Fonctions circulaires et hyperboliques inverses

1 Fonctions circulaires inverses

Exercice 1 Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p. À quelle distance doit se placer un observateur (dont la taille est supposée négligeable) pour voir la statue sous un angle maximal ?

Exercice 2 Démontrer les inégalités suivantes :

$$\operatorname{Arcsin} a > \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \quad \text{si } 0 < a < 1;$$

$$\operatorname{Arctan} a > \frac{a}{1+a^2} \quad \text{si } a > 0.$$

Exercice 3 Écrire sous forme d'expression algébrique

$$\sin(\operatorname{Arccos} x), \quad \cos(\operatorname{Arcsin} x), \quad \sin(3\operatorname{Arctan} x).$$

Exercice 4 Résoudre les équation suivantes :

$$\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}\frac{2}{5} + \operatorname{Arcsin}\frac{3}{5}, \quad \operatorname{Arccos} x = 2\operatorname{Arccos}\frac{3}{4},$$

$$\operatorname{Arctan} x = 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}.$$

Exercice 5 Vérifier

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2}.$$

2 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

Exercice 6

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(\operatorname{ch} x) = e^x.$$
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(e^x) = \operatorname{ch} x.$$
Préciser le nombre de solutions.
3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(e^x) = \operatorname{ch} x.$$
Préciser le nombre de solutions ; y a t-il des solutions continues sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 7 Calculer :

$$\lim_{x\to\infty} e^x(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} (x - \ln(\operatorname{ch} x)).$$

Exercice 8 Les réels x et y étant liés par

$$x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

calculer $\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$ et $\operatorname{th} x$ en fonction de y.

Exercice 9 Résoudre l'équation $x^y = y^x$ où x et y sont des entiers positifs non nuls.

Fonctions circulaires et hyperboliques inverses

Indication 1 Faire un dessin. Remarquer que maximiser l'angle d'observation α revient à maximiser $\tan\alpha$. Puis calculer $\tan\alpha$ en fonction de la distance et étudier cette fonction.

Indication 2 On pourra étudier les fonctions définies par la différence des deux termes de l'inégalité.

Indication 3 Il faut utiliser les identités trigonométriques classiques.

Indication 4 On compose les équations par la bonne fonction, par exemple sinus pour la première.

Indication 5 Faire une étude de fonction.

Indication 6
1. Regarder ce qui se passe en deux valeurs opposées x et $-x$.
2. Poser $X = e^x$.

Indication 9 Montrer que l'équation $x^y = y^x$ est équivalente à $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$, puis étudier la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

Fonctions circulaires et hyperboliques inverses

Correction 1 On note x la distance de l'observateur au pied de la statue. On note α l'angle d'observation de la statue seule, et β l'angle d'observation du piedestal seul. Nous avons le deux identités :

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{p+s}{x}, \qquad \tan\beta = \frac{p}{x}.$$

En utilisante la relation $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$ on obtient

$$\tan\alpha = \frac{sx}{x^2+p(p+s)}.$$

Maintenant l'angle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et la fonction tan est croissante sur cet intervalle, donc maximiser α est équivalent à maximiser $\tan\alpha$. Étudions la fonction $f(x) = \frac{sx}{x^2+p(p+s)}$ définie sur $x \in [0, +\infty[$. Après calculs f' ne s'annule qu'en $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$ qui donne le maximum de f (en 0 et $+\infty$ l'angle est nul). Donc la distance optimiale de vision est $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$.
En complément on peut calculer l'angle maximum α_0 correspondant : par la relation $\tan\alpha_0 = f(x_0) = \frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$, on obtient $\alpha_0 = \arctan\frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$.

Correction 2
1. Soit $f(a) = \operatorname{Arcsin} a - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ sur $]0,1[$, $f'(a) \geqslant 0$ (faite le calcul !) donc f est strictement croissante et $f(0) = 0$ donc $f(a) > 0$ pout tout $a \in]0,1[$.
2. $g(a) = \operatorname{Arctan} a - \frac{a}{1+a^2}$ alors $g'(a) = \frac{1}{1+a^2} - \frac{1+a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{2a^2}{(1+a^2)^2} > 0$ Donc g est strictement croissante et $g(0) = 0$ donc g est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

