Calculs d'intégrales

1 Utilisation de la définition

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $[0,3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ -2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si } 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

1. Calculer $\int_0^3 f(t)dt$.
2. Soit $x \in [0,3]$, calculer $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
3. Montrer que F est une fonction continue sur $[0,3]$. La fonction F est-elle dérivable sur $[0,3]$?

Exercice 2 Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$,

$$f(x) = x \ , \ g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = e^x,$$

sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les intégrales $\int_0^1 f(x)dx$, $\int_1^2 g(x)dx$ et $\int_0^x h(t)dt$.

Exercice 3 Calculer l'intégrale de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ comme limite de sommes de Riemann-Darboux dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sin x$ et $f(x) = \cos x$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $x_k = \frac{k\pi}{2n}$, $k = 0, 1, ..., n$,
2. $g(x) = \frac{1}{x}$ sur $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $x_k = aq^k$, $k = 0, 1, ..., n$ (q étant à déterminer),
3. $h(x) = \alpha^x$ sur $[a,b]$, $\alpha > 0$, et $x_k = a + (b-a).\frac{k}{n}$, $k = 0, 1, ..., n$.

Exercice 4 Les fonctions suivantes sont-elles intégrables au sens de Riemann ?

1. $f(x) = [x]$ sur $[0,2]$
2. $g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \left[\frac{1}{x}\right] & \text{si } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. $h : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } 0 < x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
4. $k : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad k_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Exercice 5 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a,b]$ $(a<b)$.

1. On suppose que f est continue en un point $x_0 \in [a,b]$ et que $f(x_0) > 0$. Montrer que $\int_a^b f(x)dx > 0$. En déduire que si f est une fonction continue positive sur $[a,b]$ telle que $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors f est identiquement nulle.
2. On suppose que f est continue sur $[a,b]$, et que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Montrer que qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.
3. Application : on suppose que f est une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $d \in [0,1]$ tel que $f(d) = d$.

Exercice 6 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, positive ; on pose $m = \sup\{f(x), x \in [a,b]\}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b (f(x))^n dx \right)^{\frac{1}{n}} = m.$$

Exercice 7 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application strictement croissante telle que $f(0) = 0,\ f(1) = 1$. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f^n(t)dt.$$

2 Calculs de primitives

Exercice 8 Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs :

a) $\displaystyle\int \arctan x dx$ **b)** $\displaystyle\int \tan^2 x dx$ **c)** $\displaystyle\int \frac{1}{x \ln x} dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

e) $\displaystyle\int \arcsin x dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{1}{3+\exp(-x)} dx$ **g)** $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{4x-x^2}} dx$ **h)** $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+\exp x}} dx$ **j)** $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$ **k)** $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx$ **l)** $\displaystyle\int \cos x \exp x dx$

Exercice 9 Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \quad \text{et} \quad \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx.$$

Exercice 10 Calculer les primitives suivantes, en précisant si nécessaire les intervalles de validité des calculs :

a) $\displaystyle\int \sin^8 x \cos^3 x dx$ **b)** $\displaystyle\int \cos^4 x dx$ **c)** $\displaystyle\int \cos^{2003} x \sin x dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{1}{2+\sin x+\cos x} dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x} dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x} dx$ **g)** $\displaystyle\int \frac{3-\sin x}{2\cos x + 3\tan x} dx$ **h)** $\displaystyle\int \frac{1}{7+\tan x} dx$

3 Fonctions définies par une intégrale

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$.

2. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.
3. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est positive sur $\mathbb{R}$.
5. Si f est positive sur $\mathbb{R}$ alors F est croissante sur $\mathbb{R}$.
6. Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$ alors F est T-périodique sur $\mathbb{R}$.
7. Si f est paire alors F est impaire.

Exercice 12 Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $F(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Calculer la dérivée de $G(x) = \displaystyle\int_{x}^{2x} \frac{dt}{1+t^2+t^4}$.

Exercice 13 Soit $F(x) = \displaystyle\int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt$

1. Quel est l'ensemble de définition de F. F est-elle continue, dérivable sur son ensemble de définition ?
2. Déterminer $\lim_{x\to 1^+} F(x)$ en comparant F à $H(x) = \displaystyle\int_{x}^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt$.

