Dérivabilité

1 Calculs

Exercice 1 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \qquad f_1(0) = 0;$$

$$f_2(x) = \sin x \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \qquad f_2(0) = 0;$$

$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} \text{ si } x \neq 1 \qquad f_3(1) = 1.$$

Exercice 2 Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ sinon}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 ; on note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 4 Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions f, g, h définies par :

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sin^2 x \quad ; \quad h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

2 Théorème de Rolle et accroissements finis

Exercice 5 Montrer que le polynôme P_n défini par

$$P_n(t) = \left[\left(1 - t^2\right)^n\right]^{(n)}$$

est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à $[-1, 1]$.

Exercice 6 Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ (a et b réels) admet au plus trois racines réelles.

Exercice 7 Soit f une fonction n fois dérivable sur $]a, b[$ s'annulant en $n + 1$ points de $]a, b[$. Montrer que si $f^{(n)}$ est continue,il existe un point x_0 de $]a, b[$ tel que $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Exercice 8 Dans l'application du théorème des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ préciser le nombre θ de $]\alpha, \beta[$. Interprétation géométrique ?

Exercice 9 Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

1. Montrer que
$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y.$$
2. On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par
$$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y) - \alpha \ln x - (1 - \alpha) \ln y.$$
De l'étude de f déduire que pour tout α de $]0, 1[$
$$\alpha \ln x + (1 - \alpha) \ln y < \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y).$$
Interprétation géométrique ?

Exercice 10 Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln x$ sur $[n, n + 1]$ montrer que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Exercice 11 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $|e^x - 1 - x| \leqslant \frac{x^2}{2} e^{|x|}$.

3 Divers

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1 - k)^3 x^2 + (1 + k)x^3$ où k est un nombre réel. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'origine est un extremum local de f.

Exercice 13 Déterminer les extremums de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 Quel est le lieu des points d'inflexion (puis des extrémums relatifs) de f_λ quand λ décrit $\mathbb{R}$, où :

$$f_\lambda : x \to \lambda e^x + x^2.$$

Exercice 15 (Examen 2000) Enoncer le théorème de Rolle pour une fonction $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ $(a < b)$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a, b[$. (Raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de Rolle.)
2. Posons $p = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a, b]$. Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a, b[$ tel que
$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3. On suppose que $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, où ℓ est un nombre réel. Montrer que
$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \ell.$$
4. Application : Calculer la limite suivante :
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\text{Arccos}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 16 (Examen 2000) Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante :
$$f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}, \quad x \geqslant 0.$$

1. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geqslant 0$.
   (b) En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.
2. (a) En déduire l'inégalité suivante :
$$(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$
   (b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ alors on a
$$(x+y)^n \leqslant 2^{n-1}(x^n+y^n).$$

Exercice 17 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(t) = \begin{cases} e^{1/t} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.
3. On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit
$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$
   où P_n est un polynôme.
   (a) Trouver P_1 et P_2.
   (b) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P'_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que f est de classe C^∞.

Dérivabilité

Indication 1 Le seul problème est en 0. f_1 est dérivable en 0 mais pas f_2 ni f_3.

Indication 2 Vous avez deux conditions : il faut que la fonction soit continue (car on veut qu'elle soit dérivable donc elle doit être continue) et ensuite la condition de dérivabilité proprement dite.

Indication 3 f est continue en 0 en la prologeant par $f(0) = 0$. f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Indication 4 On ne cherchera pas à utiliser la formule de Leibniz mais à linéariser les expressions trigonométriques.

Indication 5 Il faut appliquer le théorème de Rolle un fois au polynôme $(1-t^2)^n$ puis deux fois à sa dérivée première, puis trois fois à sa dérivée seconde...

Indication 6 On peut appliquer le théorème de Rolle plusieurs fois.

Indication 7 C'est encore Rolle de nombreuses fois

Indication 9

1. Utiliser le théorème des accroissement finis avec la fonction $t \mapsto \ln t$
2. Montrer d'abord que f'' est négative. Se servir du théorème des valeurs intermédiaires pour f'.

Indication 10 Une fois le théorème des accroissement finis utilisé vous obtenez une somme téléscopique.

Indication 11 Le théorème des accroissements finis donne un résultat proche de celui souhaité à un facteur près. Pour obtenir la mojoration demandée on peut utiliser le théorème de Rolle avec une fonction bien choisie.

Indication 14 On distinguera les cas $\lambda \geqslant 0$ et $\lambda < 0$. Pour le cas $\lambda < 0$ on considerera des sous-cas.

