour tout $a \in A$.
2. Montrer que $p|C_p^k$, $\forall k = 1, \dots p-1$, et en déduire que l'application $F_p : A \to A$, $F_p(a) = a^p$, est un endomorphisme d'anneaux. On appelle F_p *l'endomorphisme de Frobenius.*
3. Montrer que $F_p(a) = a$ pour tout a dans le plus petit sous-anneau A_0 de A contenant 1.
4. Montrer que F_p est un automorphisme si A est fini.
5. Montrer que $(\Sigma a_i b_i)^{p^k} = \Sigma a_i^{p^k} b_i^{p^k}$, $\forall a_i,\ b_i \in A,\ k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 743 Soit A un anneau intègre et $a, b, c \in A \setminus \{0\}$. Montrer que, chaque fois que les pgcdsuivants existent, on a les égalités :

1. $\mathrm{pgcd}(ca, cb) \sim c\mathrm{pgcd}(a, b)$
2. $\mathrm{pgcd}(\mathrm{pgcd}(a, b), c) \sim \mathrm{pgcd}(a, \mathrm{pgcd}(b, c))$.

   Si A est en plus factoriel, montrer que
3. $\mathrm{pgcd}(a, b) \sim 1$ et $\mathrm{pgcd}(a, c) \sim 1$ implique $\mathrm{pgcd}(a, bc) \sim 1$.
4. Si $a|bc$ et $\mathrm{pgcd}(a, b) \sim 1$ alors $a|c$.
5. Si $b|a$ et $c|a$ et $\mathrm{pgcd}(b, c) \sim 1$ alors $(bc)|a$.

Exercice 744 Montrer que dans $\mathbb{Z}[i]$ 3 est premier et 2 ne l'est pas.

Exercice 745 Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ et $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ ne sont pas des anneaux factoriels.

Exercice 746

1. Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ est un anneau factoriel.
2. Dans $\mathbb{Z}[X]$ montrer que l'ensemble des polynômes de terme constant un nombre pair est un idéal mais non-principal. En déduire que $\mathbb{Z}[X]$ est un anneau non-principal.
3. Montrer que l'idéal (X) est premier mais non maximal dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 747 Montrer que l'anneau des entiers $\mathfrak{o}_{19}$ du corps quadratique $\mathbb{Q}[i\sqrt{19}]$ est principal mais non-euclidien.

Exercice 748 Soit A un anneau commutatif et soit

$$Nil\ (A) := \{a \in A \mid \exists n \in N,\ a^n = 0\}\ .$$

1. Montrer que $Nil\ (A)$ est un idéal de A.
2. Montrer que si P est un idéal premier de A, alors $Nil\ (A) \subset P$.
3. Montrer que pour tout $x \notin Nil\ (A)$ il existe un idéal premier P tel que $x \notin P$ (*Indication* : Utiliser le théorème de Zorn).
4. En déduire que
$$Nil\ (A) = \bigcap_{P \text{ premier}} P\ .$$

Exercice 749 1. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{d}),\ d = 7,\ 11$, est un corps.
2. Montrer que $a + b\sqrt{7} \to a + b\sqrt{11}$ n'est pas un isomorphisme de corps entre $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{11})$.
3. Montrer que les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{11})$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 750 F et F' étant deux corps, montrer que $F \times F'$ a seulement deux idéaux non-triviaux, et que c'est un anneau principal.

Exercice 751 Montrer que $\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid q$ impair $\}$ est un anneau principal.

Exercice 752 Résoudre les congruences simultanées suivantes :
1. $x \equiv 2 \pmod 7$, $x \equiv 3 \pmod 6$;
2. $3x \equiv 2 \pmod 5$, $x \equiv 6 \pmod 7$, $x \equiv 1 \pmod 6$.

Exercice 753 Montrer que deux congruences dans $\mathbb{Z}$ de la forme

$$mx \equiv c \pmod a,\ nx \equiv d \pmod b$$

ont une solution commune $x \in \mathbb{Z}$ quand les coefficients vérifient les conditions $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$, $\mathrm{pgcd}(a, m) = 1$, $\mathrm{pgcd}(n, b) = 1$.

Exercice 754 1. Pour les anneaux de polynômes sur un corps F montrer que $F[x]/(x^2 - 1) \simeq F[x]/(x^2 - 4)$, $F[x]/(x^2 + 1) \simeq F[x]/(x^2 + 2x + 2)$, $F[x, y]/(x + y) \simeq F[x]$, $F[x]/(x + 1) \simeq F$.
2. Montrer que $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2) \simeq \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{Z}[i]$. Déduire du dernier isomorphisme que $(x^2 + 1)$ est un idéal premier non-maximal.

Exercice 755 Si M est un idéal maximal d'un anneau intègre A montrer que l'anneau local A_M a exactement un idéal maximal.

36 Polynômes

Exercice 756 Soit $\mathbb{F}$ un corps et $P,\ Q \in \mathbb{F}[X]$ tels que $\mathrm{pgcd}(P,\ Q) = 1$. Montrer qu'il existe $U,\ V \in \mathbb{F}[X]$ tels que $UP + VQ = 1,\ d^0\ U < d^0\ Q,\ d^0\ V < d^0\ P$.

Exercice 757 Trouver tous les automorphismes de l'anneau $\mathbb{F}[X]$, où $\mathbb{F}$ est un corps.

Exercice 758 Utiliser l'algorithme d'Euclide dans $\mathbb{Q}[X]$ pour exprimer le pgcd demandé sous forme de combinaison linéaire des deux polynômes donnés :
1. $(X^4 + 2X^3 - X^2 - 4X - 2, X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2)$,
2. $(X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1, X^4 + 2X^3 + X + 2)$,
3. $(3X^3 - 2X^2 + X + 2, X^2 - X + 1)$.

Exercice 759 Montrer que tout monomorphisme $A \to A'$ d'anneaux intègres engendre un monomorphisme des corps des fractions.

Exercice 760 Si Q est le corps des fractions de l'anneaux intègre A, démontrer que le corps des fractions $Q(X)$ est isomorphe au corps des fractions de $A[X]$.

Exercice 761 Soit $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ et soit $c \in \mathbb{Q}$ une racine de P. Montrer que $c = \frac{p}{q}$, où $p|a_0$ et $q|a_n$.

Exercice 762
1. Soit $a \in \mathbb{Z}$ un nombre sans facteurs carrés, $a \notin \{-1,\ 0,\ 1\}$. Montrer que $X^n - a$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $2X^{10} - 21$, $3X^5 - 35$, $X^5 + 1000X^2 + 6$ sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$.
3. Démontrer l'irréducibilité dans $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes $X^4 - 8X^3 + 12X^2 - 6X + 2$ et $X^5 - 12X^3 + 36X - 12$.

Exercice 763 Montrer que le polynôme $X^2 - 1$ a quatre zéros dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. Est-ce que ceci contredit un théorème du cours ?

Exercice 764 Montrer que $X^2 + 1$ est irréductible en tant qu'élément de $\mathbb{Q}[X]$ mais réductible en tant qu'élément de $\mathbb{F}_5[X]$.

Exercice 765
1. Si $\mathbb{F}$ est un corps, montrer qu'un polynôme P de degré 2 ou 3 dans $\mathbb{F}[X]$ est irréductible si et seulement si il n'a pas de zéro dans $\mathbb{F}$.
2. Décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles dans $\mathbb{F}_3[X]$.

$$X^2 + X + 1, \qquad X^3 + X + 2, \qquad X^4 + X^3 + X + 1\ .$$

Exercice 766 Lesquels parmi les polynômes suivants sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$?

$$X^3 + 4X^2 - 5X + 7\ ; \quad X^3 - 6X^2 - 4X - 13\ ; \quad X^3 + 4X^2 - 4X + 25\ ;$$
$$X^3 - X^2 - X - 1\ ; \quad X^4 + 7X^2 + 4X + 1\ ; \quad X^6 + X^3 + 1\ ; \quad X^6 + X^2 + 1\ .$$

Exercice 767
1. Soit A un anneau commutatif et $I \subset A$ un idéal. Montrer que $I[X]$ est un idéal de $A[X]$. Montrer que $A[X]/I[X] \simeq A/I[X]$. Montrer que si I est premier, $I[X]$ est premier.
2. Soit p un nombre premier. Montrer que $\mathbb{Z}[X]/(p) \simeq \mathbb{F}_p[X]$.
3. Montrer que les idéaux premiers non-nuls de $\mathbb{Z}[X]$ sont :
   (a) (p), où $p \in \mathbb{N}$ est un nombre premier ;
   (b) $(R(X))$, où $R \in \mathbb{Z}[X]$ est un polynôme irréductible ;
   (c) $(p, R(X))$, où $p \in \mathbb{N}$ est un nombre premier et $R \in \mathbb{Z}[X]$ est un polynôme irréductible dont la réduction modulo p, $\overline{R}(X) \in \mathbb{F}_p[X]$, est un polynôme irréductible.

Exercice 768 Soient $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ et K son corps de fractions. Montrer que $X^2 - X + 1$ est primitif et irréductible dans $A[X]$ sans pour autant être irréductible dans $K[X]$. Est-ce que ceci contredit un théorème du cours ?

Exercice 769 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ un nombre premier. Montrer que les polynômes $P = \Sigma_{i=1}^{p} C_p^i X^{i-1}$ et $Q = 1 + \Sigma_{i=1}^{p-1} X^i$ sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 770 Soit $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique $p > 0$.
1. Montrer que
   (a) $X^n - a^n$, $a \in \mathbb{F}^*$, n'a pas de racines multiples ssi $p|n$;
   (b) a est l'unique racine de $X^p - a^p$ et sa multiplicité est p.
2. Soit $a \in \mathbb{F}_p$. Ecrire la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme $X^p + a \in \mathbb{F}_p[X]$.

Exercice 771 Soit D un anneau intègre fini contenant n éléments distincts $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Soit le polynôme $P_0 := \Pi_{i=1}^n (X - c_i)$.
1. Démontrer que deux polynômes Q, R dans $D[X]$ ont la même fonction polynomiale associée si et seulement si $P_0 | Q - R$.
2. Calculer le polynôme P_0 pour $D = \mathbb{F}_3,\ \mathbb{F}_5$.

Exercice 772 Soit A un anneau commutatif. Montrer l'équivalence des deux affirmations suivantes :
(i) A est un corps fini ;
(ii) tout polynôme $P \in A[X]$ de degré $n \geqslant 1$ a au plus n racines dans A et toute fonction $f : A \to A$ est polynomiale.

Exercice 773 Calculer la dérivée du polynôme $(3X^2 + 2X - 4)(4X^3 - 2X + 3) \in \mathbb{F}_5[X]$.

Exercice 774
1. Montrer que si $A[X]$ est principal, alors A est principal.
2. Montrer que si $A[X]$ est principal est si A n'est pas un corps, alors il existe un corps K tel que $K[X]$ soit un corps.
3. En déduire que $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps. *Remarque* : Ceci implique que si $A[X]$ est principal alors $A[X]$ est euclidien.

Exercice 775 Soit K un corps et soit $K(X)$ le corps des fractions de l'anneau $K[X]$. Montrer que si P est un élément de $K[X]$ qui admet au moins une racine simple alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y^n - P$ est un élément irréductible de $K[X, Y]$ et de $K(X)[Y]$.

Exercice 776 Montrer que si K est un corps de caractéristique différente de 2 alors X^2+Y^2-1 est irréductible dans $K[X, Y]$.

Exercice 777
1. Calculer la somme des carrés des racines de l'équation $x^3 + 2x - 3 = 0$.
2. Calculer $x_1^3x_2+x_1x_2^3+x_2^3x_3+x_2x_3^3+x_3^3x_1+x_3x_1^3$, où $x_1,\ x_2,\ x_3$ sont les racines de l'équation $x^3-x^2-4x+1 = 0$.

Exercice 778 Exprimer à l'aide des polynômes symétriques fondamentaux :
1. $(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2)$;
2. $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)(x_3 + x_4)$;
3. $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$.

Exercice 779 Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les zéros du polynôme $X^n+a_1x_{n-1}+\cdots+a_n$. Démontrer que tout polynôme symétrique en $x_2, x_3, \ldots, x_n$ peut être représenté sous forme de polynôme en x_1.

Exercice 780 Calculer le résultant des polynômes :
1. $2X^3 - 3X^2 - X + 2$ et $X^4 - 2X^2 - 3X + 4$;
2. $3X^3 + 2X^2 + X + 1$ et $2X^3 + X^2 - X - 1$;
3. $a_0X^2 + a_1X + a_2$ et $b_0X^2 + b_1X + b_2$.

Exercice 781 Pour quelle valeur de λ les polynômes suivants ont-ils un zéro en commun ?
1. $X^3 - \lambda X + 2$ et $X^2 + \lambda X + 2$;
2. $X^3 + \lambda X^2 - 9$ et $X^3 + \lambda X - 3$.

37 Extension de corps

Exercice 782 Soit K un corps et $k,\ A,\ B$ des sous-corps tels que $k \subset A$ et $k \subset B$, $[A : k] = m,\ [B : k] = n$. Soit L le plus petit sous-corps de K qui contient $A \cup B$.
1. Montrer que $[L : A] \leqslant n,\ [L : B] \leqslant m,\ [L : k] \leqslant mn$. Caractériser le cas $[L : k] = mn$ à l'aide d'une propriété de A par rapport à B.
2. Si $[K : k] = 4$, $m = n = 2$ montrer l'équivalence des propriétés suivantes
   (b$_1$) $A \neq B$;
   (b$_2$) $L = K$;
   (b$_3$) il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $\{1,\ a,\ b,\ ab\}$ soit une base de L sur k.

Exercice 783 Est-ce qu'un extension algébrique est toujours finie ?

Exercice 784 Comparer les corps de décomposition des polynômes $X^2 + X + 1,\ X^2 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$.

Exercice 785 Soit E une extension du corps k. On dit que E est une *extension quadratique* de k si $[E : k] = 2$.
1. On suppose k de caractéristique $\neq 2$. Montrer que les extensions quadratiques de k (s'il en existe) sont des corps de rupture des polynômes irréductibles de la forme $X^2 - a,\ a \in k$. En déduire toutes les extensions quadratiques de $\mathbb{Q}$ à isomorphisme près.

2. On suppose k de caractéristique 2. Montrer que les extensions quadratiques de k (s'il en existe) sont des corps de rupture des polynômes irréductibles de l'une des deux formes : $X^2 - a$ ou $X^2 - X - a$, $a \in k$. Une extension quadratique du premier type et une extension quadratique du deuxième type peuvent-elles être isomorphes au dessus de k ?

Exercice 786 1. Montrer qu'un corps fini n'est jamais algébriquement clos.

2. Quelle est la clôture algébrique du corps fini $\mathbb{F}_{p^n}$?

Exercice 787 Soit K un corps et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Soient $a, b \in \overline{K} \setminus K$. Etablir l'équivalence des conditions :

1. il existe un automorphisme ϕ de $\overline{K}$ au dessus de K tel que $\phi(a) = b$;
2. a et b ont le même polynôme minimal $f(X) \in K[X]$.

Exercice 788 Pour quels nombres premiers p, q a-t-on $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{q})$?

Exercice 789 Soient $K \subset L \subset M$ des extensions. On suppose $K \subset L$ et $L \subset M$ algébriques. Montrer que $K \subset M$ est algébrique.

Exercice 790 Donner les polynômes minimaux sur $\mathbb{Q}$ des éléments suivants de $\mathbb{C}$: $j\sqrt{2}$, $\sqrt{2} + \sqrt[3]{7}$, $i + j$, $i + \sqrt{2}$, $j + \sqrt{3}$.

Exercice 791 Soit $P \in K[X]$ un polynôme de degré n et $E \supset K$ son corps de décomposition. Montrer que $[E : K]$ divise $n!$.

Exercice 792 1. Soit $P \in K[X]$ un polynôme irréductible de degré n et $E \supset K$ une extension de degré m. Montrer que si $(m, n) = 1$ alors P est irréductible dans $E[X]$.

2. Montrer que $X^3 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[i]$.

Exercice 793 Soit p, $q \in \mathbb{N}^*$ deux nombres premiers distincts. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{p} + \sqrt{q}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$. Trouver le polynôme minimal de $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ sur $\mathbb{Q}$. Déterminer tous les plongements de $\mathbb{Q}(\sqrt{p} + \sqrt{q})$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 794 Soit $p \neq 2$ un nombre premier. Montrer que -1 est un carré modulo p ssi p est de la forme $4k + 1$.

