Espaces vectoriels

1 Définition, sous-espaces

Exercice 1 Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Calculer leurs dimensions.
$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ x+y-z = x+y+z = 0\}$.
$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ x^2 - z^2 = 0\}$.
$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ e^x e^y = 0\}$.
$E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ z(x^2+y^2) = 0\}$.

Exercice 2 Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+a=0, \text{ et } x+3az=0\right\}$$
$$E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); f(1)=0\}, \qquad E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}); f(0)=1\}$$
$$E_4 = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P'=3\}, \qquad E_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+\alpha y+1 \geqslant 0\right\}.$$

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1. Soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que
$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$
2. Soient H un troisième sous-espace vectoriel de E. Prouver que
$$G \subset F \Longrightarrow F \cap (G+H) = G + (F \cap H).$$

2 Systèmes de vecteurs

Exercice 4 Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $\vec{e_1}(1,2,3,4)$ et $\vec{e_2}(1,-2,3,-4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x,1,y,1) \in Vect\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$? Et pour que $(x,1,1,y) \in Vect\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$?

Exercice 5 Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1,x_2,x_3,x_4) vérifiant $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 6 Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés respectivement par les vecteurs $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\}$ et $\left\{\begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\0\\-7\end{pmatrix}\right\}$. Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 7 Peut-on déterminer des réels x, y pour que le vecteur $v = (-2,x,y,3)$ appartienne au s.e.v. engendré dans $\mathbb{R}^4$ par le système (e_1,e_2) où $e_1 = (1,-1,1,2)$ et $e_2 = (-1,2,3,1)$?

Exercice 8 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \text{ si } x = \alpha \text{ , } 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.

3 Somme directe

Exercice 9 Soient $\vec{e_1}(0,1,-2,1), \vec{e_2}(1,0,2,-1), \vec{e_3}(3,2,2,-1), \vec{e_4}(0,0,1,0)$ et $\vec{e_5}(0,0,0,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\} = Vect\{(1,1,0,0), (-1,1,-4,2)\}$.
2. $(1,1,0,0) \in Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} \cap Vect\{\vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\}$.
3. $dim(Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} \cap Vect\{\vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\}) = 1$.
4. $Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} + Vect\{\vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\} = \mathbb{R}^4$.
5. $Vect\{\vec{e_4}, \vec{e_5}\}$ est un sous-espace vectoriel de supplémentaire $Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 10 On considère les vecteurs $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$, $v_5 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?
2. Même question pour $\mathrm{Vect}\{v_1, v_3, v_4\}$ et $\mathrm{Vect}\{v_2, v_5\}$.

Exercice 11 Soit $E = \Delta^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E / f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E.

Exercice 12 Soit

$$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge } \}.$$

Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires de E.

Espaces vectoriels

Indication 1

1. E_1 est un espace vectoriel, sa dimension est 1.
2. E_2 n'est pas un espace vectoriel.
3. E_3 n'est pas un espace vectoriel.
4. E_4 n'est pas un espace vectoriel.

Indication 2

1. E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a = 0$.
2. E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. E_3 n'est pas un espace vectoriel.
4. E_4 n'est pas un espace vectoriel.
5. E_5 n'est pas un espace vectoriel.

Indication 3

1. Pour le sens $\Rightarrow$: raisonner par l'absurde et prendre un vecteur de $F \setminus G$ et un de $G \setminus F$. Regarder la somme de ces deux vecteurs.
2. Raisonner par double inclusion.

Indication 4 On ne peut pas pour le premier, mais on peut pour le second.

Indication 5 E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Un base comporte trois vecteurs.

Indication 6 Soit montrer la double inclusion. Soit montrer une seule inclusion et faire un petit raisonnement sur les dimensions. Utiliser le fait que de manière générale pour $E = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ alors :

$$E \subset F \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n \quad e_i \in F.$$

Indication 8 Supposer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et des indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (tout cela en nombre fini !) telsque

$$\lambda_1 f_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_n f_{\alpha_n} = 0.$$

Ici le 0 est la fonction constante égale à 0. Évaluer cette expression est des valeurs bien choisies.

Indication 9

1. Vrai.
2. Vrai.
3. Faux.
4. Faux.
5. Vrai.

Indication 10

1. Non.
2. Non.

Indication 11 Soit

$$G = \left\{ x \mapsto ax + b; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Montrer que G est un supplémentaire de F dans E.

Indication 12 Pour une suite (u_n) qui converge vers ℓ regarder la suite $(u_n - \ell)$.

Espaces vectoriels

Correction 1 1. E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet :

(a) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix} \in E_1$.