4 Calculs d'intégrales

Exercice 14 Calculer les intégales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$	**b)** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x dx$	**c)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$
d) $\displaystyle\int_{-1}^1 (\arccos x)^2\, dx$	**e)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$	**f)** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$
g) $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln x dx$	**h)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7}dx$	**i)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}dx$

Exercice 15 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx.$$

Exercice 16 (Intégrales de Wallis) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx$ si $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(I_n)_n$ est positive décroissante.
2. Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$ et expliciter I_n, en déduire $\int_{-1}^1 (x^2-1)^n\, dx$.
3. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$
4. A l'aide de $(n+1)\, I_n I_{n+1}$ montrer que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
5. En déduire $\frac{1.3...(2n+1)}{2.4...(2n)} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$.

Exercice 17 Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. En majorant la fonction intégrée, montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)$.

5 Calculs d'aires

Exercice 18 Calculer $\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} dx$ (on posera $\theta = \arcsin \frac{x}{R}$) et en déduire l'aire d'un disque de rayon R.

Exercice 19 Calculer l'aire de la région délimitée par les courbes d'équation $y = \dfrac{x^2}{2}$ et $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

6 Limites de suites et intégrales

Exercice 20 Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2}$;
2. $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Calculs d'intégrales

Indication 2 Il faut se souvenir de ce que vaut la somme des n premiers entiers, la somme des carrés des n premiers entiers et de la somme d'une suite géométrique. La formule générale pour les sommes de Riemann est que $\int_a^b f(x)dx$ est la limite (quand $n \to +\infty$) de

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}).$$

Indication 3

1. On pourra penser que le cosinus et le sinus sont les parties réelles et imaginaires de la fonction $t \mapsto e^{it}$. On chercha donc d'abord à calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\,dt$.
2. On choisira q tel que $q^n = \frac{b}{a}$.

Indication 5

1. Revenir à la définition de la continuité en prenant $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ par exemple.
2. Soit f est tout le temps de même signe (et alors utiliser la première question), soit ce n'est pas le cas (et alors utiliser un théorème classique...).
3. On remarquera que $\int_a^b f(t)\,dt - \frac{1}{2} = \int_a^b (f(t) - t)dt$.

Indication 6 Essayez d'encadrer $\int_a^b \frac{f(t)^n}{m^n} dt$.

Indication 7 Il s'agit de montrer que la limite vaut 0. Pour un $\alpha > 0$ fixé on séparera l'intégrale en deux partie selon que f est plus petit ou plus grand que $1 - \alpha$.

Indication 9 Calculer la somme et la différence de ces deux intégrales.

Indication 12 Se ramener à une composition de fonctions ou revenir à la définition de la dérivée avec le taux d'accroissement.

Indication 13

1. Soit faire comme l'exercice 12, soit séparer l'intégrale en deux, et pour l'une faire un changement de variable $u = x^2$.
2. $H(x)$ se calcule explicitement et montrer qu'en fait H est une fonction constante, ensuite il faut comparer $H(x)$ et $F(x)$.

Indication 16

1.
2. Faire une intégration par parties pour I_{n+2}. Pour le calcul explicite on distinguera le cas des n pairs et impairs.
3. Utiliser la décroissance de I_n pour encadrer $\frac{I_{n+1}}{I_n}$.
4.
5.

Indication 17

1. Majorer par x^n.
2.
3. On pourra calculer $(I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - \cdots$

Indication 20 On pourra essayer de reconnître des sommes de Riemann. Pour le produits composer par la fonction ln.

Calculs d'intégrales

Correction 1 1. On trouve $\int_0^3 f(t)dt = +3$. Il faut tout d'abord tracer le graphe de cette fonction. Ensuite la valeur d'une intégrale ne dépend pas de la valeur de la fonction en un point, c'est-à-dire ici les valeurs en $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ n'ont aucune influence sur l'intégrale. Ensuite on revient à la définition de $\int_0^3 f(t)dt$: pour la subdivision de $[0, 3]$ définie par $\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3\}$, on trouve la valeur de l'intégrale (ici le sup et l'inf sont atteint et égaux pour cette subdivision et toute subdivision plus fine).