Exercice 795 1. Est-ce que 2 et 3 sont des carrés modulo 7 ?

2. Est-ce que 23 est un carré modulo 59 ?

Exercice 796 Soient k, K deux corps finis, $k \subset K$, $[K : k] = m$. Montrer que pour tout d diviseur de m il existe un unique corps intermédiaire $k \subset L \subset K$ tel que $[K : L] = d$.

38 Extension d'anneau

Exercice 797 Donner un exemple d'extension infinie et d'extension finie de $\mathbb{C}$.

Exercice 798 Soit $p > 2$ un nombre premier et soit $\left(\frac{x}{p}\right)$ le symbole de Legendre pour $x \in \mathbb{F}_p^*$. Montrer qu'on a $\sum_{x \in \mathbb{F}_p^*} \left(\frac{x}{p}\right) = 0$.

Exercice 799 Soit p un nombre premier.

1. Soit a une racine de $X^p - X - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$, $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$. Montrer que $a + k$ est aussi une racine de $X^p - X - 1$, pour tout $k \in \mathbb{F}_p$.
2. Montrer que $X^p - X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_p$ et sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 800 1. Soit K un corps et $P \in K[X]$ un polynôme de degré n. Montrer que P est irréductible sur K ssi P n'a pas de racines dans les extensions E de K de degré au plus $\frac{n}{2}$.

2. Montrer que $X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ est irréductible sur $\mathbb{F}_2$.
3. Montrer que $X^4 - 4X^3 + 2X^2 - 13X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$.
4. Montrer que $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Q}$ et est réductible sur $\mathbb{F}_p$ pour tout nombre premier p.

Exercice 801 Soit $K \subset E$ une extension finie.

1. Montrer que la trace Tr_K^E est une forme linéaire sur E en tant que K-espace vectoriel.
2. Calculer la norme $N_K^E(\alpha\beta)$ en fonction de $N_K^E(\alpha)$ et de $N_K^E(\beta)$. Calculer $N_K^E(a)$, où $a \in K$.

Exercice 802 1. Écrire une base de $\mathbb{Q}[i, \sqrt{2}]$ sur $\mathbb{Q}$.

2. Dans cette base, écrire la matrice de l'application m_α^E, où $\alpha = i + \sqrt{2}$. Déduire le polynôme minimal de α dans $\mathbb{Q}[X]$ à partir de cette matrice.
3. Retrouver le polynôme minimal de α dans $\mathbb{Q}[X]$ par calcul direct.

Exercice 803 Soient A un anneau intégralement clos, K son corps de fractions et $P \in A[X]$ un polynôme unitaire. Si P est réductible dans $K[X]$, montrer qu'il est réductible dans $A[X]$. *Indication* : Considérer les racines de P dans une extension de K.

Exercice 804 Donner un exemple d'anneau intègre qui n'est pas intégralement clos.

Exercice 805 Pour tout $n \geqslant 1$, on désigne par $f(n)$ le nombre de polynômes unitaires irréductibles de degré n sur $\mathbb{F}_q$. Montrer qu'on a

$$\sum_{d|n} df(d) = q^n \ .$$

En déduire les valeurs de $f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4)$ et $f(p)$ pour p premier.

Exercice 806 Soient R un anneau, A un sous-anneau de R et x un élément inversible de R. Montrer que tout $y \in A[x] \cap A[x^{-1}]$ est entier sur A. *Indication* : On montrera qu'il existe un entier n tel que le A-module $M = A + Ax + \cdots + Ax^n$ vérifie $yM \subset M$.

Exercice 807 Combien de solutions rationnelles ont les équations suivantes ?

$$a)\ x^2 + 2y^2 = 5\ ; \qquad b)\ 19x^2 - 12xy + 2y^2 = 4\ ; \qquad c)\ x^2 + y^2 = 3.$$

Exercice 808 Éliminer x du système d'équations

$$\begin{cases} x^3 - xy - y^3 + y = 0 \\ x^2 + x - y^2 = 1 \end{cases}$$

Exercice 809 Démontrer les formules

$$R(fg, h) = R(f, h)R(g, h), \quad D(fg) = D(f)D(g)(R(f, g))^2 \ .$$

Sixième partie

Sujets d'examens

Partiels, examens et sessions de rattrapage donnés en analyse réelle (AR) à Lens et en analyse réelle et complexe (ARC) à Lille par Gijs Tuynman et en variable complexe (VC) à Lille par Anne-Marie Chollet.

39 Examen AR janvier 1994

Exercice 810 (Questions de cours) 1. Donner les définitions d'une topologie, d'un espace topologique Hausdorff, d'un espace topologique quasi compact, d'un espace topologique compact, d'un espace topologique connexe, et d'un espace topologique connexe par arcs.

2. Donner un exemple d'un espace topologique connexe mais pas connexe par arcs (une démonstration n'est pas demandée !).
3. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que A est quasi compact si et seulement si A est fermé et borné (énoncer clairement les théorèmes utilisés !).
4. Soit X un espace topologique. Montrer que si X ne contient qu'un seul élément, alors X est compact.
5. Soit (X, d) un espace métrique. Donner la définition d'une suite de Cauchy dans X. Sous quelle condition dit-on qu'une suite x_n converge vers $a \in X$ (noté $x_n \to a$) ?

6. Soit (X,d) un espace métrique et x_n une suite dans X. Montrer que (1) si x_n est une suite de Cauchy, alors x_n est bornée, et (2) si $x_n \to a$, alors x_n est une suite de Cauchy.

Exercice 811 Soit A un ouvert connexe non-vide de $\mathbb{R}^n$ et $a \in A$. Soit G_a l'ensemble des points de A pouvant être reliés à a par un chemin contenu dans A.

1. Montrer que G_a et $A \setminus G_a$ sont ouverts.
2. En déduire que A est connexe par arcs.

Exercice 812 Soient X et Y des espaces topologiques, et soit $Y^X = \{ f : X \to Y \}$ l'espace de toutes les fonctions de X dans Y. Pour $A \subset X$ et $B \subset Y$ on définit $V(A,B) \subset Y^X$ par $V(A,B) = \{ f : X \to Y \mid f(A) \subset B \}$. La topologie compacte-ouverte sur Y^X a une sous-base constituée des ensembles $V(A,B)$ où $A \subset X$ est compact et $B \subset Y$ est ouvert.
Montrer que Y^X avec la topologie compacte-ouverte est Hausdorff si et seulement si Y est Hausdorff. (Indication : pour le "seulement si" penser à une fonction constante.)

Exercice 813 1. (D'abord un cas particulier) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les objets suivants : le demi-espace $D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < 1 \}$, le plan $P = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \}$, la sphère unité $S^2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \}$, et le pole nord $N = (0,0,1)$.

(a) On définit une application $p : D \to P$ par la procédure suivante : pour un point $A \in D$, la droite dans $\mathbb{R}^3$ qui passe par A et N coupe le plan P en $p(A)$. Trouver l'expression explicite de l'application p et en déduire qu'elle est continue.

(b) On définit une application $i : P \to S^2$ par la procédure suivante : pour $B \in P$, la droite dans $\mathbb{R}^3$ qui passe par B et N coupe la sphère unité S^2 en $i(B)$. Trouver l'expression explicite de l'application i et en déduire qu'elle est continue.

(c) En utilisant les applications p et i, montrer que P est homéomorphe à $S^2 \setminus \{N\}$.

(d) Montrer que S^2 est compacte.

2. (Le cas général) Soit X un espace topologique Hausdorff et ∞ un élément qui n'appartient pas à X. On définit $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ et on dit qu'un sous-ensemble $U \subset \widehat{X}$ est ouvert si et seulement si : ou bien $\infty \notin U$ et U ouvert dans X, ou bien $\infty \in U$ et $X \setminus U$ est quasi compact dans X.

(a) Montrer que si U est un ouvert de $\widehat{X}$ contenant ∞, alors $X \setminus U$ est fermé dans X.

(b) Montrer que les ouverts dans $\widehat{X}$ forment bien une topologie.

(c) Montrer que $\widehat{X}$ avec la topologie décrite ci-dessus est quasi compact.

(d) En considérant $X \subset \widehat{X}$, on donne X la topologie induite par $\widehat{X}$. Montrer que cette topologie coïncide avec la topologie de départ de X.

Barème indicatif : 5, 3, 5, 7.

40 Examen AR juin 1994

Exercice 814 (Questions de cours) 1. Donner les définitions de :

(a) une norme sur un espace vectoriel,

(b) un espace vectoriel normé complet,

(c) une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ de dimension k,

(d) un champ de vecteurs sur M,

(e) un champ de vecteurs complet sur M.

2. Enoncer le théorème des fonctions implicites.
3. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ compact, soit $\mathcal{C}^0(A) = \{ f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue } \}$, et $||f||_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)|$. Montrer que $(\mathcal{C}^0(A), || \, ||_\infty)$ est un espace de Banach.

Exercice 815 Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension k, et soit X un champ de vecteurs sur M. On définit $D = \{ m \in M \mid X(m) \neq 0 \}$ et $S = \overline{D} =$ fermeture D. On vous demande de démontrer l'énoncé : "si S est compact, alors X est complet". Les questions suivantes peuvent vous guider.

1. Pour $x \notin S$ trouver la courbe intégrale maximale $\gamma : J_x \to M$ passant par x.

2. Montrer que si $x \in S$, et si $\gamma : J \to M$ est une courbe intégrale passant par x, alors $\forall\ t \in J\ :\ \gamma(t) \in S$.
3. En utilisant la compacité de S, montrer que X est complet (sur M !).

Exercice 816 Soient $M \subset \mathbb{R}^n$ et $N \subset \mathbb{R}^p$ deux sous-variétés de dimension k et ℓ respectivement. Soit $F : M \to N$ une application différentiable et soit X un champ de vecteurs sur M. Trouver un contre exemple pour l'énoncé :

$$F(m) = F(\widehat{m}) \Longrightarrow TF(m)(X(m)) = TF(\widehat{m})(X(\widehat{m}))\ .$$

Rappel : $TF(m) \equiv F'(m)$ est la "dérivée" de F au point m.

Exercice 817 Soit $\phi_2 : \mathbb{R}^2 \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la carte de la sphère S^2 donnée par la projection stéréographique du pôle nord. En identifiant $\mathbb{R}^2$ avec le plan complex $\mathbb{C}$, on définit l'application $F : \mathbb{R}^4 \to S^2$ par :

$$F(x, y, z, t) = \phi_2(\frac{z + it}{x + iy})\ .$$

1. Calculer l'expression explicite de F et montrer que la restriction de F à la sphère $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ est une application $F : S^3 \to S^2$ qui est bien définie.
2. Sur $\mathbb{R}^4$ on définit le champ de vecteurs

$$X(x, y, z, t) = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial t} - t\frac{\partial}{\partial z}\ .$$

   Calculer le flot de X ; est ce que X est complet ?
3. En utilisant le résultat de 2., montrer que si $m \in S^3$, alors $X(m) \in T_m S^3$.
4. Pour tout $m \in S^3$ calculer $TF(m)(X(m)) \in T_{F(m)}S^2$.

Exercice 818 Soit $\alpha(x, y, z, t) = x\,dy - (1 + t^2)y\,dx - z^3\,dt$ une 1-forme sur $\mathbb{R}^4$, soit $D = \{\,(x, y, z, t) \in S^3 \mid t = 0, z \geqslant 0\,\}$, et soit $C = \partial D$ le bord de D.

1. Calculer la 2-forme $d\alpha$ sur $\mathbb{R}^4$.
2. Montrer que D est une demi-sphère de dimension 2 et que C est un cercle.
3. En utilisant des coordonnées sphériques, donner une carte $\phi_D : I_1 \times I_2 \to D \subset S^3 \subset \mathbb{R}^4$, et une carte $\phi_C : I_3 \to C \subset D \subset \mathbb{R}^4$, où les $I_j \subset \mathbb{R}$ sont des intervalles ouverts.
4. Calculer explicitement $\int_D d\alpha$ et $\int_{\partial D} \alpha$. Est ce que votre résultat confirme le théorème de Stokes ?

Barème indicatif : 5, 4, 3, 4, 4.

41 Examen AR septembre 1994

Exercice 819 (Questions de cours) 1. Donner les définitions de :
   (a) un espace topologique X,
   (b) un espace topologique Hausdorff (= T_2 = séparé),
   (c) un espace topologique normal (= T_4),
   (d) un espace topologique quasi compact,
   (e) un espace topologique connexe.
2. Donner les définitions de :
   (a) une norme sur un espace vectoriel,
   (b) un espace vectoriel normé complet,
   (c) une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ de dimension k,
   (d) un champ de vecteurs sur M,
   (e) un champ de vecteurs complet sur M.
3. Enoncer le théorème des fonctions implicites.

Exercice 820 Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ compact, soit $\mathcal{C}^0(A) = \{\, f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ continue } \}$, et $||f||_\infty = \sup_{x\in A} |f(x)|$. Montrer que $(\mathcal{C}^0(A), ||\ ||_\infty)$ est un espace de Banach.

Exercice 821 1. Donner la *définition* d'un intervalle dans $\mathbb{R}$ et montrer que si $A \subset \mathbb{R}$ est connexe, alors A est un intervalle.

2. En utilisant la notion de connexité, montrer qu'il n'existe pas un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Exercice 822 Soit X un espace topologique et $A \subset X$ un sous-ensemble de X.

1. Montere que si X est quasi compact et A est fermé dans X, alors A est quasi compact.
2. Montrer que si X est Hausdorff et A est quasi compact, alors A est fermé dans X.

Exercice 823 Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension k, et soit X un champ de vecteurs sur M. On définit $D = \{ m \in M \mid X(m) \neq 0 \}$ et $S = \overline{D} =$ fermeture D. On vous demande de démontrer l'énoncé : "si S est compact, alors X est complet". Les questions suivantes peuvent vous guider.

1. Pour $x \notin S$ trouver la courbe intégrale maximale $\gamma : J_x \to M$ passant par x.
2. Montrer que si $x \in S$, et si $\gamma : J \to M$ est une courbe intégrale passant par x, alors $\forall\, t \in J \ : \ \gamma(t) \in S$.
3. En utilisant la compacité de S, montrer que X est complet (sur M !).

Nota Bene : S n'est pas un sous-variété d'un $\mathbb{R}^m$; montrer le résultat (du cours !) "si M est compact, alors X est complet" rapporte moins de points.

Exercice 824 Dans tout ce qui suit, on note (x, y) les coordonnées sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, $z = x + iy$, et on sépare systématiquement les parties réelle et imaginaire de tous les objets. Soit $z_o \in \mathbb{C}$, et soit C_r, $r \in \mathbb{R}^+$ la courbe donnée par l'équation $|z - z_o| = r$.

1. Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{z_o\} \to \mathbb{C}$ l'application $f(z) = (z - z_o)^n$. Calculer pour tout $n \in \mathbb{Z}$ l'intégrale $\int_{C_r} f(z)\, dz$ (indication : utiliser une variante des coordonnées polaires).

   Soit $g, h : \mathbb{C} \setminus \{z_o\} \to \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1 verifiant les équations :
   $$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} \qquad \& \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x} \ ,$$
   et soit $f : \mathbb{C} \setminus \{z_o\} \to \mathbb{C}$ l'application $f(x, y) = g(x, y) + ih(x, y)$.
2. Montrer que la 1-forme $\frac{f(z)}{z - z_o}\, dz$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{z_o\}$ est fermée (ne pas oublier de séparer la partie réelle et imaginaire). En déduire (Stokes !) que $\int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_o}\, dz$ est indépendant de $r \in \mathbb{R}^+$.
3. En faisant un développement limité de g et de h d'ordre 1 autour $z_o = (x_o, y_o)$, montrer que
   $$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_o}\, dz = 2\pi i \ f(z_o) \ .$$
   Indication : utiliser le résultat de 1. ; vous avez le droit d'être un petit peu vague en ce qui concerne les ε dans le développement limité.

Barème indicatif : 2, 3, 3, 3, 4, 5.

42 Examen AR janvier 1995

Exercice 825 1. Donner la définition d'un espace topologique T_1.