Dérivabilité

Correction 1 1. La fonction f_1 est dérivable en dehors de $x = 0$. Pour savoir si f_1 est dérivable en 0 regardons le taux d'accroissement :

$$\frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = x \cos \frac{1}{x}.$$

Mais $x\cos(1/x)$ tend vers 0 (si $x \to 0$) car $|\cos 1/x| \leqslant 1$. Donc le taux d'accroissement tend vers 0. Donc f_1 est dérivable en 0 et $f_1'(0) = 0$.

2. Encore une fois f_2 est dérivable en dehors de 0. Le taux d'accroissement en $x = 0$ est :

$$\frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \frac{\sin x}{x} \sin \frac{1}{x}$$

Nous savons que $\frac{\sin x}{x} \to 1$ et que $\sin 1/x$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite, donc f_2 n'est pas dérivable en 0.

3. La fonction f_3 s'écrit :

$$f_3(x) = \frac{|x||x-1|}{x-1}.$$

– Donc pour $x \leqslant 1$ on a $f_3(x) = x$, pour $0 \leqslant x < 1$ on $f_3(x) = -x$. Pour $x < 0$ on a $f_3(x) = x$.
– La fonction f_3 est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
– La fonction f_3 n'est pas continue en 1, en effet $\lim_{x\to 1+} f_3(x) = +1$ et $\lim_{x\to 1-} f_3(x) = -1$. Donc la fonction n'est pas dérivable en 1.
– La fonction f_3 est continue en 0. Le taux d'accroissement pour $x > 0$ est

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \frac{-x}{x} = -1$$

et pour $x < 0$,

$$\frac{f_3(x) - f_3(0)}{x - 0} = \frac{x}{x} = +1.$$

Donc le taux d'accroissement n'a pas de limite en 0 et donc f_3 n'est pas dérivable en 0.

Correction 2 Il faut d'abord que la fonction soit continue en $x = 1$. La limite à gauche est $\lim_{x\to 1^-} \sqrt{x} = +1$ et à droite $\lim_{x\to 1^-} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1$. Donc

$$a + b + 1 = 1.$$

Il faut maintenant que les dérivées à droites et à gauches soient égales : $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to 1^+} 2ax + b = 2a + b$. Donc

$$2a + b = \frac{1}{2}.$$

Le seul couple (a, b) solution des deux équations est $(a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2})$.

Correction 3 f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

1. Comme $|\sin 1/x| \leqslant 1$ alors f tend vers 0 quand $x \to 0$. Donc en posant $f(0) = 0$. la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Le taux d'accroissement est
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\frac{1}{x}.$$
Comme ci-dessus il y a une limite (qui vaut 0) en $x = 0$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
3. Sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$, Donc $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc f' n'est pas continue en 0.

Correction 4
1. Selon que $n \equiv 0[4], 1[4], 2[4], 3[4]$ alors $f^{(n)}(x)$ vaut respectivement $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$.
2. La dérivée de $\sin^2 x$ est $2 \sin x \cos x = \sin 2x$. Et donc les dérivées suivantes seront : $2\cos 2x, -4\cos 2x, 8\sin 2x, 16\cos 2x$,... Et selon que $n \equiv 1[4], 2[4], 3[4], 0[4]$, alors $g^{(n)}(x)$ vaut respectivement $2^{n-1}\sin 2x$, $2^{n-1}\cos 2x$, $-2^{n-1}\sin 2x$, $-2^{n-1}\cos 2x$.
3. $\sin(x)^3 + \cos(x)^3 = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x) + \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$ et on dérive...

Correction 5 $Q_n(t) = (1 - t^2)^n$ est un polynôme de degré $2n$, on le dérive n fois, on obtient un polynôme de degré n. -1 et $+1$ sont des racines d'ordre n de Q_n, donc $Q_n(1) = Q_n'(1) = \ldots = Q_n^{(n-1)}(1) = 0$, même chose en -1. $Q(-1) = 0 = Q(+1)$ donc d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]-1, 1[$ telle que $Q_n'(c) = 0$. Donc $Q_n'(-1) = 0$, $Q_n'(c) = 0$, $Q_n'(-1) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle deux fois (sur $[-1, c]$ et sur $[c, +1]$), on obtient l'existence de racines d_1, d_2 pour Q_n'', auxquelles il faut rajouter -1 et $+1$. On continue ainsi par récurrence. On obtient pour $Q_n^{(n-1)}$, $n+1$ racines : $-1, e_1, \ldots, e_{n-1}, +1$. Nous appliquons le théorème de Rolle n fois. Nous obtenons n racines pour $P_n = Q_n^{(n)}$. Par constructions ces racines sont réelles distinctes (donc simples). Comme un polynôme de degré n a au plus n racines, nous avons obtenu toutes les racines.