2. C'est la même chose, mais au lieu d'aller jusqu'à 3 on s'arrête à x, on trouve

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3 - 2x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ -9 + 4x & \text{si } 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

3. Les seuls points à discuter pour la continuité sont les points $x = 1$ et $x = 2$, mais les limites à droite et à gauche de F sont égales en ces points donc F est continue. Par contre F n'est pas dérivable en $x = 1$ ni en $x = 2$.

Correction 2 1. En utilisant les sommes de Riemann, on sait que $\int_0^1 f(x)dx$ est la limite (quand $n \to +\infty$) de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$. Notons $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})$. Alors $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}$. On a utilisé que la somme des entiers de 0 à $n-1$ vaut $\frac{n(n-1)}{2}$. Donc S_n tend vers $\frac{1}{2}$. Donc $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

2. Même travail : $\int_1^2 g(x)dx$ est la limite de $S'_n = \frac{2-1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(1 + k\frac{2-1}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1 + \frac{k}{n})^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(1+2\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2})$. En séparant la somme en trois nous obtenons : $S'_n = \frac{1}{n}(n+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k^2) = 1 + \frac{2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$. Donc à la limite on trouve $S'_n \to 1+1+\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$. Donc $\int_1^2 g(x)dx = 7/3$. Remarque : on a utilisé que la somme des carrés des entiers de 0 à $n-1$ est $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$.

3. Même chose pour $\int_0^x h(t)dt$ qui est la limite de $S''_n = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{kx}{n}) = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{kx}{n}} = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{\frac{x}{n}})^k$. Cette dernière somme est la somme d'une suite géométrique, donc $S''_n = \frac{x}{n}\frac{1-(e^{\frac{x}{n}})^n}{1-e^{\frac{x}{n}}} = \frac{x}{n}\frac{1-e^x}{1-e^{\frac{x}{n}}} = (1-e^x)\frac{\frac{x}{n}}{1-e^{\frac{x}{n}}}$ qui tend vers $e^x - 1$. Pour obtenir cette dernière limite on remarque qu'en posant $u = \frac{x}{n}$ on a $\frac{\frac{x}{n}}{1-e^{\frac{x}{n}}} = \frac{1-e^u}{u}$ qui tend vers -1 lorsque $u \to 0$ (ce qui est équivalent à $n \to +\infty$).

Correction 3 1. On calcul d'abord $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\,dt$. Par le théorème de Riemann-Darboux c'est la limite de

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) \cdot f(x_k).$$

Pour $x_k = \frac{k\pi}{2n}$ (on obtient en fait un somme de Riemann) :

$$S_n = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{2n}} = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{\frac{i\pi}{2n}})^k.$$

Ce qui est une somme géométrique de somme $S_n = (1-i)\frac{\frac{\pi}{2n}}{1-e^{i\frac{\pi}{2n}}}$. La limite de ce taux d'accroissement est $1+i$ (en posant $u = \frac{\pi}{2n}$ et en remarquant que $\frac{e^{iu}-1}{u} \to i$ quand $u \to 0$). Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it}\,dt = 1+i$. Mais $e^{it} = \cos t + i \sin t$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = 1+i$. Par identification des parties réelles et imaginaires on trouve : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = 1$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = 1$.

2. On veut $x_k = aq^k$ ce qui donne bien $x_0 = a$, mais il faut aussi $x_n = b$ donc $aq^n = b$, donc $q^n = \frac{b}{a}$ soit $q = (\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}$. Nous cherchons la limite de $S'_n = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\cdot g(x_k)$. Il est n'est pas trop dur de montrer que $S'_n = n(q-1)$. Pour trouver la limite quand $n \to +\infty$ c'est plus délicat car q dépend de n : $S'_n = n(q-1) = n((\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}}-1) = n(e^{\frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}}-1)$. En posant $u = \frac{1}{n}$ et en remarquant que l'on obtient un taux d'accroissement on calcule : $S'_n = \frac{1}{u}(e^{u\ln\frac{b}{a}}-1) \to \ln\frac{b}{a} = \ln b - \ln a$. Donc $\int_a^b \frac{dt}{t} = \ln b - \ln a$.
3. À l'aide des sommes géométrique est des taux d'accroissement on trouve

$$\int_a^b \alpha^t\,dt = \frac{e^{\alpha b}-e^{\alpha a}}{\alpha}.$$

Correction 4 1. Oui.
2. Non.
3. Non.
4. Non.