2. Montrer qu'un espace topologique X est T_1 si et seulement si : $\forall x \in X \ : \ \{x\}$ est fermé.
3. Soit X un espace topologique contenant un nombre fini de points. Montrer que si X est T_1, alors sa toplogie est la topologie discrète.
4. Soit X un espace topoogique T_1 ayant la propriété : $\forall x \in X, \forall A \subset X \ : \ A$ fermé et $x \notin A \implies \exists U, V$ ouverts $: x \in U,\ A \subset V,\ U \cap V = \emptyset$. Montrer que X est T_2.

Exercice 826 1. Donner la définition d'un espace topologique connexe.

2. Donner la définition d'un intervalle dans $\mathbb{R}$.
3. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que si A est connexe, alors A est un intervalle. Est-ce-que l'implication dans l'autre sens est vraie ? (sans justification)

Exercice 827 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé borné et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que $\mathrm{im}(f)$ est un intervalle fermé borné. Enoncer et démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 828 Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un fermé tel que $K \subset B(x_0, R)$ (où $B(x_0, R)$ est la boule ouverte de centre x_0 et rayon R). Montrer qu'il existe un $R' < R$ tel que $K \subset B(x_0, R')$. (indication : regarder $\sup d(x, x_0)$)

Exercice 829 1. Donner la définition d'une application Lipschitzienne.

2. Enoncer le théorème du point fixe.
3. Soit (X, d) un espace métrique compact, et soit $f : X \to X$ une application continue verifiant $\forall x \neq y \ : \ d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Montrer qu'il existe un point fixe unique pour f. (indication : regarder $\inf d(x, f(x))$)

Exercice 830 Soit (X, d) un espace métrique et soit $a : \mathbb{N} \to X$ une suite dans X.

1. Quand est-ce que a est une suite de Cauchy, une suite convergente ?
2. Donner les définitions d'un point d'accumulation de la suite a, et de "(X, d) est complet".
3. Enoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.
4. Montrer que si a est de Cauchy et si x est un point d'accumulation de a, alors a converge vers x.
5. Montrer que si X est compact, alors X est complet.

Exercice 831 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé borné et soit $f : I \to I$ une application dérivable verifiant $\forall x \in I \ : \ |f'(x)| < 1$. Pour un $x_0 \in I$ on définit la suite récurrente $a : \mathbb{N} \to I$ par $a_0 = x_0$, $a_{n+1} = f(a_n)$. On vous demande de montrer qu'il existe un unique $\ell \in I$, indépendant de x_0, tel que $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. Les questions suivantes peuvent vous guider dans la démonstration.

1. Montrer que f admet un point fixe unique ℓ. (voir 829)
2. Montrer que $d(a_n, \ell)$ converge.
3. Montrer que la suite a admet une sous-suite convergente b.
4. Notons $\lim_{k\to\infty} b_k = \beta$ et $\lim_{n\to\infty} d(a_n, \ell) = r$. Montrer : $d(\beta, \ell) = r = d(f(\beta), \ell)$.

Est-ce-que le résultat est vrai si I n'est pas fermé ? Justifier votre réponse.

Barème indicatif : 2, 2, 2, 2, 3, 3, 5.

43 Examen AR juin 1995

Exercice 832 1. Enoncer le théorème du point fixe.

Soit B et C deux sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$, et soit $E = \{ f : B \to C \mid f \text{ continue} \}$. On définit $d(f, g) = \sup_{x\in B} |f(x) - g(x)|$.

2. Montrer que $d : E \times E \to \mathbb{R}$ est une métrique sur E.
3. Montrer que (E, d) est un espace métrique complet.

Exercice 833 1. Donner la définition d'une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.

2. Enoncer le théorème des fonctions implicites.

   Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction de classe C^1 et soit $M = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \mathbf{0} \}$. Supposons en plus que f vérifie la condition : $\forall x \in M : \text{rang}(J(x)) = p$, où $J(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)^{i=1,\dots,p}_{j=1,\dots,n}$ est la matrice Jacobienne de f en x de taille $n \times p$.
3. Montrer, en utilisant le théorème des fonctions implicites, que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k = n - p$.

Exercice 834 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction dérivable et soit $M = f^{-1}(\mathbf{0})$. On suppose que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.

1. Donner la définition d'un vecteur tangent à M au point $x \in M$. Donner la définition d'un champ de vecteurs sur M.
2. Soit f une fonction sur M et α une 1-forme sur M. Donner la définition de df sans utiliser une carte de M. Donner la définition de $d\alpha$.
3. Soit X un vecteur tangent à M au point $x \in M$. Montrer que $\big(\ df|_x(X) \equiv\ \big)\ Xf = \mathbf{0}$. En déduire que $X \in \ker(J(x))$ (où $J(x)$ est défini comme dans l'exercice 833).

4. Soit X un vecteur tangent à $\mathbb{R}^n$ au point $x \in M$, et supposons que $Xf = \mathbf{0}$, et que $\text{rang}(J(x)) = p$. Montrer que $k = n - p$ et que X est un vecteur tangent à M.

Exercice 835 Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ défini par $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 + x_2^2 - 1, x_3^2 + x_4^2 - 1)$, soit $M = f^{-1}(0, 0)$, et soit X le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$X|_x = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha(x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_3}) \ ,$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. Montrer que pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv x \in M$ le vecteur $X|_x$ est tangent à M.
2. Exprimer les vecteurs tangents $X|_x$, $x \in M$ dans la carte
$$(\theta, \psi) \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\psi), \sin(\psi)) \ .$$
3. Calculer le flot ϕ_t du champ de vecteurs $X|_x$, $x \in M$ sur M (par exemple en utilisant la carte (θ, ψ)). Est ce que ce champ est complet ?
4. Déterminer les 6-uplets $(\alpha, t, x_1, x_2, x_3, x_4)$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in M$, tels que $\phi_t(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Exercice 836 Soit $M \subset \mathbb{R}^3$ le cylindre défini par l'équation $x^2 + y^2 = 1$, soit $V \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble défini par $V = \{ (x, y, z) \mid z \geqslant 0 \ \& \ (x/2)^2 + (2y)^2 + z^2 \leqslant 1 \}$, soit $K = M \cap V$, et soit ∂K le bord de K. Soit finalement α la 1-forme sur $\mathbb{R}^3$ définie par $\alpha = z^2 x \, dy - z^2 y \, dx + (xz - yz^3) \, dz$.

1. Calculer $d\alpha$.
2. Exprimer α et $d\alpha$ dans la carte $(\theta, z) \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$ de M.
3. Exprimer K et ∂K dans cette carte.
4. Calculer séparément $\int_K d\alpha$ et $\int_{\partial K} \alpha$ sans utiliser le théorème de Stokes. Est ce que votre résultat confirme ce théorème ?

Barème indicatif : 4, 4, 4, 4, 4.

44 Examen AR septembre 1995

Exercice 837 1. Enoncer le théorème des accroissements finis pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$.

2. Soit $B_\varepsilon(x_o)$ la boule de rayon ε dans $\mathbb{R}^n$, et soit $f : \overline{B_\varepsilon(x_o)} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer que f est Lipschitzienne et donner une expression de son rapport.

Exercice 838 Soit K un compact contenu dans U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit K_ε défini par $K_\varepsilon = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K) \leqslant \varepsilon \}$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble K_ε est compact.
2. Montrer qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que K_ε soit contenu dans U (indication : regarder la fonction $x \mapsto d(x, \mathbb{R}^n \setminus U)$ définie sur K).

Exercice 839 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue, posons $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x, y) \mid f(x, y) = 0 \}$ et $V = \{ g : M \to \mathbb{R} \mid g \text{ dérivable}, \forall x \in M \ : \ g'(x) = 0 \}$.

1. Montrer que M est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que V est un espace vectoriel.
2. Calculer la dimension de l'espace V dans les cas suivants :
   - $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$,
   - $f(x, y) = \sin(x)$,
   - $f(x, y) = y^2 - x(x - 1)(x - t)$.

   Dans le dernier cas on vous demande de calculer la dimension de V en fonction de $t \in [0, 1]$ (indication : esquisser l'ensemble $f(x, y) = 0$ et distinguer les cas $t = 0$, $t = 1$, $0 < t < 1$).

Exercice 840 1. Soit X un espace T_2 et K un sous ensemble quasi compact. Montrer que K est fermé.

2. Donner la définition d'un espace T_4. Montrer qu'un espace X est T_4 si et seulement si : pour tout fermé A contenu dans un ouvert U il existe un ouvert V tel que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

   Soient $f, g : X \to Y$ deux fonctions continues et Y un espace Hausdorff.
3. Montrer que $\{ x \in X \mid f(x) = g(x) \}$ est fermé.

4. Montrer que si f et g coïncident sur un ensemble dense dans X, alors $f = g$.

Exercice 841 Soit $M \subset \mathbb{R}^3$ le cylindre défini par l'équation $x^2+y^2 = 1$. Dans la carte $(\theta, z) \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), z)$ de M on donne le champ de vecteurs X défini par :

$$X(\theta, z) = \frac{\partial}{\partial \theta}\Big|_{(\theta,z)} + \tfrac{1}{2}z(z^2-1)\frac{\partial}{\partial z}\Big|_{(\theta,z)} .$$

1. Dire pourquoi X définit un champ de vecteurs sur M.
2. Esquisser le champ X dans la carte et calculer son flot ϕ_t sur M.
3. Le champ X est-il complet ?
4. Calculer les points (t, θ, z) tel que $\phi(t, \theta, z) = (\theta, z)$ **sur le cylindre** M.

Exercice 842 Soit $\alpha = f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy$ une 1-forme fermée ($d\alpha = 0$) sur $\mathbb{R}^2$, et soient (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x, y) trois points. On définit les courbes $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ par :

$$\gamma_i(t) = (1-t)(x_i, y_i) + t(x, y) \ ,$$

et les fonctions $h_0, h_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par : $h_i(x, y) = \int_{\gamma_i} \alpha$.

1. Montrer que $dh_i = \alpha$ (indication : calculer $\frac{d}{dt}f(\gamma_i(t))$ et $\frac{d}{dt}g(\gamma_i(t))$ et utiliser $d\alpha = 0$).
2. Montrer que $h_1 - h_0$ est constante et donner une expression explicite en terme de α pour cette constante (indication : utiliser le théorème de Stokes).
3. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ on donne la 1-forme $\alpha = \dfrac{x\, dy - y\, dx}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Montrer que $d\alpha = 0$, et dire pourquoi il n'existe pas de fonction $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ telle que $\alpha = dh$.
4. Pourquoi la construction donnée en 1. ne marche-t-elle pas dans le cas de $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ (voir 3.) ?

Barème indicatif : 2, 3, 3, 3, 4, 5.

45 Examen AR juin 1996

Exercice 843 1. Enoncer le théorème du point fixe. Soit B et C deux sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$, et soit $E = \{\, f : B \to C \mid f \text{ continue} \,\}$. On définit $d(f, g) = \sup_{x \in B} |f(x) - g(x)|$.

2. Montrer que $d : E \times E \to \mathbb{R}$ est une métrique sur E.
3. Montrer que (E, d) est un espace métrique complet.

Exercice 844 1. Donner la définition d'une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.

2. Enoncer le théorème des fonctions implicites.
3. Soit $M = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0 \ , \ z > 0 \,\}$. Montrer que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

   On définit la projection stéréographique s de $\mathbb{R}^3 \setminus \{\, (x, y, z) \mid z = -1 \,\}$ sur $\mathbb{R}^2 \cong \{\, (x, y, z) \mid z = 0 \,\}$ par la procédure suivante. Pour un point $P = (x, y, z)$ on trace la droite $d = \overline{PS}$ où $S = (0, 0, -1)$. L'image $s(P)$ est l'intersection de la droite d avec le plan $z = 0$.

4. Calculer explicitement l'application s.
5. Calculer l'image $D = s(M)$.
6. Calculer "l'inverse" de l'application $s : M \to D$.

   Soit X le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ donné par

$$X_{|(x,y,z)} = x\frac{\partial}{\partial z}_{|(x,y,z)} + z\frac{\partial}{\partial x}_{|(x,y,z)} \ \cong \ (z, 0, x) \ .$$

7. Calculer le flot du champ X.
8. Montrer que X est tangent à M, c'est-à-dire que pour tout $(x, y, z) \in M$ le vecteur $X_{|(x,y,z)}$ appartient à l'espace tangent $T_{(x,y,z)}M$.
9. Calculer l'expression de X dans la carte D de M.

10. Calculer le flot du champ sur D obtenu en i).

Exercice 845 Pour la sphère S^2 on considère la carte $U =]0,\infty[\ \times\ ]0,2\pi[$ donnée par :

$$\varphi :\ U \to S^2 \quad , \quad (r,\theta) \mapsto \left(\frac{2r}{r^2+1}\cos(\theta), \frac{2r}{r^2+1}\sin(\theta), \frac{r^2-1}{r^2+1}\right) .$$

Dans la carte U on donne le champ de vecteurs X par :

$$X_{|(r,\theta)} = f(r)\frac{\partial}{\partial r}_{|(r,\theta)} \ \cong\ (f(r),0) .$$

1. Calculer le champ sur S^2, c'est-à-dire les vecteurs $\varphi'(r,\theta)X_{|(r,\theta)}$.
2. Soit $f(r) = r^2$. Existe-t-il un champ de vecteurs continue Y sur la sphère S^2 **entière** telle que $Y_{|\varphi(r,\theta)} = \varphi'(r,\theta)X_{|(r,\theta)}$ pour tout (r,θ) ?
3. Même question qu'en 2. dans le cas $f(r) = \dfrac{r^2-1}{r^2+1}$.
4. Quelle condition nécessaire et suffisante (la plus simple possible) doit vérifier la fonction continue $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ pour qu'il existe un champ de vecteurs continue Y sur la sphère S^2 **entière** telle que $Y_{|\varphi(r,\theta)} = \varphi'(r,\theta)X_{|(r,\theta)}$ pour tout (r,θ) ?

Exercice 846 Dans $\mathbb{R}^3$ on se donne $M = \{\,(x,y,z) \mid x^2+y^2-z^2-1=0\,\}$, avec la carte φ définie par :

$$\varphi\ :\ ]0,2\pi[\ \times\mathbb{R} \quad , \quad (\theta,z) \mapsto \left(\left(\sqrt{z^2+1}\right)\cos(\theta), \left(\sqrt{z^2+1}\right)\sin(\theta), z\right) .$$

On considère aussi la 2-forme $\alpha = z\,dx\wedge dy$ sur $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer la 3-forme $d\alpha$.
2. Calculer la 2-forme α sur M dans la carte φ.

   Soit $a < b$, et soit $\widehat{M}$ la partie de M comprise entre $z = a$ et $z = b$, c'est-à-dire $\widehat{M} = \{\,(x,y,z) \mid x^2+y^2-z^2-1=0\ ,\ a \leqslant z \leqslant b\,\}$.
3. Calculer $\int_{\widehat{M}} \alpha$. (Nota Bene : pour l'orientation ne pas oublier que θ est la première coordonnée, et que z est la deuxième dans la carte φ.)

   Soit V la partie de $\mathbb{R}^3$ donné par les inégalités $a \leqslant z \leqslant b$ et $x^2+y^2-z^2-1 \leqslant 0$. On vous demande d'utiliser le théorème de Stokes pour calculer le volume de V, qui est donné par la formule $\int_V d\alpha$. Les questions suivantes vous amènent à ce but.
4. Énoncer le théorème de Stokes.
5. Décrire le bord ∂V de V.
6. Calculer $\int_{\partial V} \alpha$.

Barème indicatif : 4, 6, 4, 6.

46 Examen ARC décembre 1998

Exercice 847 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x^2-y, x^2+y^2)$. On définit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $g = f\circ f$.

1. Montrer que f et g sont de classe C^1.
2. Calculer pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ la matrice Jacobienne de f en (x,y) notée $D_{(x,y)}f$; calculer la matrice Jacobienne de g en $(0,0)$ notée $D_{(0,0)}g$.
3. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \overline{B_\rho((0,0))}$ (la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon ρ) on a $\|D_{(x,y)}g\| \leqslant \frac{1}{2}$.
4. Montrer que la fonction g admet un unique point fixe dans $\overline{B_\rho((0,0))}$ avec ρ comme dans c).