(b) Soient $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x' & y' & z'\end{pmatrix}$ deux éléments de E_1. On a donc $x+y-z = x+y+z = 0$ et $x'+y'-z' = x'+y'+z' = 0$. Donc $(x+x')+(y+y')-(z+z') = (x+x')+(y+y')+(z+z') = 0$ et $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x' & y' & z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(x+x') & (y+y') & (z+z')\end{pmatrix}$ appartient à E_1.

(c) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix} \in E_1$. Alors la relation $x+y-z = x+y+z = 0$ implique que $\lambda x+\lambda y-\lambda z = \lambda x+\lambda y+\lambda z = 0$ donc que $\lambda\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x & \lambda y & \lambda z\end{pmatrix}$ appartient à E_1.

Posons $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z = 0\}$. F_1 est un plan passant par l'origine donc F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On a les inclusions *strictes* : $\{0\} \subset E_1$ et $E_1 \subset F_1 \subset \mathbb{R}^3$. Par la première on obtient $0 < \dim(E_1)$, par la seconde $\dim(F_1) < 3$ puis $\dim(E_1) < 2$ c'est à dire $\dim(E_1) = 1$.

2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 - z^2 = 0\}$ c'est à dire $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = z \text{ ou } x = -z\}$. Donc $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ appartiennent à E_2 mais $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ n'appartient pas à E_2 qui n'est en conséquence pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix} \notin E_3$ donc E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. Les vecteurs $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ appartiennent à E_4 mais leur somme $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ne lui appartient pas donc E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Correction 2 1. E_1 : non si $a \neq 0$ car alors $0 \notin E_1$; oui, si $a = 0$ car alors E_1 est l'intersection des sous-espaces vectoriels $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y = 0\}$ et $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = 0\}$.

2. E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. E_3 : non, car la fonction nulle n'appartient pas à E_3.
4. E_4 : non car le polynôme nul n'appartient pas à E_4.
5. E_5 : non, en fait E_5 n'est même pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2,+)$ car $(2,0) \in E_5$ mais $-(2,0) = (-2,0) \notin E_5$.

Correction 3 1. Sens $\Leftarrow$. Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ donc $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel. De même si $G \subset F$.

Sens $\Rightarrow$. On suppose que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel. Par l'absurde supposons que F n'est pas inclus dans G et que G n'est pas inclus dans F. Alors il existe $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. Mais alors $x \in F \cup G$, $y \in F \cup G$ donc $x+y \in F \cup G$ (car $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel). Comme $x+y \in F \cup G$ alors $x+y \in F$ ou $x+y \in G$.

– Si $x+y \in F$ alors, comme $x \in F$, $(x+y)+(-x) \in F$ donc $y \in F$, ce qui est absurde.

– Si $x+y \in G$ alors, comme $y \in G$, $(x+y)+(-y) \in G$ donc $x \in G$, ce qui est absurde. Dans les deux cas nous obtenons une contradiction. Donc F est inclus dans G ou G est inclus dans F.

2. Supposons $G \subset F$.
   – Inclusion $\supset$. Soit $x \in G+(F \cap H)$. Alors il existe $a \in G$, $b \in F \cap H$ tels que $x = a+b$. Comme $G \subset F$ alors $a \in F$, de plus $b \in F$ donc $x = a+b \in F$. D'autre part $a \in G$, $b \in H$, donc $x = a+b \in G+H$. Donc $x \in F \cap (G+H)$.
   – Inclusion $\subset$. Soit $x \in F \cap (G+H)$. $x \in G+H$ alors il existe $a \in G$, $b \in H$ tel que $x = a+b$. Maintenant $b = x-a$ avec $x \in F$ et $a \in G \subset F$, donc $b \in F$, donc $b \in F \cap H$. Donc $x = a+b \in G+(F \cap H)$.

Correction 4 1.

$$\begin{aligned}
&(x,1,y,1) \in Vect\{e_1,e_2\} \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,y,1) = \lambda(1,2,3,4)+\mu(1,-2,3,-4) \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,y,1) = (\lambda,2\lambda,3\lambda,4\lambda)+(\mu,-2\mu,3\mu,-4\mu) \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,y,1) = (\lambda+\mu,2\lambda-2\mu,3\lambda+3\mu,4\lambda-4\mu) \\
&\Rightarrow \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad 1 = 2(\lambda-\mu) \text{ et } 1 = 4(\lambda-\mu) \\
&\Rightarrow \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad \lambda-\mu = \frac{1}{2} \text{ et } \lambda-\mu = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Ce qui est impossible (quelque soient x,y). Donc on ne peut pas trouver de tels x,y.