Correction 3
1. $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$ donc $\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$. Donc $\sin\arccos x = \pm\sqrt{1-\cos^2\arccos x} = \pm\sqrt{1-x^2}$ et comme $\arccos x \geqslant 0$ on a $\sin\arccos x = +\sqrt{1-x^2}$.
2. De la même manière $\cos\arcsin x = +\sqrt{1-x^2}$.
3. On utilise $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1-\sin^2 x}$ ce qui permet d'avoir $\sin^2 x = 1 - \frac{1}{1+\tan^2 x}$. Ensuite on calcule $\tan 3y$ en utilisant deux fois la formule de $\tan(a+b)$ on trouve $\tan 3y = \frac{3\tan y - (\tan y)^3}{1-3(\tan y)^2}$. Cela permet d'avoir
$$\sin(3\arctan x) = 4\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Correction 4
1. En prenant le sinus de l'équation $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}\frac{2}{5} + \operatorname{Arcsin}\frac{3}{5}$ on obtient $x = \sin(\operatorname{Arcsin}\frac{2}{5} + \operatorname{Arcsin}\frac{3}{5})$, donc $x = \frac{2}{5}\cos\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5} + \frac{3}{5}\cos\operatorname{Arcsin}\frac{2}{5}$. En utilisant la formule $\cos\arcsin x = +\sqrt{1-x^2}$. On obtient $x = \frac{2}{5}\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{8}{25} + \frac{3\sqrt{21}}{25}$.
2. En prenant le cosinus de l'équation $\operatorname{Arccos} x = 2\operatorname{Arccos}\frac{3}{4}$ on obtient $x = \cos(2\operatorname{Arccos}\frac{3}{4})$ on utilise la formule $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$ et on arrive à : $x = 2(\frac{3}{4})^2 - 1 = \frac{1}{8}$.
3. En prenant la tangente et à l'aide de $\tan(a+b) = \cdots$ on obtient : $x = \tan 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} = \frac{4}{3}$.

Correction 5 1. Soit f la fonction sur $[-1,1]$ définie par $f(x) = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x$ alors $f'(x) = 0$ pour $x \in]-1,1[$ donc f est une fonction constante sur $[-1,1]$ (car continue aux extrémités). Or $f(0) = \frac{\pi}{2}$ donc pour tout $x \in [-1,1], f(x) = \frac{\pi}{2}$.

2. Soit $g(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$, la fonction est définie sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0,+\infty[$. On a $g'(x) = 0$ donc g est constante sur chacun des ses intervalle de définition. $g(x) = c_1$ sur $]-\infty,0[$ et $g(x) = c_2$ sur $]0,+\infty[$. En calculant $g(1)$ et $g(-1)$ on obtient $c_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $c_2 = +\frac{\pi}{2}$.

Correction 6 1. Si f existe alors pour $x = 1$ on a $f(\operatorname{ch} 1) = e$ et pour $x = -1$ on $f(\operatorname{ch} -1) = f(\operatorname{ch} 1) = 1/e$. Une fonction ne peut prendre deux valeurs différentes au même point (ici $t = \operatorname{ch} 1$).

2. Notons $X = e^x$, l'équation devient
$$f(X) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(X + \frac{1}{X}).$$
Comme la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$, alors l'unique façon de définir f sur $]0,+\infty[$ est par la formule $f(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$.

3. Comme e^x est toujours non nul, alors f peut prendre n'importe quelle valeur en 0. $f(0) = c \in \mathbb{R}$ et $f(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$ pour $t > 0$. Il y a une infinité de solutions. Mais aucune de ces solutions n'est continue car la limite de $f(t)$ quand $t > 0$ et $t \to 0$ est $+\infty$.

Correction 7 Réponses :

1. $+\infty$;
2. $\ln 2$.

Correction 8 Soit $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

1. $$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} = \frac{\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}}{2} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin(y + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos(y)}.$$
2. De même $\operatorname{sh} x = \tan y$.
3. $\operatorname{th} x = \sin y$.

Correction 9

$$x^y = y^x \Leftrightarrow e^{y \ln x} = e^{x \ln y} \Leftrightarrow y \ln x = x \ln y \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$$

(la fonction exponentielle est bijective). Etudions la fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $[1,+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0,$$

donc f est croissante sur $[1,e]$ et décroissante sur $[e,+\infty[$. Donc pour $z \in]0, f(e) = 1/e[$, l'équation $f(x) = z$ a exactement deux solutions, une dans $]1,e[$ et une dans $]e,+\infty[$.
Revenons à l'équation $x^y = y^x$ équivalente à $f(x) = f(y)$. Prenons y un entier, si $y = 1$ alors $f(y) = z = 0$ on doit donc résoude $f(x) = 0$ alors $x = 1$; si $y = 2$ alors il faut résoudre l'équation $f(x) = \frac{\ln 2}{2} \in]0, 1/e[$. Alors d'après l'étude précédente, il existe deux solutions une

sur $]0, e[$ qui est $x = 2$ (!) et une sur $]e, +\infty[$ qui est 4, en effet $\frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}$. Soit $2^2 = 2^2$ et $2^4 = 4^2$.
Si $y \geqslant 3$ alors $y > e$ donc il y a une solution x de l'équation $g(y) = g(y)$ dans $]e, +\infty$ qui $x = y$, et une solution dans l'intervalle $]1, e[$. Mais comme x est un entier alors $x = 2$, cas que nous avons déjà étudié.
Conclusion les couples d'entiers qui vérifient l'équation $x^y = y^x$ sont les couples $(x, y = x)$ et les couples $(2, 4)$ et $(4, 2)$.