Exercice 848 On note $\mathrm{Log} : \mathbb{C}\setminus\,]-\infty,0] \to \mathbb{C}$ la détermination principale du logarithme, qui est réelle pour z réel positif. On pose

$$\begin{aligned} f(z) &= \exp\left(\tfrac{1}{3}\,\mathrm{Log}(z) + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Log}(z-1) + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Log}(z+1)\right) \\ g(z) &= \exp\left(\tfrac{1}{3}\,\mathrm{Log}(-z) + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Log}(1-z^2)\right) . \end{aligned}$$

1. Déterminer les domaines de définition $\Omega_f \subset \mathbb{C}$ de f et $\Omega_g \subset \mathbb{C}$ de g et montrer que f et g sont des branches continues de $\sqrt[3]{z^3 - z}$.
2. Est-ce-qu'on peut élargir le domaine de définition de f, c'est à dire : existe-t-il un ouvert $\widehat{\Omega}_f \subset \mathbb{C}$ et une fonction continue $\widehat{f} : \widehat{\Omega}_f \to \mathbb{C}$ telle que $\Omega_f \subset \widehat{\Omega}_f$ et pour tout $z \in \Omega_f$ on a $\widehat{f}(z) = f(z)$? N'oubliez pas de justifier votre réponse !
3. Est-ce-qu'on peut élargir le domaine de définition de g ?

Exercice 849 Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$. On désigne par $\overline{B} = \{x \in E \mid \|x\| \leqslant 1\}$ la boule fermée de centre 0 et de rayon 1.
Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel **fermé** de E. Pour $x \in E$ on pose :

$$d(x,F) = \inf_{y \in F} \| x - y \| \equiv \inf\{ \| x - y \| \mid y \in F \} .$$

1. Montrer que pour tout $x \in E$ on a $0 \leqslant d(x,F) \leqslant \|x\|$.
2. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes.
   (a) $d(x,F) = 0$;
   (b) $x \in F$.
3. (a) Montrer que, quels que soient $x, x' \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $y \in F$, on a :

$$\begin{aligned} d(\lambda x, F) &= |\lambda|\, d(x,F) \\ d(x - y, F) &= d(x,F) \\ d(x + x', F) &\leqslant d(x,F) + d(x',F) \end{aligned}$$

   (b) Montrer que l'application $x \mapsto d(x,F)$ est uniformément continue dans E.
4. Soit $x \in \overline{B}$. On pose $\alpha = d(x,F)$ et on suppose $\alpha > 0$. Soit de plus $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $y \in F$ tel que

$$\alpha \leqslant \| x - y \| < \alpha(1 + \varepsilon) .$$

   (b) Montrer qu'il existe $x' \in \overline{B}$ tel que
$$\tfrac{1}{1+\varepsilon} = d(x',F) < 1 .$$
   (c) Montrer que, si $F \neq E$, $\sup_{x \in \overline{B}} d(x,F) = 1$.
5. Sachant que tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet, démontrer que tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.
6. On suppose maintenant que $\overline{B}$ est compact.
   (a) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini k de points de $\overline{B}$: $x_1, \ldots, x_k \in \overline{B}$ tels que

$$\overline{B} \subset \bigcup_{j=1}^{k} B_\varepsilon(x_j) ,$$

   où $B_\varepsilon(x_j)$ désigne la boule ouverte de centre x_j et de rayon ε.
   (b) Déduire de ce qui précède que E est de dimension finie (on pourra considérer le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $x_1, \ldots, x_k$).
7. On revient au cas général (c'est-à-dire : on ne suppose plus que $\overline{B}$ est compact). Soit $u : E \to E$ une application linéaire continue. On suppose que $\overline{u(\overline{B})}$ (l'adhérence de l'image de $\overline{B}$ par u) est compacte. Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de u (c'est-à-dire : il existe $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$ tel que $u(x_0) = \lambda\, x_0$). On pose $V_\lambda = \{ x \in E \mid u(x) = \lambda x \}$.
   (a) Montrer que V_λ est un sous-espace vectoriel fermé de E.
   (b) Montrer que $\overline{B} \cap V_\lambda \subset \frac{1}{\lambda}\, u(\overline{B})$.
   (c) Montrer que V_λ est de dimension finie.

Barème indicatif : 4, 5, 11.

47 Examen ARC janvier 1999

Exercice 850 Énoncer et démontrer le théorème de Liouville.

Exercice 851 Soit α un réel tel que $-1 < \alpha < 2$, et soit $f : \mathbb{C} \setminus \{it \mid t \in]-\infty, 0]\}$ définie par

$$f(z) = \frac{e^{iz}e^{\alpha \log z}}{1+z^2} \ ,$$

où $\log z$ désigne la branche uniforme du logarithme complexe qui est réelle pour z réel strictement positif, avec $-\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$.

1. Montrer que, pour tout θ tel que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, on a : $0 \leqslant 2\theta/\pi \leqslant \sin\theta \leqslant \theta$.
2. Soit γ_ε le demi-cercle de rayon $\varepsilon > 0$, de centre 0, situé dans le demi-plan Im $z \geqslant 0$. Démontrer que $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\, dz = 0$.
3. Soit γ_R le demi-cercle de rayon $R > 0$, de centre 0, situé dans le demi-plan $\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$. Démontrer que $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 0$.
4. En intégrant f sur le bord du domaine $\varepsilon \leqslant |z| \leqslant R$, $0 \leqslant \arg(z) \leqslant \pi$, déduire de ce qui précède que l'intégrale
$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x^\alpha \cos(x - \frac{\alpha\pi}{2})}{1+x^2}\, dx$$
est convergente et en même temps calculer sa valeur.

Exercice 852 *Introduction.* Si A est une matrice $n \times n$ à coefficients réels, on sait que les solutions de l'équation

$$\varphi'(t) = A\varphi(t) \qquad (*)$$

sont définies (au moins) sur l'intervalle $[0, \infty[$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$). Dans la question 1. on vous demande de démontrer que, sous certaines hypothèses sur A, on a $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.
Le but des questions 2. et 3. est de démontrer les mêmes résultats pour l'équation perturbée

$$\varphi'(t) = A\varphi(t) + g(\varphi(t)) \qquad (**)$$

où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^1 vérifiant $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes. La question 3. utilise des résultats des questions 1. et 2.

1. Soit $M(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels et $M(n, \mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients complexes. Soit $\| \ \| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ la norme définie par $\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \max_i |x_i|$.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $B \in M(n, \mathbb{C})$ on a :
   $$\max_{i=1,\ldots,n} \left| \sum_{j=1}^n B_{ij} x_j \right| \leqslant (\max_i \sum_j |B_{ij}|) \cdot (\max_j |x_j|) \ ,$$
   c'est-à-dire $\|Bx\| \leqslant (\max_i \sum_j |B_{ij}|) \cdot \|x\|$.
   (b) Soit $D \in M(n, \mathbb{C})$ une matrice diagonale avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sur la diagonale. Montrer que $\forall x \in \mathbb{C}^n$: $\|Dx\| \leqslant (\max_i |\lambda_i|) \cdot \|x\|$.
   (c) Soit $A \in M(n, \mathbb{C})$ diagonalisable et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres. Soit $\alpha = \max_i \mathrm{Re}\, \lambda_i$. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $\forall t \in [0, \infty[$: $\left\|e^{tA}x\right\| \leqslant Ke^{\alpha t} \|x\|$.
   (d) Soit $A \in M(n, \mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres (attention, ici A est à coefficients réels). Soit en plus $\alpha = \max_i \mathrm{Re}\, \lambda_i$ strictement inférieur à 0. Déduire de ce qui précède que si $\varphi(t)$ est solution de l'équation (*), alors $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.
2. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ comme dans l'introduction.
   (a) Démontrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$: $\|x\| < \eta$, $\|y\| < \eta \Longrightarrow \|g(x) - g(y)\| \leqslant \varepsilon \cdot \|x - y\|$.
   (b) Quelle est la solution de domaine de définition maximal (à préciser) de l'équation (**) vérifiant la condition initiale $\varphi(0) = 0$?

(c) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle contenant 0. Démontrer qu'une application continue $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ est solution de l'équation (**) avec condition initiale $\varphi(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si on a sur I :

$$\varphi(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} g(\varphi(s))\, ds\ .$$

Indication : pour $\Longrightarrow$ on pourra considérer la fonction $\psi(t) = e^{-tA}\varphi(t)$.

3. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ comme dans l'introduction ; soit A et α comme dans 1.(d) et K comme dans 1.(c) Soit $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \beta < 0$. En posant $\varepsilon = (\beta - \alpha)/K$, la question 2.(a) nous donne un $\eta > 0$. Soit finalement $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x_0\| < \eta/K$.
On définit une suite de fonction $\varphi_p : [0, \infty[\to \mathbb{R}^n$ par les formules $\varphi_0(t) = e^{tA}x_0$ et

$$\varphi_{p+1}(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} g(\varphi_p(s))\, ds\ .$$

(a) Démontrer par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0, \infty[$: $\|\varphi_p(t)\| \leqslant Ke^{t\beta}\|x_0\|$.

(b) Démontrer que $\chi(t) = \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\|$ est une fonction bornée sur $[0, \infty[$.

(c) Démontrer par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0, \infty[$:

$$\|\varphi_{p+1}(t) - \varphi_p(t)\| \leqslant \left(\frac{\beta-\alpha}{-\alpha}\right)^p \cdot \sup_{s\in[0,\infty[} \|\varphi_1(s) - \varphi_0(s)\|\ .$$

(d) En déduire que $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0, \infty[$:

$$\|\varphi_{p+q}(t) - \varphi_p(t)\| \leqslant \left(\frac{\beta-\alpha}{-\alpha}\right)^p \cdot \left(1 - \frac{\beta-\alpha}{-\alpha}\right)^{-1} \cdot \sup_{s\in[0,\infty[} \|\varphi_1(s) - \varphi_0(s)\|\ .$$

(e) Démontrer que la suite (φ_p) converge vers une fonction $\varphi : [0, \infty[\to \mathbb{R}^n$ et que la convergence est uniforme.

(f) Démontrer que φ est continue et solution de l'équation (**) vérifiant $\varphi(0) = x_0$.

(g) Démontrer que $\forall t \in [0, \infty[$: $\|\varphi(t)\| \leqslant Ke^{t\beta}\|x_0\|$.

(h) Déduire de ce qui précède qu'il existe un voisinage U de $0 \in \mathbb{R}^n$ (à préciser) tel que $\forall x_0 \in U$ il existe un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ vérifiant

  i. φ est l'unique solution de (**) vérifiant $\varphi(0) = x_0$,
  ii. $[0, \infty[\subset I$,
  iii. $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.

Barème indicatif : 2, 5, 2+3+8.

48 Examen ARC septembre 1999

Exercice 853 1. Donner la définition d'un espace topologique *connexe*.

2. Démontrer que si $f : X \to Y$ est une application continue et X un espace connexe, alors $f(X)$ est connexe.
3. Donner la définition d'un espace topologique *compact*.
4. Démontrer que si $f : X \to Y$ est une application continue, X un espace compact et Y un espace séparé, alors $f(X)$ est compact.

Exercice 854 Soit $W = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \,\}$ et $\Omega = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \,\}$. On veut étudier le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = \dfrac{2y}{x} \end{cases} \tag{*}$$

1. Pour chaque condition initiale $(x_o, y_o) \in W$, trouver la solution $(x(t), y(t))$ sur un intervalle maximal I du système $(*)$ (préciser I). Tracer quelques courbes intégrales dans W pour des conditions initiales variées dans W.

2. Pour chaque condition initiale $(x_o, y_o) \in \Omega$, trouver la solution $(x(t), y(t))$ sur un intervalle maximal I du système $(*)$ (préciser I). Tracer quelques courbes intégrales dans Ω pour des conditions initiales variées dans Ω.
3. Trouver toutes les courbes $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 vérifiant $\gamma(0) = (-1, 1)$ et telles que γ est solution de $(*)$ partout où $\gamma(t)$ appartient à Ω.
4. Même question pour des courbes γ de classe C^2.
5. Même question pour des courbes γ de classe C^3.

Exercice 855 Soit a un réel tel que $0 \leqslant a < 1$.

1. Démontrer que les intégrales $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(ax)}{\sinh x}\, dx$ et $J(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cosh(ax)}{\cosh x}\, dx$ sont convergentes (sinh et cosh désignent les sinus et cosinus hyperboliques).
2. Soit ε et R des réels tels que $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2} < R$, soit $f(z)$ la fonction $f(z) = \frac{e^{az}}{e^z - e^{-z}}$ et soit $K_{\varepsilon,R} \subset \mathbb{C}$ le compact obtenu en ôtant la demi-boule ouverte de centre 0 et de rayon ε du rectangle de sommets R, $R + i\frac{\pi}{2}$, $-R + i\frac{\pi}{2}$, $-R$.
   (a) Démontrer que $\lim_{R\to+\infty} \int_\gamma f(z)\, dz = 0$ lorsque γ est (i) le côté du rectangle joignant R à $R + i\frac{\pi}{2}$ et (ii) le côté du rectangle joignant $-R + i\frac{\pi}{2}$ à $-R$.
   (b) Calculer le résidu de f en 0.
   (c) Du calcul de l'intégrale de f le long du bord orienté de $K_{\varepsilon,R}$ et de sa limite quand $\varepsilon \to 0$ et $R \to +\infty$, déduire $J(a)$ et $I(a)$.

Exercice 856 Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière (c'est-à-dire holomorphe).

1. Soit α un réel, $\alpha > 0$. On suppose que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|f(z)| \neq \alpha$. Démontrer que, ou bien $\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| < \alpha$, ou bien $\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| > \alpha$. En déduire que f est constante.
2. On suppose ici que f n'est pas constante.
   (a) Démontrer que $\inf_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| = 0$ et $\sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| = +\infty$.
   (b) Démontrer que $\{\ |f(z)|\ ,\ z \in \mathbb{C}\}$ est soit $]0, +\infty[$, soit $[0, +\infty[$. Donner un exemple dans chacun des deux cas.
3. On suppose toujours que f n'est pas constante. Démontrer que $\{f(z)\ ,\ z \in \mathbb{C}\}$ est partout dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 857 Soit f une application holomorphe (c'est-à-dire $\mathbb{C}$-différentiable) d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

1. Soit $z_0 \in \Omega$ tel que $f'(z_0) = 0$. Démontrer que $z \mapsto |f(z)|$ est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0. (On pourra utiliser le développement en série entière de f au voisinage de z_0.)
2. Soit $z_1 = x_1 + iy_1 \in \Omega$ tel que $f(z_1) \neq 0$. Démontrer que $(x, y) \mapsto |f(x + iy)|$ est $\mathbb{R}$-différentiable en (x_1, y_1).
3. Soit $z_2 = x_2 + iy_2 \in \Omega$ tel que $f(z_2) \neq 0$ et tel que $z \mapsto |f(z)|$ soit $\mathbb{C}$-différentiable en z_2. Démontrer que $f'(z_2) = 0$. (On pourra utiliser les conditions de Cauchy-Riemann.)
4. Soit $z_3 = x_3 + iy_3 \in \Omega$ tel que $f(z_3) = 0$ et $f'(z_3) \neq 0$.
   L'application $(x, y) \mapsto |f(x + iy)|$ est-elle $\mathbb{R}$-différentiable en (x_3, y_3) ? L'application $z \mapsto |f(z)|$ est-elle $\mathbb{C}$-différentiable en z_3 ?
5. Donner le domaine où $z \mapsto |f(z)|$ est continue, puis celui où $z \mapsto |f(z)|$ est $\mathbb{C}$-différentiable, et enfin celui où $(x, y) \mapsto |f(x + iy)|$ est $\mathbb{R}$-différentiable.

Barème indicatif : 3, 3, 5, 5, 4.

49 Examen ARC novembre 1999

Exercice 858 1. Donner la définition d'un espace topologique *connexe*.

2. Donner la définition d'un espace topologique *compact*.
3. Démontrer que si $f : X \to Y$ est une application continue, X un espace topologique compact et Y un espace topologique, alors $f(X)$ est compact.
4. Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstraß.
5. Soit (X, d) un espace métrique, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans X, et $i \mapsto n_i$ une suite strictement croissante d'entiers. On suppose que $\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = b \in X$. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} a_n = b$.

6. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ une application, Ω un ouvert et $z_o \in \Omega$. Quelle est la définition de f $\mathbb{R}$-dérivable en z_o ? Quelle est la définition de f $\mathbb{C}$-dérivable en z_o ?

Exercice 859 Soit X un espace topologique, I un ensemble d'indices et pour chaque $\alpha \in I$, soit $A_\alpha \subset X$ une partie connexe de X. On suppose que $\forall \alpha, \beta \in I : A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$. Démontrer que $\cup_{\alpha \in I} A_\alpha$ est connexe.

Exercice 860 Soit X un espace topologique, $A \subset X$ une partie et $C \subset X$ une partie connexe telle que $C \cap A \neq \emptyset$ et $C \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

1. Démontrer que C contient des points de la frontière de A.
2. Pourquoi $A = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^3$ et $C = \{(0, 0, z) \mid |z| \leqslant 1\}$ n'est-il pas un contre-exemple pour la propriété énoncée dans 1. ?

Exercice 861 Soit X un espace topologique et Y un espace topologique séparé. Soit $f, g : X \to Y$ deux applications continues.

1. Démontrer que $U = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ est un ouvert de X.
2. Soit $D \subset X$ une partie dense. Démontrer que si $f|_D = g|_D$, alors $f = g$.

Exercice 862 Soit (X, d) un espace métrique. On suppose que *toutes* les boules fermées (c'est-à-dire les ensembles de la forme $\{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}$) sont compactes.

1. Démontrer que X est complet.
2. Démontrer que si $A \subset X$ est fermé et borné, alors A est compact.

Exercice 863 Soit (X, d) un espace métrique compact et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X. Démontrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence $x \in X$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. (Indication : on suppose que la suite ne converge pas vers x.)

Exercice 864 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Le but de cet exercice est de montrer que E est complet si et seulement si toute série absolument convergente converge.

1. Soit E complet et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$ converge. Démontrer que la suite $s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ est une suite de Cauchy ; en déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.
2. On suppose que toute série absolument convergente converge, c'est-à-dire si $\sum_{n=0}^{\infty} \|b_n\|$ converge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E. Trouver une suite strictement croissante $i \mapsto n_i \in \mathbb{N}$ telle que $\forall i : \left\|a_{n_{i+1}} - a_{n_i}\right\| < 2^{-i}$. En déduire que $\sum_{i=0}^{\infty}(a_{n_{i+1}} - a_{n_i})$ converge. Déduire de ce résultat que E est complet.

Exercice 865 Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne et $F = M(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels ; on identifie F avec l'ensemble d'applications linéaires de E dans E. Soit $\|\cdot\|_{op}$ la norme d'opérateurs sur F.

1. Démontrer que $\forall A, B \in F : \|AB\|_{op} \leqslant \|A\|_{op} \cdot \|B\|_{op}$.
2. Démontrer que pour $A \in F$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ est une série normalement convergente sur tout compact de F. (Nota Bene : $A^0 = Id \in F$ désigne la matrice identité.) On note $\exp : F \to F$ l'application $A \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$.
3. Calculer $D_{\mathbf{0}} \exp$, où $\mathbf{0}$ est l'application nulle de E dans E. Quelle est la taille de la matrice $D_{\mathbf{0}} \exp$? Déduire qu'il existe un voisinage U de $\mathbf{0} \in F$ et un voisinage V de $Id = \exp(\mathbf{0})$ tels que exp est un (C^1-)difféomorphisme de U sur V. Justifier votre réponse !

Exercice 866 Soit $f : O \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur l'ouvert O et $(x_o, y_o, z_o) \in O$ tel que $f(x_o, y_o, z_o) = 0$.

1. Donner une condition suffisante pour qu'on puisse résoudre : et x en fonction de (y, z), et y en fonction de (x, z), et z en fonction de (x, y). Plus précisément, donner une condition suffisante pour qu'il existe U un voisinage de x_o, V un voisinage de y_o, W un voisinage de z_o, $U \times V \times W \subset O$, et $\phi : V \times W \to U$, $\chi : U \times W \to V$ et $\psi : U \times V \to W$ des fonctions de classe C^1 telles que $\forall (x, y, z) \in U \times V \times W$:
$$f(x, y, z) = 0 \Longleftrightarrow x = \phi(y, z) \Longleftrightarrow y = \chi(x, z) \Longleftrightarrow z = \psi(x, y) \ .$$
Justifier votre réponse.
2. Si la condition donnée en 1. est satisfaite, démontrer que $\forall (x, y, z) \in U \times V \times W$ tels que $f(x, y, z) = 0$ on a
$$(\partial_1 \phi)(y, z) \cdot (\partial_2 \chi)(x, z) \cdot (\partial_1 \psi)(x, y) = -1 \ .$$
(Remarque, cette relation est beaucoup utilisée en thermodynamique, où elle est écrite comme $(\frac{x}{y})_z \cdot (\frac{y}{z})_x \cdot (\frac{z}{x})_y = -1$, avec l'interprétation que $(\frac{x}{y})_z$ est la dérivée de x par rapport à y en gardant z constant.)

Barème indicatif : $4\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, 2, 1, 2, 2, 3, 3, 2.

50 Examen ARC janvier 2000

Exercice 867 1. Donner la définition d'un espace topologique *connexe*.

2. Soit $O \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $Y : O \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe C^1. Donner la définition d'une courbe intégrale maximale (associée à une condition initiale $y_0 \in O$) du champ Y et donner la définition du flot du champ Y.
3. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ une application, Ω un ouvert et $z_o \in \Omega$. Quelle est la définition de f $\mathbb{R}$-dérivable en z_o ? Quelle est la définition de f $\mathbb{C}$-dérivable en z_o ?
4. Soit X un espace topologique, $A \subset X$ une partie et $x_o \in X$. Quand dit-on que x_o est un point d'accumulation de A ?
5. Soit X un espace topologique, $A \subset X$ une partie et $x_o \in X$ un point d'accumulation de A. Si $f : A \to Y$ est une application et $\ell \in Y$, quand dit-on que $\lim_{x\to x_o} f(x) = \ell$. (Nota Bene : On est dans un espace topologique général, on n'a pas de métrique, ni de soustraction, ni ...)
6. Donner la définition de la topologie sur $\mathbb{C}_\infty \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et montrer que ∞ est un point d'accumulation de $\mathbb{C}$ (dans $\mathbb{C}_\infty$).
7. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que $\lim_{z\to\infty} f(z) = \ell$ (dans le sens de la question (e)) est équivalent à $\forall\varepsilon > 0\ \exists R > 0\ \forall z \in \mathbb{C} : |z| > R \Longrightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon$.

Exercice 868 Soit X un espace topologique, I un ensemble d'indices et pour chaque $\alpha \in I$, soit $A_\alpha \subset X$ une partie connexe de X. On suppose que $\forall\alpha, \beta \in I : A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$. Démontrer que $\cup_{\alpha\in I} A_\alpha$ est connexe.

Exercice 869 Pour une fonction réelle x de la variable t on considère le système

$$x'''' + 2x'' + x = 0 \qquad \& \qquad x(0) = 2\ . \tag{*}$$

1. Le système (*) a-t-il une solution unique ? Pourquoi ?

   Si votre réponse à la question 1. est oui, répondre à la question 2., si votre réponse à la question 1. est non, répondre à la question 3..
2. Trouver la solution unique de (*). Est-elle périodique ?
3. Trouver toutes les solutions de (*). Y-a-t-il des solutions périodiques ? Si oui, les expliciter.

Exercice 870 Soit $Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs $Y(x, y) = (1, 1 + y^2)$.

1. Trouver les solutions maximales du champ Y, y compris leur domaine de définition.
2. Esquisser le portrait de phase du champ Y.
3. Déterminer le flot du champ Y, y compris son domaine de définition.

Exercice 871 On définit les fonctions f_1, f_2 et f_3 par les formules

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \exp(\tfrac{1}{3}[\mathrm{Log}(z+1) + \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(z-1) + \mathrm{Log}(z-\sqrt{3})]) \\ f_2(z) &= \exp(\tfrac{1}{3}[\mathrm{Log}(z+1) + \mathrm{Log}(-z) + \mathrm{Log}(1-z) + \mathrm{Log}(\sqrt{3}-z) + i\pi]) \\ f_3(z) &= \exp(\tfrac{1}{3}[\mathrm{Log}(-1-z) + \mathrm{Log}(-z) + \mathrm{Log}(1-z) + \mathrm{Log}(z-\sqrt{3}) + i\pi])\ , \end{aligned}$$

où Log désigne le logarithme principal.

1. Calculer $f_1(\pm i)$, $f_2(\pm i)$ et $f_3(\pm i)$.
2. Déterminer les domaines de définition de f_1, f_2 et f_3.
3. Démontrer que f_1, f_2 et f_3 sont des déterminations continues de $\sqrt[3]{z^4 - \sqrt{3}z^3 - z^2 + \sqrt{3}z}$.
4. Peut-on prolonger f_1 sur un ouvert plus grand ? Si oui, lequel ?
5. Peut-on prolonger f_2 sur un ouvert plus grand ? Si oui, lequel ?
6. Peut-on prolonger f_3 sur un ouvert plus grand ? Si oui, lequel ?
7. Y-a-t-il un lien entre f_1, f_2 et f_3 ?

Exercice 872 1. Démontrer que l'intégrale $\int_0^\infty \dfrac{\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$ converge.

2. Soit $f(z)=\dfrac{\log(z)}{(1+z^2)^2}$ avec $\log(z)=\mathrm{Log}(-iz)+i\pi/2$ le logarithme défini sur $\mathbb{C}\setminus i\,]-\infty,0]$ et tel que $\log(1)=0$. Déterminer les points singuliers isolés de f et pour chaque point singulier isolé déterminer son résidu.
3. Soit $D=\{\,z\in\mathbb{C}\mid\varepsilon<|z|<R\ \&\ \mathrm{Im}\,z>0\,\}$. À l'aide de $\int_{\partial D}f(z)\,dz$, déterminer la valeur de $\int_0^\infty\dfrac{\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$. N'oubliez pas de justifier les passages à la limite que vous effectuez.

Exercice 873 1. Énoncer le principe du maximum.

2. Soit $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{C}$ des points sur le cercle unité ($|a_j|=1$). Démontrer qu'il existe un point z_o sur le cercle unité tel que le produit des distances de z_o à a_j $(j=1,\dots,n)$ est supérieur ou égal à 1.

Barème indicatif : $4\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, 3, $2\frac{1}{2}$.

51 Examen ARC septembre 2000

Exercice 874 1. Donner la définition d'un espace topologique *connexe.*

2. Soit $O\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert et $Y:O\to\mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe C^1. Donner la définition d'une courbe intégrale maximale (associée à une condition initiale $y_0\in O$) du champ Y et donner la définition (pas une description) du flot du champ Y.
3. Soit $f:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$ une application, Ω un ouvert et $z_o\in\Omega$. Quelle est la définition de f $\mathbb{R}$-dérivable en z_o ? Quelle est la définition de f $\mathbb{C}$-dérivable en z_o ?
4. Soit X un espace topologique, $A\subset X$ une partie et $x_o\in X$. Quand dit-on que x_o est un point d'accumulation de A ?
5. Donner la définition de la topologie sur $\mathbb{C}_\infty\equiv\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ et montrer que ∞ est un point d'accumulation de $\mathbb{C}$ (dans $\mathbb{C}_\infty$).
6. Énoncer les théorèmes de Liouville et de d'Alembert.
7. À partir du théorème de Liouville, démontrer le théorème de d'Alembert.

Exercice 875 1. Donner la définition d'un espace topologique *compact.*

2. Soit X un espace topologique compact. Soit $\mathcal{F}$ une collection de fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$. La collection $\mathcal{F}$ a les deux propriétés suivantes :
   (a) Si f et g appartiennent à $\mathcal{F}$, alors leur produit $f\cdot g$ appartient à $\mathcal{F}$.
   (b) Pour tout $x\in X$ il existe un voisinage U de x et une fonction $f\in\mathcal{F}$ tel que f est identiquement nulle sur U.

   Démontrer que la fonction qui est identiquement nulle sur X appartient à $\mathcal{F}$.

Exercice 876 Pour une fonction **réelle** x de la variable t on considère le système

$$\begin{cases}x^{(4)}-2x^{(3)}+2x''-2x'+x=0\\ x(0)=0\quad,\quad x''(0)=-2\quad,\quad x^{(3)}(0)=0\end{cases}\tag{*}$$

1. Le système (*) a-t-il une solution unique ? Pourquoi ?

   Si votre réponse à la question 1. est oui, répondre à la question 2., si votre réponse à la question 1. est non, répondre à la question 3..
2. Trouver la solution unique de (*). Est-elle périodique ?
3. Trouver toutes les solutions de (*). Y-a-t-il des solutions périodiques ? Si oui, les expliciter.

Exercice 877 Soit $Y:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs $Y(x,y)=(x^2,xy)$.

1. Trouver les solutions maximales du champ Y, y compris leur domaine de définition.
2. Esquisser le portrait de phase du champ Y.
3. Déterminer le flot du champ Y, y compris son domaine de définition.

Exercice 878 Soit f une fonction holomorphe sur $B_r(0) \subset \mathbb{C}$ pour un certain rayon $r > 1$. Démontrer les égalités suivantes :

$$\tfrac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2(\tfrac{\theta}{2})\,d\theta = 2f(0) + f'(0)\tfrac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2(\tfrac{\theta}{2})\,d\theta = 2f(0) - f'(0)$$

Indication : contempler les deux intégrales $\int_{|z|=1}\Big(2 \pm (z + \dfrac{1}{z})\Big)\dfrac{f(z)}{z}\,dz$.

Exercice 879 Soit a un réel, $0 < a < 2$.

1. Démontrer que l'intégrale $\int_0^\infty \dfrac{x^a}{x(1+x^2)}\,dx$ converge.
2. Soit $f(z) = \dfrac{e^{a\log(z)}}{z(1+z^2)}$ avec $\log(z) = \mathrm{Log}(-iz) + i\pi/2$, c'est-à-dire que log est le logarithme défini sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus i\,]-\infty, 0]$ et tel que $\log(1) = 0$. Déterminer les points singuliers isolés de f dans Ω et pour chaque point singulier isolé déterminer son résidu.
3. Soit $D = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \varepsilon < |z| < R \;\&\; \mathrm{Im}\, z > 0 \,\}$. À l'aide de $\int_{\partial D} f(z)\,dz$, déterminer la valeur de $\int_0^\infty \dfrac{x^a}{x(1+x^2)}\,dx$. N'oubliez pas de justifier les passages à la limite que vous effectuez.

Exercice 880 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application dérivable.

1. Énoncer l'inégalité des accroissements finis. (Pour cette question on peut supposer que U est con**v**exe.)
2. Démontrer, à l'aide de 1., la proposition suivante :
   Si pour tout $x \in U$ la dérivée de f en x est nulle : $Df(x) = 0$, alors pour tout x dans U il existe un voisinage V de x dans U (par exemple une boule centrée en x) tel que f est constante sur V.
3. À l'aide de 2., démontrer que si en plus U est co**nn**exe, alors f est constante sur U.

Barème indicatif : $5\frac{1}{2}$, 2, 2, $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, 3.

52 Examen ARC décembre 2000

Exercice 881 1. Donner la définition d'un espace topologique *connexe*.

2. Donner la définition d'un espace topologique *compact*.
3. Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstraß.
4. Soit X un espace topologique, $A \subset X$ une partie et $a : \mathbb{N} \to A$ une suite dans A. Démontrer que, si $\lim_{n\to\infty} a(n) = x$, alors $x \in \overline{A}$.
5. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ une application, Ω un ouvert et $z_o \in \Omega$. Donner la définition de f $\mathbb{R}$-dérivable en z_o. Donner la définition de f $\mathbb{C}$-dérivable en z_o.
6. Démontrer que les matrices $A = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right)$ commutent $(a, b \in \mathbb{R})$ et calculer la série $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)^n$.