Correction 5 1. Écrivons la continuité de f en x_0 avec $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$: il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ on ait $|f(t)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. Avec notre choix de ε cela donne pour $t \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ que $f(t) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$. Pour évaluer $\int_a^b f(t)\,dt$ nous la coupons en trois morceaux par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^{x_0-\delta} f(t)dt + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(t)dt + \int_{x_0+\delta}^b f(t)dt.$$

Comme f est positive alors par positivité de l'intégrale $\int_a^{x_0-\delta} f(t)dt \geqslant 0$ et $\int_{x_0+\delta}^b f(t)dt \geqslant 0$. Pour le terme du milieu on a $f(t) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}$ donc $\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(t)dt \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2}dt = 2\delta\frac{f(x_0)}{2}$. (pour la dernière équation on calcule juste l'intégrale d'une fonction constante !). Le bilan de tout cela est que $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 2\delta\frac{f(x_0)}{2} > 0$.
Donc pour une fonction continue et positive f, si elle est strictement positive en un point alors $\int_a^b f(t)\,dt > 0$. Par contraposition pour une fonction continue et positive si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ alors f est identiquement nulle.
2. Soit f est tout le temps positive, soit elle tout le temps négative, soit elle change (au moins un fois) de signe. Dans le premier cas f est identiquement nulle par la première question, dans le second cas c'est pareil (en appliquant la première question à $-f$). Pour le troisième cas c'est le théorème des valeurs intermédiaires que affirme qu'il existe c tel que $f(c) = 0$.

3. Posons $g(t) = f(t) - t$. Alors $\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2} = 0$. Donc par la question précédente, g étant continue, il existe $d \in [0,1]$ tel que $g(d) = 0$, ce qui est équivalent à $f(d) = d$.

Correction 6 Notons $I = \int_a^b \frac{f(t)^n}{m^n} dt$. Comme $f(t) \leqslant m$ pour tout $t \in [a,b]$ alors $I \leqslant 1$. Ceci implique que $\lim_{n\to+\infty} I^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$. Fixons $\alpha > 0$ (aussi petit que l'on veut). Comme f est continue et m est sa borne supérieure sur $[a,b]$ alors il existe un intervalle $[x,y]$, $(x < y)$, sur le quel $f(t) \geqslant m - \alpha$. Comme f est positive alors

$$I \geqslant \int_x^y \frac{f(t)^n}{m^n} dt \geqslant \int_x^y \frac{(m-\alpha)^n}{m^n} = (y-x)\left(\frac{m-\alpha}{m}\right)^n$$

.
Donc $I^{\frac{1}{n}} \geqslant (y-x)^{\frac{1}{n}} \frac{m-\alpha}{m}$. Quand $n \to +\infty$ on a $(y-x)^{\frac{1}{n}} \to 1$, donc à la limite nous obtenons $\lim_{n\to+\infty} I^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{m-\alpha}{m}$.
Comme α est quelconque, nous pouvons le choisir aussi proche de 0 de sorte que $\frac{m-\alpha}{m}$ est aussi proche de 1 que désiré. Donc $\lim_{n\to+\infty} I^{\frac{1}{n}} \geqslant 1$.
En conclusion nous trouvons que $\lim_{n\to+\infty} I^{\frac{1}{n}} = 1$ ce qui était l'égalité recherchée.

Correction 7 Soit $\alpha > 0$ fixé. Soit $0 < x_0 < 1$ tel que pour tout $x \in [0, x_0]$, $f(x) \leqslant 1 - \alpha$. Ce x_0 existe bien car f est strictement croissante et $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Séparons l'intégrale en deux :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f^n(t)dt &= \int_0^{x_0} f^n(t)dt + \int_{x_0}^1 f^n(t)dt \\
&\leqslant \int_0^{x_0} (1-\alpha)^n dt + \int_{x_0}^1 1^n dt \\
&\leqslant x_0(1-\alpha)^n + (1-x_0) \\
&\leqslant (1-\alpha)^n + (1-x_0) \quad \text{car } x_0 \leqslant 1
\end{aligned}$$

Soit maintenant donné un $\varepsilon > 0$, on choisit $\alpha > 0$ tel que $1 - x_0 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (en remarquant que si $\alpha \to 0$ alors $x_0(\alpha) \to 1$), puis il existe n assez grand tel que $(1-\alpha)^n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n assez grand tel que $\int_0^1 f^n(t)dt \leqslant \varepsilon$. Donc $\int_0^1 f^n(t)dt \to 0$.

