Espaces vectoriels de dimension finie

1 Base

Exercice 1 Montrer que les vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 2
1. Montrer que les vecteurs $x_1 = (0,1,1)$, $x_2 = (1,0,1)$ et $x_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les composantes du vecteur $x = (1,1,1)$.
2. Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille libre, qui n'est pas génératrice.
3. Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille génératrice, mais qui n'est pas libre.

Exercice 3 Vrai ou faux ? On désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
1. Si les vecteurs x, y, z sont deux à deux non colinéaires, alors la famille x, y, z est libre.
2. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_p$ une famille de vecteurs. Si aucun n'est une combinaison linéaire des autres, la famille est libre.

Exercice 4 Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants forment-ils une base ? Sinon décrire le sous-espace qu'ils engendrent.
1. $v_1 = (1,1,1), v_2 = (3,0,-1), v_3 = (-1,1,-1)$.
2. $v_1 = (1,2,3), v_2 = (3,0,-1), v_3 = (1,8,13)$.
3. $v_1 = (1,2,-3), v_2 = (1,0,-1), v_3 = (1,10,-11)$.

Exercice 5
1. Montrer qu'on peut écrire le polynôme $F = 3X - X^2 + 8X^3$ sous la forme $F = a + b(1-X) + c(X - X^2) + d(X^2 - X^3)$ (calculer a, b, c, d réels), et aussi sous la forme $F = \alpha + \beta(1+X) + \gamma(1+X+X^2) + \delta(1+X+X^2+X^3)$ (calculer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ réels).
2. Soit $\mathcal{P}_3$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant 3$. Vérifier que les ensembles suivants sont des bases de $\mathcal{P}_3$: $B_1 = \{1, X, X^2, X^3\}$, $B_2 = \{1, 1-X, X-X^2, X^2-X^3\}$, $B_3 = \{1, 1+X, 1+X+X^2, 1+X+X^2+X^3\}$.

Exercice 6 Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\0\\1\end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7
1. Montrer que les vecteurs $\mathbf{w}_1 = (1,-1,i), \mathbf{w}_2 = (-1,i,1), \mathbf{w}_3 = (i,1,-1)$ forment une base de $\mathbb{C}^3$.
2. Calculer les composantes de $\mathbf{w} = (1+i, 1-i, i)$ dans cette base.

2 Dimension

Exercice 8 Si E est un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces de E, montrer que : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Exercice 9 Montrer que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.

Exercice 10 On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soient E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et F celui engendré par e_4, e_5. Calculer les dimensions respectives de E , F , $E \cap F$, $E + F$.

Exercice 11 Soient E et F de dimensions finies et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.
2. En déduire que $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$.

Espaces vectoriels de dimension finie

Indication 3

1. Faux.
2. Vrai.

Indication 8 Partir d'une base de $F \cap G$ et compléter cette base

Indication 9 On peut utiliser des familles libres.

Espaces vectoriels de dimension finie

Correction 1 det $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$ donc la famille $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont donc $(1/3, -1/3, 1/3)$.
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont donc $(1/3, -1/3, -2/3)$.
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(2/3, -2/3, -1/3)$.

Correction 2
1. Le vecteur $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$. Donc dans la base (x_1, x_2, x_3) le coordonnées de x sont $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
2. Par exemple la famille $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ mais pas génératrice.
3. La famille $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$ est génératrice dans $\mathbb{R}^3$ mais pas libre.

Correction 3
1. Faux. Par exemple dans $\mathbb{R}^3$, $x = (1,0,0)$, $y = (0,1,0)$, $z = (1,1,0)$.
2. Vrai. Soit une combinaison linéaire nulle $\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_p x_p = 0$. Supposons qu'un des coefficient est non nul : par exemple $\lambda_1 \neq 0$. Alors on écrit $x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x_2 - \cdots - \frac{\lambda_p}{\lambda_1}x_p$. Donc x_1 est une combinaison linéaire de $\{x_2, \ldots, x_p\}$. Ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé, donc tous les coefficients sont nuls. Donc $\{x_1, \ldots, x_p\}$ est une famille libre.

Correction 4
1. C'est une base.
2. Ce n'est pas une base : $v_3 = 4v_1 - v_2$. Donc l'espace $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.
3. C'est une base.

Correction 5
1. On trouve $a = 10, b = -10, c = -7, d = -8$. Puis $\alpha = -3, \beta = 4, \gamma = -9, \delta = 8$.
2. Plus généralement on montre qu'une famille de polynômes $\{P_k\}_{k=1,\ldots,n}$ avec $\deg P_i = i$ forme une base de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_n$ de polynômes de degré $\leqslant n$.

Correction 6 C'est une base pour $t \neq \pm 1$.

Correction 7
1. C'est bien une base.

2. On cherche $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $aw_1+bw_2+c_3w_3 = w$. Il s'agit donc de résoudre le système :

$$\begin{cases} a - b + ic & = 1 + i \\ -a + ib + c & = 1 - i \\ ia + b - c & = i \end{cases}$$

On trouve $a = 0$, $b = \frac{1}{2}(1 - i)$, $c = \frac{1}{2}(1 - 3i)$. Donc les coordonnées de w dans la base (w_1, w_2, w_3) sont $(0, \frac{1}{2}(1 - i), \frac{1}{2}(1 - 3i))$.

Correction 8 1. $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E donc est de dimension finie. Soit $(e_1, \dots e_k)$ une base de $F \cap G$ avec $k = \dim F \cap G$.