Exercice 882 Dans cet exercice, $\mathcal{O}$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1. Quand dit-on qu'une fonction $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ est de classe C^k $(k \geqslant 1)$?
2. Démontrer par récurrence sur k que si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{O} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sont de classe C^k, alors $h : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)/g(x)$ est aussi de classe C^k.
3. Démontrer par récurrence sur k que la composée de deux fonctions de classe C^k est aussi de classe C^k.
4. Soit $Gl(2, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels 2×2 inversibles. Démontrer que l'application $I : Gl(2, \mathbb{R}) \to Gl(2, \mathbb{R})$, $I(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)^{-1}$ est de classe C^k pour tout $k \geqslant 1$.
5. Énoncer le théorème de l'inversion locale pour une fonction $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$.
6. On se restreint au cas $n = 2$ et on se place dans les conditions du théorème de l'inversion locale. Démontrer que si f est de classe C^k, $k > 1$, alors la réciproque f^{-1} (donnée par le théorème de l'inversion locale) est de classe C^k.

Exercice 883 Soit X un espace topologique connexe, soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de X par ouverts et soit $x_0 \in X$ un point de X. On dit que x est n-éloigné de x_0 s'il existe $U_0, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ tels que $x_0 \in U_0$, $U_{i-1} \cap U_i \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, n$ et $x \in U_n$. Prenez le temps de dessiner ce que veut dire n-éloigné. On définit l'ensemble $A \subset X$ par

$$A = \{\, x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N} : x \text{ est } n\text{-éloigné de } x_0 \,\}\ .$$

Démontrer que A est ouvert et fermé dans X. En déduire que $A = X$.

Exercice 884 Soit X un espace topologique séparé et soit ∞ un point qui n'appartient pas à X. On pose $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ et on définit $\mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{P}(X_\infty)$ par : $A \in \mathcal{T}_\infty$ si et seulement si

$$\begin{aligned} \infty \notin A \Rightarrow\ & A \text{ est un ouvert de } X\,; \\ \infty \in A \Rightarrow\ & X \setminus A \text{ est un compact de } X. \end{aligned}$$

1. Démontrer que si A appartient à $\mathcal{T}_\infty$, alors $A \cap X$ est un ouvert de X.
2. Démontrer que $\mathcal{T}_\infty$ est une topologie sur X_∞.
3. Démontrer que X est dense dans X_∞.
4. Démontrer que X_∞ est compact.

Exercice 885 Soit P et Q deux polynômes à coefficients complexes sans zéro commun et soit $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ les zéros de Q (ce qui implique que le degré de Q est supérieur ou égal à k). On définit la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \to \mathbb{C}$ par $f(z) = P(z)/Q(z)$.

1. Démontrer qu'il existe une fonction continue $g : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ telle que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_k\} : g(z) = f(z)$. Quelle est la valeur de g en un point z_i ? Quelle est la valeur de g en ∞ ? (N'oubliez pas de démontrer que la fonction g que vous définissez est continue.)
2. Le résultat reste-t-il vrai si P et Q ont des zéros communs ? Si non, donner un contre exemple ; si oui, esquisser votre raisonnement.

Exercice 886 Soit $f :]0, +\infty[\, \times\,]0, +\infty[\, \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x, t, c) = x - \ln(x) - t + \ln(t) - c$.

1. Démonter que si une fonction dérivable de t, $x = \gamma_c(t)$ est solution de l'équation $f(\gamma_c(t), t, c) = 0$, alors elle est solution de l'équation différentielle $t(x-1)x' = (t-1)x$.
2. Existe-t-il une fonction $g(t, c)$ définie dans un voisinage de $(2, 0)$ vérifiant $g(2, 0) = 2$ et $f(g(t, c), t, c) = 0$ (justifier) ? Si oui, calculer le développement limité (le polynôme de Taylor) d'ordre 2 de cette solution.

Barème indicatif : $4\frac{1}{2}$, 4, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, 2.

53 Examen ARC janvier 2001

Exercice 887
1. Donner la définition d'un espace topologique *connexe* et d'un espace topologique *connexe par arcs.*
2. Soit X un espace topologique. Démontrer que si X est connexe par arcs, alors X est connexe.
3. Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstraß.
4. Soit $O \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $Y : O \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe C^1. Donner la définition d'une *courbe intégrale* (associée à une condition initiale $y_0 \in O$) du champ Y ; quand parle-t-on d'une courbe intégrale *maximale* ? Donner la définition (pas une description) du flot du champ Y.
5. Donner la définition d'un *point stationnaire* d'un champ de vecteurs.
6. Écrire les inégalités de Cauchy (y compris les conditions de leur validité) et énoncer le théorème de Liouville.
7. À partir des inégalités de Cauchy, démontrer le théorème de Liouville.

Exercice 888
1. Quand dit-on qu'une partie S de $\mathbb{R}^n$ est discrète ?
2. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact et soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une partie discrète et fermée. Démontrer que $K \cap S$ est fini.
3. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non-identiquement nulle et soit $K \subset \Omega$ un compact. Démontrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros dans K.

Exercice 889 Soit $O \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : O \to \mathbb{R}^p$ une fonction. Supposons qu'il existe une fonction continue $L : O \times O \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$ (l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ muni de la norme d'opérateurs) telle que pour tout $x, y \in O$ on a

$$f(x) - f(y) = L(x, y)\,(x - y)\ .$$

Démontrer que f est de classe C^1 sur O et que $Df(x) = L(x, x)$.

Exercice 890 Soit $Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs $Y(x, y) = (x^2 y, xy^2)$.

1. Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ est solution de l'équation $\gamma'(t) = Y(\gamma(t))$, que peut-on dire de la dérivée de y/x par rapport à t ?

2. Trouver les solutions maximales du champ Y (y compris leur domaine de définition).
3. Esquisser le portrait de phase du champ Y.
4. Déterminer le flot du champ Y (y compris son domaine de définition).

Exercice 891 Soit $A \in M(n, \mathbb{R})$ une matrice de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1. Quand dit-on que $0 \in \mathbb{R}^n$ est une source pour l'équation différentielle linéaire $x' = Ax$?
2. Démontrer que $0 \in \mathbb{R}^n$ est une source pour l'équation $x' = Ax$ si et seulement si pour toute solution $x(t)$ de l'équation différentielle on a $\lim_{t \to -\infty} x(t) = 0$.

Exercice 892 Soit $f(z) = \dfrac{1 - e^{2iz^2}}{z^3(1 + z^4)}$, soit $0 < \varepsilon < 1 < R$ et soit $D = B_\varepsilon(0) \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0, |z| < R\}$.

1. Démontrer que l'intégrale $\int_0^\infty \dfrac{\sin^2(x^2)}{x^3(1 + x^4)}\, dx$ converge.
2. Dessiner D, déterminer les singularités de f et calculer $\int_{\partial D} f(z)\, dz$.
3. Déduire de 2. la valeur de $\int_0^\infty \dfrac{\sin^2(x^2)}{x^3(1 + x^4)}\, dx$. N'oubliez pas de justifier les passages à la limite que vous effectuez.

Barème indicatif : $6\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, 3, 2, $4\frac{1}{2}$.

54 Examen ARC septembre 2001

Exercice 893 1. Donner la définition d'un espace topologique *compact*.

2. Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application continue. Démontrer que si X est compact, alors $f(X) \subset Y$ l'est aussi.
3. Soit $O \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $Y : O \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe C^1. Donner la définition d'une *courbe intégrale* (associée à une condition initiale $y_0 \in O$) du champ Y ; quand parle-t-on d'une courbe intégrale *maximale* ? Donner la définition (pas une description) du flot du champ Y.
4. Donner la définition d'un *point stationnaire* d'un champ de vecteurs.
5. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{C}$ une application et $z_o \in U$. Quand dit-on que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_o ?
6. Énoncer les inégalités de Cauchy et énoncer le théorème de Liouville.
7. À partir des inégalités de Cauchy, démontrer le théorème de Liouville.
8. Démontrer que les matrices $A = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right)$ commutent $(a, b \in \mathbb{R})$ et calculer la série $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)^n$.

Exercice 894 Soit X un espace topologique, Y un espace topologique séparé, $U \subset X$ un sous ensemble dense de X, et soit $f, g : X \to Y$ deux applications continues. Démontrer que $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ est un fermé. En déduire que si f et g coincident sur U, alors f et g coincident sur X.

Exercice 895 Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe et soit a un réel strictement positif.

1. Démontrer que $\{|f(z)| \mid z \in \mathbb{C}\}$ est connexe.
2. Démontrer que si pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $|f(z)| \neq a$, alors on a ou bien $\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| > a$, ou bien $\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| < a$. En déduire que f est constante.
3. En utilisant le résultat de 2., démontrer que si f n'est pas constante, alors $\inf_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| = 0$ et $\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| = +\infty$.

Exercice 896 Pour une fonction **réelle** x de la variable t on considère le système

$$\begin{cases} x^{(4)} - 2x^{(3)} + x'' + 2x' - 2x = 0 \\ x(0) = 0 \qquad , \qquad x''(0) = 0 \end{cases} \tag{*}$$

1. Le système (*) a-t-il une solution unique ? Pourquoi ?

   Si votre réponse à la question 1. est oui, répondre à la question 2., si votre réponse à la question 1. est non, répondre à la question 3..
2. Trouver la solution unique de (*). Est-elle périodique ?

3. Trouver toutes les solutions de (*). Y-a-t-il des solutions périodiques ? Si oui, les expliciter.

Exercice 897 Soit $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ et soit $Y : U \to \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs $Y(x, y) = (1, \dfrac{2x}{3y^2})$.

1. Trouver les solutions maximales du champ Y, y compris leur domaine de définition (n'oubliez pas qu'on est dans U).
2. Esquisser le portrait de phase du champ Y.
3. Déterminer le flot du champ Y, y compris son domaine de définition.

Exercice 898 Soit n, p deux entiers tels que $n \geqslant p + 2 \geqslant 2$, soit $f(z) = \dfrac{z^p}{1 + z^n}$, soit $R > 0$ et soit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Arg}(z) < 2\pi/n\ ,\ 0 < |z| < R\}$.

1. Démontrer que l'intégrale $\int_0^\infty \dfrac{x^p}{1 + x^n}\,dx$ converge.
2. Dessiner D, déterminer les singularités isolés de f et calculer $\int_{\partial D} f(z)\,dz$.
3. Déduire de 2. la valeur de $\int_0^\infty \dfrac{x^p}{1 + x^n}\,dx$. N'oubliez pas de justifier les passages à la limite que vous effectuez.

Barème indicatif (sur 22) : $6\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, 4, 2, 3, 4.

55 Examen VC janvier 96

Exercice 899 Soit $R > 1$ et γ_R le chemin fermé de classe C^1 : $\gamma_R : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ tel que $\gamma_R(t) = Re^{it}$.
On note respectivement γ_R^+ et γ_R^- la restriction de γ_R à $[0, \pi]$ et à $[\pi, 2\pi]$. On rappelle que $[a, b]$ désigne le chemin ζ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$ défini par $\zeta(t) = bt + (1 - t)a$. On pose $C_R^+ = \gamma_R^+ + [-R, R]$ et $C_R^- = \gamma_R^- + [R, -R]$.
Montrer que $\mathrm{Ind}_{C_R^+}(i) + \mathrm{Ind}_{C_R^-}(i) = \mathrm{Ind}_{\gamma_R}(i)$ et en déduire la valeur de $\mathrm{Ind}_{C_R^+}(i)$. Calculer, pour $u > 0$ et $R > 1$,

$$\int_{C_R^+} \frac{e^{iuz}}{1 + z^2} dz.$$

En déduire la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iux}}{1 + x^2} dx,$$

pour $u > 0$, puis pour tout u réel.

Exercice 900 Soit α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, z = re^{i\theta} |\ 0 < r, |\theta| < \alpha\}$. On note, pour $\eta > 0$, $\Delta_\eta = \{z \in \mathbb{C}, z = re^{i\theta} |\ \eta < r, |\theta| < \alpha\}$. Dessiner Δ et Δ_η.
Dans tout ce qui suit, f désigne une fonction holomorphe sur Δ, bornée et continue sur $\overline{\Delta}$, l'adhérence de Δ.
On note $\partial\Delta$, la frontière de Δ.
On pose $\tilde{M} = \sup\limits_{z \in \partial\Delta} |f(z)|$ et, pour tout $r > 0$, $M_r = \sup\limits_{z \in \Delta, |z| = r} |f(z)|$.

1. On suppose

   (*) $$\lim_{z \in \Delta, |z| \to \infty} |f(z)| = 0.$$

   Soit $R > 0$, montrer que l'on a
   $$\sup_{z \in \overline{\Delta}, |z| \leqslant R} |f(z)| \leqslant \max(\tilde{M}, M_R)$$
   et donc
   $$\sup_{z \in \overline{\Delta}} |f(z)| \leqslant \sup_{z \in \partial\Delta} |f(z)|.$$

2. On ne suppose plus (*). On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, et tout $z \neq 0$, $g_n(z) = \frac{f(z)^n}{z}$. En majorant, comme dans la question 1. $\sup_{z \in \overline{\Delta_\eta}, |z| \leqslant R} |g_n(z)|$, montrer que l'on a, pour tout $n > 0$, tout $\eta > 0$ et tout z de Δ_η,
   $$\left| \frac{f(z)^n}{z} \right| \leqslant \frac{1}{\eta} \max\left((\tilde{M})^n, (M_\eta)^n\right)$$

et de là
$$\sup_{z\in\overline{\Delta_\eta}} |f(z)| \leqslant \max\left(\tilde{M}, M_\eta\right).$$
En déduire que l'on a encore
$$\sup_{z\in\overline{\Delta}} |f(z)| \leqslant \sup_{z\in\partial\Delta} |f(z)|.$$

3. On suppose maintenant que l'on a $\lim_{r\to\infty} |f(re^{i\alpha})| = 0$ et $\lim_{r\to\infty} |f(re^{-i\alpha})| = 0$. On se propose de montrer qu'alors $\lim_{z\in\Delta,|z|\to\infty} |f(z)| = 0$.

   En majorant la fonction $z \mapsto \left|\frac{z}{z+A}\right|$, $A > 0$, montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que l'on ait, pour tout $A > 0$,
$$\sup_{z\in\partial\Delta,|z|>R} \left|\frac{z}{z+A}f(z)\right| \leqslant \varepsilon.$$
   Montrer qu'alors il existe $A > 0$ tel que l'on ait
$$\sup_{z\in\partial\Delta} \left|\frac{z}{z+A}f(z)\right| \leqslant \varepsilon.$$
   En utilisant la question 2., en déduire que l'on a $\lim_{z\in\Delta,|z|\to\infty} |f(z)| = 0$.

56 Examen VC avril 96

Exercice 901 (Question de cours) Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω convergeant uniformément sur tout compact K de Ω. Montrer que la fonction limite f est holomorphe dans Ω et que la suite des dérivées $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f' sur tout compact K de Ω.

Exercice 902 Soit t un réel, $|t| \leqslant \pi$.

1. On considère la série de fonctions holomorphes
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k e^{ikt}}{k^2 - z^2}.$$
   Montrer que sa somme $S(z)$ est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$.
2. Soit γ_n, $n \geqslant 0$, le chemin parcouru dans le sens positif dont l'image γ_n^* dans $\mathbb{C}$ est le carré de sommets $\left(n+\frac{1}{2}\right)(1+i)$, $\left(n+\frac{1}{2}\right)(-1+i)$, $\left(n+\frac{1}{2}\right)(-1-i)$, $\left(n+\frac{1}{2}\right)(1-i)$.
   (a) Montrer que, quel que soit z vérifiant $z = \left(n+\frac{1}{2}\right) + iy$, $-\left(n+\frac{1}{2}\right) \leqslant y \leqslant n+\frac{1}{2}$, on a
$$\left|\frac{e^{itz}}{\sin \pi z}\right| \leqslant 2$$
   et que, quel que soit z vérifiant $z = x + i\left(n+\frac{1}{2}\right)$, $-\left(n+\frac{1}{2}\right) \leqslant x \leqslant n+\frac{1}{2}$, on a
$$\left|\frac{e^{itz}}{\sin \pi z}\right| \leqslant \frac{2}{1-e^{-\pi}}.$$
   En déduire que $\left|\frac{e^{itz}}{\sin \pi z}\right|$ est bornée sur γ_n^*.
   (b) Soit a appartenant à $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. On pose
$$f(z) = \frac{e^{itz}}{(z^2-a^2)\sin \pi z}.$$
   Montrer que l'on a
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\gamma_n} f(z)dz = 0.$$
3. Calculer le résidu de f en chacun de ses pôles. En déduire la valeur de
$$S(a) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k e^{ikt}}{k^2 - a^2}.$$

4. Calculer de même
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k e^{ikt}}{(k+a)^2}.$$

Exercice 903 Soit a un réel, $a > 1$. On considère la série entière
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{a^{n^2}}.$$

1. Montrer que sa somme, notée $f(z)$, est holomorphe dans $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe $a_0 > 1$ tel que l'on ait, pour tout $a \geqslant a_0$,
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{k^2}} \leqslant \frac{1}{100}.$$
2. *Dans toute la suite, on supposera $a \geqslant a_0$.*
Soit p entier, $p \geqslant 1$. Montrer que l'on a, pour tout z vérifiant $|z| = a^{2p}$,
$$\frac{1}{a^{p^2}} \left| f(z) - \frac{z^p}{a^{p^2}} \right| \leqslant \frac{2}{100}.$$
En déduire que $f(z)$ a p zéros, $z_1, \dots, z_p$ dans le disque ouvert $D(0, a^{2p})$. Montrer que, quel que soit $p \geqslant 1$, z_p a les propriétés suivantes :
(a) $a^{2(p-1)} < |z| < a^{2p}$,
(b) z_p est un zéro simple,
(c) z_p est un réel négatif.
Pour établir (c), on pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 904 Soit f une fonction holomorphe et bornée dans le disque ouvert $D(0,1)$, vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On pose $M = \sup_{|z|<1} |f(z)|$.