Correction 8 a-$\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$ sur $\mathbb{R}$ (intégration par parties)
b-$\int \tan^2 x dx = \tan x - x + c$ sur $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$
c-$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln|\ln x| + c$ sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ (changement de variable : $u = \ln x$)
d-$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2}{3}(x-2)(x+1)^{\frac{1}{2}} + c$ sur $]-1,+\infty[$ (changement de variable : $u = \sqrt{x+1}$ ou intégration par parties)
e-$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$ sur $]-1,1[$ (intégration par parties)
f-$\int \frac{1}{3+\exp(-x)} dx = \frac{1}{3}\ln(3\exp x + 1) + c$ sur $\mathbb{R}$ (changement de variable : $u = \exp x$)
g-$\int \frac{-1}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \arccos\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + c$ sur $]0,4[$ (changement de variable : $u = \frac{1}{2}x - 1$)
h-$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx = \arcsin(\ln x) + c$ sur $\left]\frac{1}{e}, e\right[$ (changement de variable : $u = lnx$)
i-$\int \frac{1}{\sqrt{1+\exp x}} dx = x - 2\ln\left(1 + \sqrt{\exp x + 1}\right) + c$ sur $\mathbb{R}$ (changement de variable : $u = \sqrt{\exp x + 1}$)
j-$\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) + c$ sur $\mathbb{R}$
k-$\int \frac{x+2}{x^2-3x-4} dx = -\frac{1}{5}\ln|x+1| + \frac{6}{5}\ln|x-4| + c$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,4\}$ (décomposition en éléments simples)
l-$\int \cos x \exp x dx = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)\exp x + c$ sur $\mathbb{R}$ (deux intégrations par parties)

Correction 9 $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx = \frac{1}{2}\left(x - \ln|\cos x + \sin x|\right) + c$ sur $\mathbb{R}$
$\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx = \frac{1}{2}\left(x + \ln|\cos x + \sin x|\right) + c$ sur $\mathbb{R}$ (en calculant la somme et la différence).

Correction 10 a-$\int \sin^8 x \cos^3 x dx = \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{1}{11}\sin^{11} x + c$ sur $\mathbb{R}$.
b-$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x + c$ sur $\mathbb{R}$.
c-$\int \cos^{2003} x \sin x dx = -\frac{1}{2004}\cos^{2004} x + c$ sur $\mathbb{R}$.
d-$\int \frac{1}{\sin x}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$ sur $]k\pi, (k+1)\pi[$ (changement de variable $u = \cos x$ ou $u = \tan\frac{x}{2}$).
e-$\int \frac{1}{\cos x}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + c = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$ sur $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ (changement de variable $u = \sin x$ ou $u = \tan\frac{x}{2}$).
f-$\int \frac{3-\sin x}{2\cos x+3\tan x}dx = -\frac{1}{5}\ln(2 - \sin x) + \frac{7}{10}\ln|1 + 2\sin x| + c$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2\pi}{3}[2\pi], -\frac{2\pi}{3}[2\pi]\right\}$ (changement de variable $u = \sin x$).
g-$\int \frac{1}{7+\tan x}dx = \frac{7}{50}x + \frac{1}{50}\ln|\tan x + 7| + \frac{1}{50}\ln|\cos x| + c$ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\arctan(-7) + k\pi\,,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in Z\right\}$ (changement de variable $u = \tan x$).
h-$\int \frac{1}{2+\sin x+\cos x}dx = \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1+\tan(x/2)}{\sqrt{2}}\right) + c$ sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$ (changement de variable $u = \tan(x/2)$).

Correction 11

1. Vrai.
2. Vrai.
3. Faux ! Attention aux valeurs négatives par exemple pour $f(x) = x$ alors F est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
4. Vrai.
5. Vrai.
6. Faux. Faire la calcul avec la fonction $f(x) = 1 + \sin(x)$ par exemple.
7. Vrai.