2. On fait le même raisonnement :

$$\begin{aligned}
&(x,1,1,y) \in Vect\{e_1,e_2\} \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad (x,1,1,y) = (\lambda+\mu,2\lambda-2\mu,3\lambda+3\mu,4\lambda-4\mu) \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x &= \lambda+\mu \\ 1 &= 2\lambda-2\mu \\ 1 &= 3\lambda+3\mu \\ y &= 4\lambda-4\mu \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} \lambda &= \frac{5}{12} \\ \mu &= -\frac{1}{12} \\ x &= \frac{1}{3} \\ y &= \frac{19}{12} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Donc le seul vecteur $(x,1,1,y)$ qui convient est $(1/3,1,1,19/12)$.

Correction 5 1. On vérifie les propriétés qui font de E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (l'origine est dans E, la somme de deux vecteurs de E est dans E, la multiplication d'un vecteur de E par un réel reste dans E).

2. Il faut trouver une famille libre de vecteurs qui engendrent E. Comme E est dans $\mathbb{R}^4$, il y aura moins de 4 vecteurs dans cette famille. On prend un vecteur de E (au hasard), par exemple $V_1 = (1,-1,0,0)$. Il est bien clair que V_1 n'engendre pas tout E, on cherche donc un vecteur V_2 linéairement indépendant de V_1, prenons $V_2 = (1,0,-1,0)$. Alors V_1, V_2 n'engendrent pas tout E ; par exemple $V_3 = (1,0,0,-1)$ est dans E mais n'est pas engendré par V_1 et V_2. Montrons que (V_1,V_2,V_3) est une base de E.

(a) (V_1, V_2, V_3) est une famille libre. En effet soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha V_1+\beta V_2+\gamma V_3 = 0$. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
&\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = 0 \\
&\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma & = 0 \\ -\alpha & = 0 \\ -\beta & = 0 \\ -\gamma & = 0 \end{cases}. \\
&\Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0.
\end{aligned}$$

Donc la famille est libre.

(b) Montrons que la famille est génératrice : soit $V = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$. Il faut écrire V comme combinaison linéaire de V_1, V_2, V_3. On peut résoudre un système comme ci-dessus (mais avec second membre) en cherchant α, β, γ tels que $\alpha V_1+\beta V_2+\gamma V_3 = V$. On obtient que $V = -x_2V_1 - x_3V_2 - x_4V_4$ (on utilise $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$).

Bien sûr vous pouvez choisir d'autres vecteurs de base (la seule chose qui reste indépendante des choix est le nombre de vecteurs dans une base : ici 3).

Correction 6 Pour que deux ensembles X et Y soient égaux, il faut et il suffit que $X \subset Y$ et $Y \subset X$.Dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, la situation est un peu plus simple : pour que $E = F$ il faut et il suffit que $F \subset E$ et $\dim(E) = \dim(F)$. Appliquons ce critère : E est engendré par deux vecteurs donc $\dim(E) \leqslant 2$. Les deux vecteurs $\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants donc $\dim(E) \geqslant 2$ c'est à dire $\dim(E) = 2$. Un raisonnement identique montre $\dim(F) = 2$. Enfin, les égalités $\begin{pmatrix}3\\7\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}5\\0\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ montrent que $F \subset E$ c'est à dire $E = F$.

Correction 7 $v \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ est équivalent à l'existence de deux réels λ, μ tels que $v = \lambda e_1 + \mu e_2$.
Alors $(-2, x, y, 3) = \lambda(1, -1, 1, 2) + \mu(-1, 2, 3, 1)$ est équivalent à

$$\begin{cases} -2 & = \lambda - \mu \\ x & = -\lambda + 2\mu \\ y & = \lambda + 3\mu \\ 3 & = 2\lambda + \mu \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda & = 1/3 \\ \mu & = 7/3 \\ x & = 13/3 \\ y & = 22/3 \end{cases}.$$

Le couple qui convient est donc $(x, y) = (13/3, 22/3)$.

Correction 8 À partir de la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ nous considérons une combinaison linéaire (qui ne correspond qu'à un nombre *fini* de termes).
Soit $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ des réels distincts, considérons La famille (finie) : $(f_{\alpha_i})_{i=1,\ldots,n}$. Supposons qu'il existe des réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$. Cela signifie que, quelque soit $x\in\mathbb{R}$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i}(x) = 0$; en particulier pour $x=\alpha_j$ l'égalité devient $\lambda_j = 0$ car $f_{\alpha_i}(\alpha_j)$ vaut 0 si $i\neq j$ et 1 si $i=j$. En appliquant le raisonnement ci-dessus pour $j=1$ jusqu'à $j=n$ on obtient : $\lambda_j=0$, $j=1,\ldots,n$. Donc la famille $(f_\alpha)_\alpha$ est une famille libre.