1. Montrer que les modules des coefficients du développement de f en série entière au voisinage de 0 sont majorés par M.
2. Utiliser 1. pour montrer que, si l'on pose $g(z) = f(z) - z$, on a
$$|g'(z)| \leqslant \frac{M}{(1-r)^2} - M, \text{ si } |z| \leqslant r < 1.$$
En déduire l'existence d'un réel ρ, $0 < \rho < 1$, *dépendant seulement de M*, tel que l'on ait
$$|g'(z)| < 1 \text{ si } |z| < \rho.$$
3. Montrer alors que la restriction de f au disque ouvert $D(0,\rho)$ est injective (on pourra, pour z_1 et z_2 appartenant au disque ouvert $D(0,\rho)$, exprimer $g(z_1) - g(z_2)$ sous forme d'une intégrale).

57 Examen VC juin 96

Exercice 905 (Question de cours) Montrer en utilisant le lemme de Schwarz que l'on énoncera soigneusement, que tout automorphisme du disque unité $D = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| < 1\}$ est de la forme
$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$
où $\theta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. On admettra que g_a défini par $g_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$, pour $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, est un automorphisme de D.

Exercice 906 1. Montrer que le produit infini
$$P(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \frac{z}{2n}}{1 + \frac{z}{2n-1}}$$
converge normalement sur tout compact de $U = \{z \in \mathbb{C} | \ \Re e z > 0\}$.

2. On pose $f(z) = zP(z)$. Calculer $f(1)$. On rappelle la formule

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

3. On pose $g = f'/f$. Ecrire g sous forme de série. Montrer que $g(z) + g(z+1) = 1/z$ (on travaillera sur les sommes partielles). En déduire que l'on a $f(z)f(z+1) = \frac{2}{\pi}z$.

Exercice 907 Soit α un nombre réel, $\alpha > 0$.

I Pour tout z dans $\mathbb{C}$ et tout t dans $\mathbb{R}$, on pose

$$f(z,t) = \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - z}.$$

1. (a) On note $[1, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} | \ x \geqslant 1\}$ et $\Omega = \mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$. Soit K un compact inclus dans Ω. Démontrer brièvement qu'il existe un réel c, $c > 0$, tel que l'on ait $\inf_{z\in K} \inf_{x\in[1,+\infty[} |x - z| \geqslant c$.
   (b) Montrer que la fonction F définie par

   $$F(z) = \int_0^{+\infty} f(z,t) \ dt$$

   est holomorphe dans Ω.
2. (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)^\alpha}$.
   (b) Montrer que l'on a, pour tout z, $|z| < 1$,

   $$F(z) = F(0) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)^\alpha}.$$

   (c) La fonction F admet-elle un prolongement holomorphe au voisinage de 1 ?

II Dans toute cette partie, t appartient à $\mathbb{C}$.

1. Soit a un réel, $0 < a < \pi$ et R un réel, $R > 0$. On note $Q(a,R) = \{t \in \mathbb{C} | \ 0 < \Re e t < R, |\Im m t| < a\}$ et $Q(a) = \{t \in \mathbb{C} | \ 0 < \Re e t, |\Im m t| < a\}$. Soit $\operatorname{Log} z$ la détermination du logarithme de z holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. On a donc $\operatorname{Log} z = \ln |z| + i\operatorname{Arg} z$, avec $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$.
   (a) Déterminer $S(a,R) = \{z \in \mathbb{C} | \ \operatorname{Log} z \in Q(a,R)\}$ et $S(a) = \{z \in \mathbb{C} | \ \operatorname{Log} z \in Q(a)\}$. Faire des dessins. On note, pour t dans $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, $t^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\operatorname{Log} t}$. Déterminer, pour z dans $S(a)$, le pôle de la fonction

   $$t \mapsto f(z,t) = \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - z}$$

   situé dans la bande $Q(a)$. Quel est le résidu de cette fonction en ce pôle ?
   (b) Pour tout z dans $S(a,R)$, calculer en fonction de z

   $$\int_{\partial Q_\varepsilon(a,R)} f(z,t) \ dt$$

   où $\partial Q_\varepsilon(a,R)$ désigne le chemin parcouru dans le sens positif dont l'image dans $\mathbb{C}$ est la frontière du domaine $Q(a,R) \setminus \{t \in \mathbb{C} | \ |t| < \varepsilon\}$. Quelle est la limite lorsque ε tend vers 0 de $\int_{\partial Q_\varepsilon(a,R)} f(z,t) \ dt$?
2. Soit Γ_a le chemin dont l'image Γ_a^* et le sens de parcours sont représentés ci-dessous.
   On pose

   $$F_a(z) = \int_{\Gamma_a} f(z,t) \ dt.$$

   (a) En reprenant brièvement les idées utilisées dans I.1., montrer que F_a est holomorphe dans $\mathbb{C}$ privé d'un chemin que l'on précisera et que l'on dessinera.

(b) Montrer que, si z appartient à $S(a)$ et $\Im m z < 0$, on a $F_a(z) = F(z)$ (on pourra intégrer $f(z,t)$ le long d'un contour bien choisi).

(c) Soit Γ_a le chemin dont l'image Γ^*_{-a} et le sens de parcours sont représentés ci-dessous.
On pose

$$F_{-a}(z) = \int_{\Gamma_{-a}} f(z,t)\ dt.$$

Montrer brièvement que, si z appartient à $S(a)$ et $\Im m z > 0$, on a $F_{-a} = F(z)$.

(d) Montrer, en utilisant II.1.(b), que, pour tout z dans $S(a)$, on a

$$F_{-a}(z) - F_a(z) = 2i\pi \frac{(\operatorname{Log} z)^{\alpha-1}}{z}.$$

En déduire que $F(z)$ n'a pas de limite lorsque z tend vers un point de la demi-droite réelle $]1, +\infty[$.

58 Examen VC septembre 96

Exercice 908 (Question de cours) En énonçant avec précision les différentes formes du principe du maximum utilisées, démontrer le lemme de Schwarz.
Application : Soit F une fonction holomorphe dans $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$, nulle à l'origine et vérifiant $\Re e F(z) \leqslant 1$, pour tout z dans $D(0,1)$. Montrer que la fonction

$$f = \frac{F}{2-F}$$

est bornée par 1 dans $D(0,1)$. En déduire une majoration de $|F(z)|$ en fonction de $|z|$. Déterminer F en supposant de plus que l'on a $F'(0) = 2$.

Exercice 909 Calculer, en utilisant le contour (I) ci-contre, l'intégrale

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^7} dx$$

et, en utilisant le contour (II) ci-contre, l'intégrale

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} dx.$$

Exercice 910 Si ρ est un réel strictement positif, on note D_ρ le disque ouvert de centre 0 et de rayon ρ et γ_ρ le chemin $t \mapsto \rho e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
On considère une fonction f holomorphe sur D_1, telle que l'on ait $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. Pour tout $\rho \in]0,1[$, on pose $m(\rho) = \inf\limits_{|z|=\rho} |f(z)|$.

1. Montrer qu'il existe un nombre réel $r \in]0,1[$ tel que, pour tout $\rho \in]0,r[$, on ait

$$m(\rho) > 0.$$

Dans toute la suite, on suppose que r et ρ sont fixés et qu'ils vérifient les conclusions de 1.

2. Montrer que, pour tout nombre complexe w vérifiant $|w| < m(\rho)$, la fonction

$$z \mapsto f(z) - w$$

a un seul zéro, noté $g(w)$, dans D_ρ.

3. Montrer que l'on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{z f'(z)}{f(z) - w} dz = g(w).$$

4. Montrer que, pour tout w vérifiant $|w| < m(\rho)$, on a

$$g(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n w^n$$

et l'on exprimera les coefficients c_n au moyen d'intégrales faisant intervenir f et f'.

Exercice 911 Soit g une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$. On suppose que g n'est pas égale à la fonction constante $g(z) = i$ et que g vérifie l'équation différentielle

$$g'(z) = g^2(z) = -1.$$

On considère la fonction f définie par

$$f(z) = \frac{g(z)+i}{g(z)-i}.$$

On note P l'ensemble des pôles de f et $U = \mathbb{C} \setminus P$.
Quelle équation différentielle vérifie f ?
Déterminer $f(z)$ sur U, puis sur $\mathbb{C}$. En déduire que, si l'on suppose de plus que g a un pôle en 0, l'on a

$$g(z) = \mathrm{cotan} z.$$

Exercice 912 On se propose de calculer, à l'aide du théorème des résidus, la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\pi t^2\right)\, dt.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$; en intégrant la fonction $g(z) = \exp\left(-\pi z^2\right)$ sur le rectangle de sommets $-R$, R, $R + ia$, $-R + ia$ $(R > 0)$, montrer que
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\pi(t + ia)^2\right)\, dt.$$

   On pose : $f(z) = \exp\left(i\pi z^2\right) \tan\left(\pi z\right)$.
2. Quels sont les pôles de f ? Préciser leur ordre.

   Soit $R > 0$; on considère le parallélogramme Γ_R de sommets $A = R + 1 + iR$, $B = R + iR$, $C = -R - iR$ et $D = -R + 1 - iR$, orienté dans le sens direct.
3. Montrer que
$$\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 2e^{-i\pi/4}.$$
4. (a) Montrer que
$$\forall t \in [0, 1],\ \left|\tan\left(\pi(R + t + iR)\right)\right| \leqslant \coth\left(\pi R\right).$$
   (b) En déduire que l'intégrale de f sur le segment orienté $[A, B]$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$.
   (c) Montrer de même que l'intégrale de f sur $[C, D]$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$.
5. On note J et K les intégrales de f sur les segments orientés $[B, C]$ et $[D, A]$.
   (a) Montrer que
$$J + K = (-1 + i) \int_{-R}^{R} e^{-2\pi t^2} \left(e^{-2\pi t + 2i\pi t} - 1\right)\, dt.$$
   (b) En déduire que, quand R tend vers $+\infty$, $J + K$ tend vers
$$L = e^{3i\pi/4} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(u^2 + u\sqrt{2} - iu\sqrt{2})}\, du - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2}\, du \right).$$
   (c) l'aide de la question 1. et d'un changement de variable, vérifier que $L = 2Ie^{-i\pi/4}$.

Conclure.

Exercice 913 Soit c un point singulier essentiel d'une fonction f holomorphe dans un disque pointé $U = \{z \in \mathbb{C} |\ 0 < |z - c| < \rho\}$. Le but de l'exercice est de démontrer que f n'est injective dans aucun voisinage pointé de c.

1. Montrer que pour tout $\gamma \in \mathbb{C}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $z' \in U$ et $\varepsilon' > 0$ tels que
$$\overline{D(f(z'), \varepsilon')} \subset f(U) \cap D(\gamma, \varepsilon),$$
   où $D(a, r)$ désigne le disque ouvert de centre a et de rayon r. On pourra utiliser le théorème de Casorati-Weierstrass, puis remarquer que $f(U)$ est ouvert (la fonction f est holomorphe donc ouverte).

2. Pour $n \geqslant 1$, soit U_n le disque pointé $\{z \in \mathbb{C} |\ 0 < |z-c| < \rho/n\}$. Soient $\gamma_0 \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon_0 > 0$. Construire par récurrence une suite strictement décroissante $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ de réels strictement positifs et une suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$, $z_n \in U_{n-1}$, vérifiant

$$\begin{array}{rcl} \overline{D(f(z_1), \varepsilon_1)} & \subset & f(U) \cap D(\gamma_0, \varepsilon_0), \\ \overline{D(f(z_{n+1}), \varepsilon_{n+1})} & \subset & f(U_{n+1}) \cap D(f(z_n), \varepsilon_n) \ \text{ pour } n \geqslant 1. \end{array}$$

En déduire qu'il existe $a \in D(\gamma_0, \varepsilon_0)$ et une suite $(c_n)_{n\geqslant 0}$ de points de U distincts deux à deux tels que

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = c \ \text{ et } \ \forall n, \ \ f(c_n) = a.$$

Conclure.

59 Examen VC janvier 98

Exercice 914 Les parties I et II sont indépendantes. Les parties III et IV utilisent les résultats établis dans II.

I

1. Déterminer l'ensemble des zéros de la fonction sin dans $\mathbb{C}$. Quel est leur ordre de multiplicité ?
2. On note, pour tout $n \geqslant 0$, γ_n^* le bord du carré dans $\mathbb{C}$ de sommets $(n+\frac{1}{2})\pi(1+i)$, $(n+\frac{1}{2})\pi(-1+i)$, $(n+\frac{1}{2})\pi(-1-i)$, $(n+\frac{1}{2})\pi(1-i)$. Montrer que, si $z \in \gamma_n^*$, on a $|\sin z|^2 \geqslant 1$.

II Soit f une fonction entière dans $\mathbb{C}$. On note $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, pour tout z dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $r > 0$, on a

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Re e \left(f(re^{i\theta}\right) r^{-n} e^{-in\theta} d\theta.$$

On rappelle que $\Re e f = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$.
On note, pour $n \geqslant 1$, φ_n un réel vérifiant $|a_n| = a_n e^{i\varphi_n}$. En déduire que l'on a, pour tout $n \geqslant 1$,

$$|a_n| = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Re e \left(f(re^{i(\theta+\frac{1}{n}\varphi_n)}\right) r^{-n} \left(1 + e^{-in\theta}\right) d\theta.$$

2. On suppose $f(0) = 0$. Montrer que l'on a, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $r > 0$,

$$|a_n| = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Re e \left(f(re^{i(\theta+\frac{1}{n}\varphi_n)}\right) r^{-n} e^{-in\theta} d\theta$$

et donc

$$|a_n| r^n \leqslant 2 \sup_{|z|=r} \Re e f(z).$$

3. On note toujours f une fonction entière dans $\mathbb{C}$. On suppose maintenant qu'il existe une suite $(r_j)_{j\geqslant 0}$ de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$ avec j et qu'il existe des constantes $A > 0$ et $\beta > 0$ telles que l'on ait, pour tout $j \geqslant 0$ et tout θ réel,

$$\Re e f(r_j e^{i\theta}) \leqslant A r_j^{\beta}.$$

En déduire que f est un polynôme de degré au plus β (on étudiera d'abord le cas où $f(0) = 0$).

III Soit g une fonction entière nulle seulement aux points $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et telle que chacun de ces zéros soit simple. On suppose de plus qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout z dans $\mathbb{C}$, on ait $|g(z)| \leqslant \exp(C|z|)$.