Correction 12

1. Commençons plus simplement avec la fonction
$$H(x) = \int_a^{v(x)} f(t)dt.$$
En fait H est la composition de la fonction $x \mapsto v(x)$ avec la fonction $G : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$:
$$H = G \circ v.$$
La fonction v est dérivable et la fonction G aussi (c'est une primitive) donc la composée $H = G \circ v$ est dérivable, de plus $H'(x) = v'(x) \cdot G'(v(x))$. En pratique comme $G'(x) = f(x)$ cela donne $H'(x) = v'(x)f(v(x))$.
Remarque : Il n'est pas nécessaire de connaître cette formule mais il est important de savoir refaire ce petit raisonnement.
On montrerait de même que la fonction $x \to \int_{u(x)}^a f(t)dt$ est dérivable de dérivée $-u'(x)f(u(x))$.
Revenons à notre fonction $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = \int_{u(x)}^a f(t)dt + \int_a^{v(x)} f(t)dt$, c'est la somme de deux fonctions dérivables donc est dérivable de dérivée :
$$F'(x) = v(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$
2. On applique ceci à $u(x) = x$ et $v(x) = 2x$ nous obtenons :
$$G'(x) = \frac{2}{1 + (2x)^2 + (2x)^4} - \frac{1}{1 + x^2 + x^4}.$$

Correction 13 1. F est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. F est continue et dérivable sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. Pour vois cela il suffit d'écrire $F(x)=\int_x^a \frac{dt}{\ln t}+\int_a^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$. La première de ces fonctions est continue et dérivable (c'est une primitive), la seconde est la composée de $x\mapsto x^2$ avec $x\mapsto \int_a^x \frac{dt}{\ln t}$ et est donc aussi continue et dérivable. On pourrait même calculer la dérivée.

2. Notons $f(t)=\frac{1}{\ln t}$ et $g(t)=\frac{1}{t\ln t}$. On se place sur $]1,+\infty[$. Bien évidemment $g(t)\leqslant f(t)$, mais nous avons aussi que pour $\varepsilon>0$ fixé il existe $x>1$ tel que pour tout $t\in[1,x^2]$ on ait $\frac{1}{t}\leqslant 1+\varepsilon$ donc sur $]1,x^2]$ nous avons $f(t)\leqslant(1+\varepsilon)g(t)$. Par intégration de l'inégalité $g(t)\leqslant f(t)\leqslant(1+\varepsilon)g(t)$ sur $[x,x^2]$ nous obtenons pour x assez proche de 1 :

$$H(x)\leqslant F(x)\leqslant(1+\varepsilon)H(x).$$

Il ne reste plus qu'a calculer $H(x)$. En fait $g(t)=\frac{1}{t\ln t}$ est la dérivée de la fonction $h(t)=\ln(\ln t)$. Donc

$$\begin{aligned} H(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t} &= [\ln(\ln t)]_x^{x^2}=\ln(\ln(x^2))-\ln(\ln x)\\ &=\ln(2\ln x)-\ln(\ln x)=\ln\frac{2\ln x}{\ln x}\\ &=\ln 2. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors, pour $\varepsilon>0$ fixé et $x>1$ assez proche de 1, l'encadrement

$$\ln 2\leqslant F(x)\leqslant(1+\varepsilon)\ln 2.$$

Donc la limite de $F(x)$ quand $x\to 1^+$ est $\ln 2$.

Correction 14 a-$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}dx=\frac{\pi^2}{32}$ (changement de variables ou intégration par parties).
b-$\int_{\frac12}^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x dx=\frac{3\pi}{4}$ (changement de variables $u=\frac1x$ et $\arctan x+\arctan\frac1x=\frac{\pi}{2}$).
c-$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx=1$ (intégration par parties).
d-$\int_{-1}^1(\arccos x)^2dx=\pi^2+4$ (2 intégrations par parties).
e-$\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=\frac{\pi}{8}+\frac14$ (changement de variables ou intégration par parties).
f-$\int_0^{\sqrt3}\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt3}{2}$ (changement de variables $u=\arcsin\frac{x}{2}$).
g-$\int_1^2 x^2\ln x dx=\frac83\ln 2-\frac79$ (intégration par parties).
h-$\int_{-1}^1\frac{1}{x^2+4x+7}dx=\frac{\pi}{6\sqrt3}$ (changement de variables $u=\frac{x+2}{\sqrt3}$).
i-$\int_0^1\frac{3x+1}{(x+1)^2}dx=3\ln 2-1$ (décomposition en éléments simples).