$(e_1, \dots e_k)$ est une famille libre dans F donc on peut la compléter en une base de F par le théorème de la base incomplète. Soit donc $(f_1, \dots, f_\ell)$ des vecteurs de F tels que $(e_1, \dots e_k, f_1, \dots, f_\ell)$ soit une base de F. Nous savons que $k + \ell = \dim F$. Remarquons que les vecteurs f_i sont dans $F \setminus G$.

Nous repartons de la famille $(e_1, \dots e_k)$ mais cette fois nous la complétons en une base de G : soit donc $(g_1, \dots, g_m)$ des vecteurs de G tels que $(e_1, \dots e_k, g_1, \dots, g_m)$ soit une base de G. Nous savons que $k + m = \dim G$. Remarquons que les vecteurs g_i sont dans $G \setminus F$.

2. Montrons que $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_k, f_1, \dots, f_\ell, g_1, \dots, g_m)$ est une base de $F + G$.

C'est une famille génératrice car $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots e_k, f_1, \dots, f_\ell) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$ et $G = \mathrm{Vect}(e_1, \dots e_k, g_1, \dots, g_m) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$. Donc $F + G \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$.

C'est une famille libre : soit une combinaison linéaire nulle :

$$a_1e_1 + \dots a_ke_k + b_1f_1 + \dots b_\ell f_\ell + c_1g_1 + \dots c_mg_m = 0.$$

Notons $e = a_1e_1 + \dots + a_ke_k$, $f = b_1f_1 + \dots + b_\ell f_\ell$, $g = c_1g_1 + \dots + c_mg_m$. Donc la combinaison linéaire devient :

$$e + f + g = 0.$$

Donc $g = -e - f$, or e et f sont dans F donc g appartient à F. Or les vecteurs g_i ne sont pas dans F. Donc $g = c_1g_1 + \dots + c_mg_m$ est nécessairement le vecteur nul. Nous obtenons $c_1g_1 + \dots + c_mg_m = 0$ c'est donc une combinaison linéaire nulle pour la famille libre $(g_1, \dots, g_m)$. Donc tous les coefficients $c_1, \dots, c_m$ sont nuls.

Le reste de l'équation devient $a_1e_1+\dots+a_ke_k+b_1f_1+\dots+b_\ell f_\ell = 0$, or $(e_1, \dots e_k, f_1, \dots, f_\ell)$ est une base de F donc tous les coefficients $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_\ell$ sont nuls.

Bilan : tous les coefficients sont nuls donc la famille est libre. Comme elle était génératrice, c'est une base.

3. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de $F + G$ alors la dimension de $F + G$ est le nombre de vecteurs de la base $\mathcal{B}$:

$$\dim(F + G) = k + \ell + m.$$

Or $k = \dim F \cap G$, $\ell = \dim F - k$, $m = \dim G - k$, donc

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Correction 9 Soit E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel. Supposons que F ne soit pas de dimension finie, alors il existe $v_1, \dots, v_{n+1}$, $n + 1$ vecteurs de F linéairement indépendants dans F. Mais il sont aussi linéairement indépendants dans E. Donc la dimension de E est au moins $n + 1$. Contradiction.

Deux remarques :

– En fait on a même montrer que la dimension de F est plus petite que la dimension de E.
– On a utiliser le résultat suivant : si E admet une famille libre à k éléments alors la dimension de E est plus grande que k (ou est infini). Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème de la base incomplète.

Correction 10 E est engendré par trois vecteurs et F est engendré par deux vecteurs. Donc $\dim(E) \leqslant 3$ et $\dim(F) \leqslant 2$. Clairement e_4 et e_5 ne sont pas liés donc $\dim(F) \geqslant 2$ c'est à dire $\dim(F) = 2$. Enfin, $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$. La famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est donc libre, soit $\dim(E) \geqslant 3$ i.e. $\dim(E) = 3$.
$E \cap F \subset F$ donc $\dim(E \cap F) \leqslant 2$. De plus : $\dim(E+F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$. Comme $E + F \subset \mathbb{R}^4$, on a $\dim(E+F) \leqslant 4$ d'où on tire l'inégalité $1 \geqslant \dim(E \cap F)$. Donc soit $\dim(E \cap F) = 1$ soit $\dim(E \cap F) = 2$.
Supposons que $\dim(E \cap F)$ soit égale à 2. Comme $E \cap F \subset F$ on aurait dans ce cas $E \cap F = F$. En particulier il existerait $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $e_4 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. On vérifie aisément que ce n'est pas le cas, donc que $\dim(E \cap F)$ n'est pas égale à 2.
On peut donc conclure : $\dim(E \cap F) = 1$ puis $\dim(E + F) = 4$.

Correction 11

1. Par la formule $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$, on sait que $\dim(F+G) \leqslant \dim(F) + \dim(G)$. Pour $F = \operatorname{Im} u$ et $G = \operatorname{Im} v$ on obtient : $\dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) \leqslant \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Im} v$. Or $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \operatorname{Im}(u+v)$. Donc $\operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.
2. On applique la formule précédente à $u+v$ et $-v$: $\operatorname{rg}((u+v)+(-v)) \leqslant \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(-v)$, or $\operatorname{rg}(-v) = \operatorname{rg}(v)$ donc $\operatorname{rg}(u) \leqslant \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(v)$. Soit $\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v) \leqslant \operatorname{rg}(u+v)$. On recommence en échangeant u et v pour obtenir : $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u+v)$.