1. Montrer que $\frac{g}{\sin}$ est une fonction entière qui ne s'annule pas dans $\mathbb{C}$. En déduire, en énonçant avec précision le théorème du cours utilisé, qu'il existe une fonction h entière telle que, pour tout z dans $\mathbb{C}$, on ait

$$\frac{g(z)}{\sin z} = \exp h(z).$$

2. On note C_n le chemin orienté positivement et défini, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, par $C_n(t) = (n + \frac{1}{2})\pi e^{it}$ et C_n^* son image. Montrer que
$$\sup_{z \in C_n^*} \left| \frac{g(z)}{\sin z} \right| \leqslant \sup_{z \in \gamma_n^*} \left| \frac{g(z)}{\sin z} \right|$$
(où γ_n^* a été défini en I.2. En déduire que l'on a, pour tout z de C_n^*,
$$\Re e h(z) \leqslant C\sqrt{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$$
et qu'il existe des nombres complexes λ et μ tels que, pour tout z dans $\mathbb{C}$, on ait
$$g(z) = \lambda \sin z \exp(\mu z).$$

IV Soit α un nombre complexe non nul. On se propose de montrer que l'équation
$$\alpha z - \exp z = 0$$
a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

1. On raisonne par l'absurde. Montrer qu'alors il existe une fonction δ entière telle que l'on ait, pour tout z dans $\mathbb{C}$,
$$\alpha z - \exp z = \exp \delta(z).$$
2. Etablir, pour tout z dans $\mathbb{C}$,
$$|\alpha z - \exp z| \leqslant (|\alpha| + 1) \exp |z|.$$
En déduire qu'il existe des nombres complexes ρ et σ tels que, pour tout z dans $\mathbb{C}$, on ait
$$\alpha z - \exp z = \rho \exp(\sigma z).$$
Conclure.

Septième partie

Corrections

Correction 28 1.) La nécessité des conditions (i), (ii), (iii) résulte des propriétés d'une norme. En effet, si $x \in K$, $||-x|| = ||x|| \leqslant 1$ et $-x \in K$ ce qui prouve (i).

K est fermé car plus généralement toute boule fermée d'un espace métrique est fermée ; et K est borné par définition (un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est borné s'il est contenu dans une boule fermée). Enfin, K est convexe car, si $x, y \in K$ et $\lambda \in [0,1]$, $||(1-\lambda)x + \lambda y|| \leqslant (1-\lambda)||x|| + \lambda||y|| \leqslant 1$ et $(1-\lambda)x + \lambda y \in K$.

0 est un point intérieur à K : par exemple $B(0, \frac{1}{2}) \subset K$ et K contient un voisinage de 0 (toute boule fermée de rayon > 0 est un voisinage de son centre).

2. Soit K vérifiant les propriétés (i), (ii), (iii). Il nous faut montrer que $p(x)$ est bien définie pour tout x ; que p est une norme et que K est la boule unité fermée qui lui est associée.

Si $x = 0$, $\frac{x}{a} \in K$ pour tout $a > 0$ et $p(0) = 0$. Si $x \neq 0$, l'ensemble $\{a > 0\ ;\ \frac{x}{a} \in K\}$ est minoré ; s'il est non vide il admettra une borne inférieure. Or 0 est point intérieur à K ; il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(0, \varepsilon) \subset K$ et pour a assez grand, $\frac{||x||}{a} \leqslant \varepsilon$, en particulier $\frac{x}{a} \in K$, et l'ensemble est non vide.

Vérifions les trois axiomes d'une norme.

• Par définition d'une borne inférieure, $p(x) = 0 \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ 0 < a < \varepsilon$ tel que $\frac{x}{a} \in K$. K étant borné, on peut supposer que $K \subset \overline{B}(0, R)$, de sorte que $||\frac{x}{a}|| \leqslant R$ ou $||x|| \leqslant \varepsilon R$, ceci pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui implique $x = 0$.

• Soit $\lambda > 0$; $p(\lambda x) = \inf\{a > 0\ ;\ \frac{\lambda x}{a} \in K\} = \inf\{\lambda b > 0\ ;\ \frac{x}{b} \in K\}$ en posant $a = \lambda b$, et $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.
Il suffit de montrer que $p(-x) = p(x)$ pour avoir la propriété d'homogénéité. Mais $p(-x) = \inf\{a > 0\ ;\ -\frac{x}{a} \in K\} = \inf\{a > 0\ ;\ \frac{x}{a} \in -K\} = p(x)$ car K est symétrique.

• En utilisant la définition d'une borne inférieure, on va montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) + 2\varepsilon$ ce qui donnera le résultat.

Donc, fixons $\varepsilon > 0$; on peut trouver $a > 0$ tel que $p(x) \leqslant a < p(x) + \varepsilon$ et $\frac{x}{a} \in K$, puis $b > 0$ tel que $p(y) \leqslant b < p(y) + \varepsilon$ et $\frac{y}{b} \in K$. Si $\frac{x+y}{a+b} \in K$, alors $p(x+y) \leqslant a + b$ par propriété de la borne inf et on aura prouvé $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) + 2\varepsilon$.
Mais $\frac{x+y}{a+b}$ s'écrit $\frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}$, combinaison convexe de $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$, et K est supposé convexe. La preuve de l'inégalité triangulaire est ainsi achevée.

Il nous reste à établir $K = \{x\ ;\ p(x) \leqslant 1\}$.
Si $x \in K$ et $a = 1$, $\frac{x}{a} \in K$ ce qui implique $p(x) \leqslant 1$. Réciproquement supposons $p(x) \leqslant 1$; on peut supposer $x \neq 0$. Si $p(x) < 1$, il existe $p(x) \leqslant a < 1$ tel que $\frac{x}{a} \in K$; mais $x = a\frac{x}{a} + (1-a)0$ est encore dans K.
Si $p(x) = 1$ il existe (a_n) suite de nombres positifs tels que $\frac{x}{a_n} \in K$ pour tout n et tendant vers 1. Mais K étant fermé, $x = \lim \frac{x}{a_n} \in K$.

Correction 36 1. L'ensemble $\emptyset$ est réunion vide de demi-droites. Il est clair que $\mathbb{C}$ est dans $\mathcal{T}$ si, lorsque $z_0 = 0$, toute demi-droite $[0, \rightarrow [$ est admissible (ce qui aurait dû être précisé dans l'énoncé...Excuses !) ; par ailleurs cette famille d'ensembles est bien stable par réunion quelconque. Remarquons que si $U \in \mathcal{T}$, $z \in U \Longleftrightarrow [z, \rightarrow [\subset U$ (c'est-à-dire les demi-droites forment une base d'ouverts). En effet si $z \in U$ il existe z' tel que $z \in [z', \rightarrow [\subset U$ et a fortiori $[z, \rightarrow [\subset U$. Ainsi la famille est stable par intersection finie : si $z \in U \cap U'$, $[z, \rightarrow [\subset U \cap U'$ et $U \cap U' \in \mathcal{T}$. On a bien une topologie.

Cette topologie n'est pas séparée puisque, si $z \in [z', \rightarrow [$, tout voisinage de z' contient z.

2. La topologie n'étant pas même quasi-séparée, un singleton peut ne pas être fermé. Soit z_0 ; $z \in \overline{\{z_0\}}$ si et seulement si tout voisinage de z rencontre z_0 ; puisque tout voisinage de z contient $[z, \rightarrow [$, c'est équivalent à $z_0 \in [z, \rightarrow [$ ou encore $z \in [0, z_0]$.

$\{0\}$ est le seul singleton fermé.

3. On déduit de ce qui précède que si $A \subset X$, $\overline{A} = \cup_{z \in A}[0, z]$. En effet si $z \in A$, $\overline{A}$ contient $\overline{\{z\}}$ et donc le segment $[0, z]$; réciproquement, si $z' \in [0, z]$ avec $z \in A$, $[z', \rightarrow [$, et donc tout voisinage de z', rencontre A ; ainsi $z' \in \overline{A}$.

Supposons A étoilé par rapport à 0 ; A contient $\cup_{z \in A}[0, z] = \overline{A}$ et A est fermé.

Réciproquement supposons A fermé ; $A = \cup_{z \in A}[0, z]$ et en particulier A est étoilé par rapport à 0.

Correction 149 L'ensemble B est connexe si et seulement si toute fonction continue $f : B \to \{0,1\}$ est constante. Soit alors $f : B \to \{0,1\}$ une fonction continue et montrons qu'elle est constante.
Observations préliminaires :

1. Pour tout $p \in B$ il existe un voisinage V_p de p sur lequel f est constante (car f est continue à valeurs dans un espace discret).
2. La restriction de f à tout ensemble B_a est constante (B_a est connexe).

Notons $\mathcal{E} = \{a \in \mathbb{R}\ ;\ f_{|B_a} \equiv 0\}$ et montrons :

$\mathcal{E}$ est un ouvert : Soit $a \in \mathcal{E}$, $p \in B_a$. Par (1), il existe V_p un voisinage de p sur lequel f est constante. La projection de V_p sur l'axe des x est un voisinage Q_a de a dans $\mathbb{R}$. Il est facile de voir que $f_{|Q_a} \equiv f(a) = 0$ ce qui démontre que $\mathcal{E}$ est un ouvert.
$\mathcal{E}$ est un fermé : Considérons $\mathcal{F} = \mathbb{R} \setminus \mathcal{E} = \{a \in \mathbb{R}\ ; f_{|B_a} \equiv 1\}$. Il suffit alors d'appliquer le raisonnement précédent pour voir que $\mathcal{F}$ est un ouvert.

Conclusion : L'ensemble $\mathcal{E}$ étant un sous-ensemble ouvert et fermé de $\mathbb{R}$, on a $\mathcal{E} = \emptyset$ ou $\mathcal{E} = \mathbb{R}$. Par conséquent, la fonction f est constante.

Correction 227 1. Remarquons tout d'abord que si $0 \in K$, l'application u (linéaire) admet 0 comme point fixe dans K.
On suppose donc $0 \notin K$. Si $x \in K$, $u^j(x) \in K$ pout tout $0 \leqslant j \leqslant n-1$ et $S_n(x) \in K$ comme combinaison convexe de ces n points de K.

2. Soit $x \in K$. Par 1., $S_{n_1} \circ \cdots \circ S_{n_k}(x) \in K$ et s'écrit $S_{n_1}(S_{n_2} \circ \cdots \circ S_{n_k})(x)$: il appartient donc à $S_{n_1}(K)$. Par ailleurs, comme les applications linéaires S_{n_j} commutent entre elles (ce sont des polynômes en u), il en va de même pour $S_{n_2}, \cdots, S_{n_k}$ d'où l'inclusion.
Chaque S_n étant continue et K compact, les ensembles $S_n(K)$ sont eux aussi compacts et inclus dans K ; si $A = \cap_{n \geqslant 1} S_n(K)$ était vide, par la propriété de l'intersection finie, on pourrait trouver des entiers $n_1, n_2, \ldots, n_k$ en nombre fini tels que $S_{n_1}(K) \cap S_{n_2}(K) \cap \cdots \cap S_{n_k}(K) = \emptyset$. Or cette intersection contient l'image de K par $S_{n_1} \circ \cdots \circ S_{n_k}$ et ne peut être vide.
3. Soit $a \in A$; pour tout n il existe $x_n \in K$ tel que $a = S_n(x_n)$. On va montrer que $u(a) = a$:

$$\begin{aligned} u(a) - a &= u(S_n(x_n)) - S_n(x_n) \\ &= \frac{(n+1)S_{n+1}(x_n)}{n} - \frac{x_n}{n} - S_n(x_n) \\ &= \frac{(n+1)S_{n+1}(x_n) - nS_n(x_n) - x_n}{n} \\ &= \frac{u^n(x_n) - x_n}{n} \end{aligned}$$

Mais $||u^n(x_n) - x_n|| \leqslant \mathrm{diam} K = d < +\infty$ puisque K compact est borné, et $||u(a) - a|| \leqslant \frac{d}{n}$ pour tout n est donc nul.

Correction 307 1. Puisque $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, il est clair que φ est $\mathbb{R}$-linéaire dès qu'elle est $\mathbb{C}$-linéaire et qu'elle vérifie en particulier $\varphi(ix) = i\varphi(x)$ pour tout $x \in E$.
Supposons maintenant φ $\mathbb{R}$-linéaire, vérifiant $\varphi(ix) = i\varphi(x)$ pour tout $x \in E$. Par hypothèse, φ est additive et $\varphi(t.x) = t\varphi(x)$ pour tout réel t et $x \in E$. D'autre part, si $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$,
$\varphi((\alpha + i\beta)x) = \varphi(\alpha x) + \varphi(i\beta x)$ par additivité car E est un $\mathbb{C}$-ev,
$= \varphi(\alpha x) + i\varphi(\beta x)$ par hypothèse sur φ,
$= \alpha\varphi(x) + i\beta\varphi(x)$ car $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, elle se représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

De même, $\mathcal{I}$, la multiplication par i comme application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ se représente dans l'identification de $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et la condition $\varphi(ix) = i\varphi(x)$ signifie que φ commute avec $\mathcal{I}$ ou que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Ceci est réalisé si et seulement si $a = d$, et $b = -c$.

b) f $\mathbb{C}$-différentiable au point $z = x + iy \in \mathbb{C}$ signifie :

$$f(z+h) - f(z) - f'(z).h = h\varepsilon(h),$$

avec $h \in \mathbb{C}$ et $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ (l'application $\mathbb{C}$-linéaire tangente est ici la multiplication dans $\mathbb{C}$ par $f'(z)$) ; traduit en variables réelles cela signifie :

$$\begin{cases} u(x+h_1, y+h_2) - u(x,y) &= ah_1 - bh_2 + ||h||\varepsilon(h) \\ v(x+h_1, y+h_2) - u(x,y) &= bh_1 + ah_2 + ||h||\varepsilon(h) \end{cases}$$

avec $f'(z) = a + ib$ et $h = h_1 + ih_2$; f est donc $\mathbb{R}$-différentiable au point (x, y) et sa matrice jacobienne en ce point vaut

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Réciproquement supposons f $\mathbb{R}$-différentiable en (x, y) ; ainsi

$$f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) - f'(x,y).h = ||h||\varepsilon(h),$$

avec $h \in \mathbb{R}^2$ et $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$; la matrice de $f'(x, y)$ est la matrice jacobienne

$$\begin{pmatrix} \partial_1 u(x,y) & \partial_2 u(x,y) \\ \partial_1 v(x,y) & \partial_2 v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

et f est $\mathbb{C}$-différentiable en (x, y) si et seulement si $f'(x, y)$ est $\mathbb{C}$-linéaire ou $a = d$ et $b = -c$, ce qui se traduit par les conditions de Cauchy :

$$\partial_1 u(x,y) = \partial_2 v(x,y),\ \partial_2 u(x,y) = -\partial_1 v(x,y).$$

Il est facile de voir que les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: $f_1(z) = e^x$, $f_2(z) = x^2 + y^2$, $f_3(z) = e^{x-iy}$ sont $\mathbb{R}$-différentiables, et que les conditions de Cauchy ne sont jamais vérifiées pour f_1 et f_3, ne sont vérifiées qu'en 0 pour f_2.

2. La fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ peut s'écrire $g_1 + ig_2$ où $g_1 = \sqrt{u^2 + v^2}$ et $g_2 = 0$ si $f = u + iv$. Supposons que g soit $\mathbb{C}$-différentiable en $z = x + iy$: elle remplit donc les conditions de Cauchy en ce point et $\partial_1 g_1(x,y) = \partial_2 g_1(x,y) = 0$, soit

$$\begin{cases} u(x,y)\ \partial_1 u(x,y) + v(x,y)\ \partial_1 v(x,y) &= 0, \\ u(x,y)\ \partial_2 u(x,y) + v(x,y)\ \partial_2 v(x,y) &= 0. \end{cases}$$

Mais comme f est $\mathbb{C}$-différentiable en $z = x + iy$, $\partial_1 u(x,y) = \partial_2 v(x,y)$, $\partial_2 u(x,y) = -\partial_1 v(x,y)$, et le système devient

$$\begin{cases} u(x,y)\ \partial_1 u(x,y) + v(x,y)\ \partial_1 v(x,y) &= 0, \\ -u(x,y)\ \partial_1 v(x,y) + v(x,y)\ \partial_1 u(x,y) &= 0. \end{cases}$$

C'est un système de Cramer puisque le déterminant $u^2(x,y) + v^2(x,y) = |f(z)|^2 \neq 0$; ainsi $\partial_1 u(x,y) = \partial_1 v(x,y) = \partial_2 u(x,y) = \partial_2 v(x,y) = 0$ et $f'(z) = 0$.