Correction 15 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}dx=1$ (changement de variables $u=\tan\frac{x}{2}$).
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sin x}dx=\frac{\pi}{2}-1$ (utiliser la précédente).

Correction 16 1. Sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ la fonction sinus est positive donc I_n est positive. De plus le $\sin x\leqslant 1$ donc la suite $(\sin^n x)_n$ est décroissante.

2.
$$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin^{n+1}x dx.$$

En posant $u'(x) = \sin x$ et $v(x) = \sin^{n+1} x$ et en intégrant par parties nous obtenons

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^n x dx = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}.$$

Donc $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
Un petit calcul donne $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$. Donc par récurrence pour n pair nous obtenons que

$$I_n = \frac{1.3...(n-1)}{2.4...n}\frac{\pi}{2},$$

et pour n impair :

$$I_n = \frac{2.4...(n-1)}{1.3...n}.$$

Avec le changement de variable $u = \cos x$, on montre assez facilement que $\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx = 2\int_0^1 (x^2-1)^n dx = 2I_{2n+1}$.

3. Comme (I_n) est décroissante alors $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$, en divisant le tout par $I_n > 0$ nous obtenons $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$. Mais nous avons déjà calculer $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}$ qui tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Donc $\frac{I_{n+1}}{I_n}$ tend vers $+1$ donc $I_n \sim I_{n+1}$.
4. Lorsque l'on calcule $(n+1)I_nI_{n+1}$ à l'aide des expressions explicitées à la deuxième question nous obtenons une fraction qui se simplifie presque complètement : $(n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$. Maintenant

$$I_n^2 \sim I_n \times I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n},$$

donc

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

5.
$$\frac{1.3...(2n+1)}{2.4...(2n)} = (2n+1)\frac{2}{\pi}I_{2n} \sim (2n+1)\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

Correction 17 1. Pour $x > 0$ on a $\frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$, donc

$$I_n \leqslant \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Donc $I_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

2. $I_n + I_{n+1} = \int_0^1 x^n \frac{1+x}{1+x}dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.
3. Soit $S_n = (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - \cdots \pm (I_{n-1} + I_n)$. Par la question précédente nous avons $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \pm \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Mais d'autre part cette somme étant télescopique nous avons $S_n = I_0 \pm I_n$. Alors la limite de S_n et donc de $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ (quand $n \to +\infty$) est donc I_0 car $I_n \to 0$. Un petit calcul montre que $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$. Donc la somme alternée des entiers converge vers $\ln 2$.

Correction 18 $\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}dx = \frac{\pi}{2}R^2$.

Correction 19 Aire de la région délimitée par les courbes d'équation $y = \frac{x^2}{2}$ et $y = \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ (résoudre $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2+1}$).

Correction 20 1. Soit $u_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}$. En posant $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ nous venons d'écrire la somme de Riemann correspondant à $\int_0^1 f(x)dx$. Cette intégrale ce calcule facilement :$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$. La somme de Riemann u_n convergeant vers $\int_0^1 f(x)dx$ nous venons de montrer que u_n converge vers $\frac{\pi}{4}$.

2. Soit $v_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$, notons

$$w_n = \ln v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right).$$

En posant $g(x) = \ln(1+x^2)$ nous reconnaissons la somme de Riemann correspondant à $I = \int_0^1 g(x)dx$.
Calculons cette intégrale :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx \\
&= [x\ln(1+x^2)]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{1+x^2}dx \quad \text{par intégration par parties} \\
&= \ln 2 - 2\int_0^1 1 - \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \ln 2 - 2 + 2[\arctan x]_0^1 \\
&= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Nous venons de prouver que $w_n = \ln v_n$ converge vers $I = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$, donc $v_n = \exp w_n$ converge vers $\exp(\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}) = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$. Bilan (v_n) a pour limite $2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.