Correction 9 Faisons d'abord une remarque qui va simplifier les calculs :

$$e_3 = 2e_1 + 3e_2.$$

Donc en fait nous avons $Vect(e_1,e_2,e_3) = Vect(e_1,e_2)$ et c'est un espace de dimension 2. Par la même relation on trouve que $Vect(e_1,e_2,e_3) = Vect(e_2,e_3)$

1. Vrai. $Vect\{(1,1,0,0),(-1,1,-4,2)\}$ est inclus dans $Vect(e_1,e_2,e_3)$, car $(1,1,0,0) = e_1 + e_2$ et $(-1,1,-4,2) = -e_1+e_2$. Comme il sont de même dimension ils sont égaux.
2. Vrai. On a $(1,1,0,0) = e_1+e_2$ donc $(1,1,0,0)\in Vect(e_1,e_2)$, or $Vect(e_1,e_2) = Vect(e_2,e_3)\subset Vect(e_2,e_3,e_4)$. Donc $(1,1,0,0)\in Vect(e_1,e_2)\cap Vect(e_2,e_3,e_4)$.
3. Faux. Toujours la même relation nous donne que $Vect(e_1,e_2)\cap Vect(e_2,e_3,e_4) = Vect(e_1,e_2)$ donc est de dimension 2.
4. Faux. Encore une fois la relation donne que $Vect(e_1,e_2)+Vect(e_2,e_3,e_4) = Vect(e_1,e_2,e_4)$, or 3 vecteurs ne peuvent engendré $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4.
5. Vrai. Faire le calcul : l'intersection est $\{0\}$ et la somme est $\mathbb{R}^4$.

Correction 10
1. Non. Ces deux espaces ne peuvent engendrés tout $\mathbb{R}^4$ car il n'y pas assez de vecteurs. Premier type de raisonnement, on montre que $Vect(v_1,v_2)+Vect(v_3) = Vect(v_1,v_2,v_3)$, mais 3 vecteurs ne peuvent engendrer l'espace $\mathbb{R}^4$ de dimension 4. Autre type de raisonnoment : trouver un vecteur de $\mathbb{R}^4$ qui n'est pas dans $Vect(v_1,v_2)+Vect(v_3)$: par exemple faire le calcul avec $(0,0,0,1)$.
2. Non. Ces deux espaces ne sont pas supplémentaires car il y a trop de vecteurs ! Il engendrent tout, mais l'intersection n'est pas triviale. En effet on remarque assez vite que $v_5 = v_3+v_4$ est dans l'intersection. On peut aussi obtenir ce résultat en resolvant un système.

Correction 11 Les fonctions de E qui ne sont pas dans F sont Les fonctions h qui vérifient $h(0)\neq 0$ **ou** $h'(0)\neq 0$. Par exemple les fonctions constantes $x\mapsto b$, $(b\in\mathbb{R})$, ou les homothéties $x\mapsto ax$, $(a\in\mathbb{R})$ n'appartiennent pas à F.
Posons
$$G = \left\{x\mapsto ax+b; (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$
Montrons que G est un supplémentaire de F dans E.
Soit $f\in F\cap G$ alors $f(x) = ax+b$ (car $f\in G$) et $f(0)=b$ et $f'(0)=a$; mais $f\in F$ donc $f(0)=0$ donc $b=0$ et $f'(0)=0$ donc $a=0$. Maintenant f est la fonction nulle : $F\cap G=\{0\}$.
Soit $h\in E$, alors remarquons que pour $f(x) = h(x)-h(0)-h'(0)x$ la fonction f vérifie $f(0)=0$ et $f'(0)=0$ donc $f\in F$. Si nous écrivons l'égalité différemment nous obtenons

$$h(x) = f(x)+h(0)+h'(0)x.$$

Posons $g(x) = h(0)+h'(0)x$, alors la fonction $g\in G$ et

$$h = f+g,$$

ce qui prouve que toute fonction de E s'écrit comme somme d'une fonction de F et d'une fonction de G : $E = F + G$.
En conclusion nous avons montrer que $E = F \oplus G$.

Correction 12 On note F l'espace vectoriel des suites constantes et G l'espace vectoriel des suites convergeant vers 0.

1. $F \cap G = \{0\}$. En effet une suite constante qui converge vers 0 est la suite nulle.
2. $F + G = E$. Soit (u_n) un élément de E. Notons ℓ la limite de (u_n). Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \ell$, alors (v_n) converge vers 0. Donc $(v_n) \in G$. Notons (w_n) la suite constante égale à ℓ. Alors nous avons $u_n = \ell + u_n - \ell$, ou encore $u_n = w_n + v_n$, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$. En terme de suite cela donne $(u_n) = (w_n) + (u_n)$. Ce qui donne la décomposition cherchée.

Bilan : F et G sont en somme directe dans E : $E = F \oplus G$.