Correction 6
1. Par l'absurde on suppose qu'il y a (au moins) quatre racine distinctes pour $P_n(X) = X^n + aX + b$. Notons les $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Par le théorème de Rolle appliqué trois fois (entre x_1 et x_2, entre x_2 et x_3,...) il existe $x_1' < x_2' < x_3'$ des racines de P_n'. On applique deux fois Rolle entre x_1' et x_2' et entre x_2' et x_3'. On obtient deux racines distinctes pour P_n''. Or $P_n'' = n(n-1)X^{n-2}$ ne peut avoir que 0 comme racines. Donc nous avons obtenu une contradiction.
2. Autre méthode : Le résultat est évident si $n \leqslant 3$. On suppose donc $n \geqslant 3$. Soit P_n l'application $X \mapsto X^n + aX + b$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Alors $P_n'(X) = nX^{n-1} + a$ s'annulle en au plus deux valeurs. Donc P_n est successivement croissante-décroissante-croissante ou bien décroissante-croissante-décroissante. Et donc P_n s'annule au plus trois fois.

Correction 7 Comme f' est dérivable, elle est continue. Comme f s'annulle $n+1$ fois, f' change de signe (au moins) $n+1$ fois donc s'annulle (au moins) n fois. On peut bien sûr recommencer, le résultat en découle.

Correction 8 $f(\beta) - f(\alpha) = f'(c)(\beta - \alpha)$. Donc $a(\beta^2 - \alpha^2) + b(\beta - \alpha) = (2ac + b)(\beta - \alpha)$. Donc $c = \frac{\alpha+\beta}{2}$.
Géométriquement, cela signifie que la droite qui passe par $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$, est parallèle à la tangente qui passe en $(\frac{\alpha+\beta}{2}, f(\frac{\alpha+\beta}{2}))$.

Correction 9 1. Soit $g(t) = \ln t$. Appliquons le théorème des accroissement finis sur $[x, y]$. Il existe $c \in]x, y[$, $g(y) - g(x) = g'(c)(y - x)$. Soit $\ln y - \ln x = \frac{1}{c}(y - x)$. Donc $\frac{\ln y - \ln x}{y - x} = \frac{1}{c}$. Or $x < c < y$ donc $\frac{1}{y} < \frac{1}{c} frac1x$. Ce qui donne les inégalités recherchées.

2. $f'(\alpha) = \frac{x-y}{\alpha x + (1-\alpha)y} - \ln x + \ln y$. Et $f''(\alpha) = -\frac{(x-y)^2}{(\alpha x + (1-\alpha)y)^2}$. Comme f'' est négative alors f' est décroissante sur $[0, 1]$. Or $f'(0) = \frac{x-y-y(\ln x - \ln y)}{y} > 0$ d'après la première question et de même $f'(1) < 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [x, y]$ tel que $f'(c) = 0$. Maintenant f' est positive sur $[0, c]$ et négative sur $[c, 1]$. Donc f est croissante sur $[0, c]$ et décroissante sur $[c, 1]$. Or $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$ donc pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \geqslant 0$. Cela prouve l'inégalité demandée.
3. Géométriquement nous avons prouver que la fonction ln est concave, c'est-à-dire que la corde (le segment qui va de $(x, f(x))$ à $(y, f(y))$ est sous la courbe d'équation $y = f(x)$.

Correction 10 Le théorème des accroissement finis donne : $\ln(n+1) - \ln(n) = \frac{1}{c_n}(n+1-n) = \frac{1}{c_n}$, avec $c_n \in [n, n+1]$. Or $c_n \geqslant n$ donc $\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{c_n}$. Donc :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1).$$

La dernière égalité s'obtient car la somme est téléscopique. Donc $S_n \geqslant \ln(n+1)$, donc $S_n \to +\infty$.

Correction 11 Pour simplifier nous supposons $x > 0$.

1. Appliquer le théorème des accroissements finis ne va pas être suffisant. En effet, soit $f(x) = e^x - 1 - x$. Alors il existe $c \in]0, x[$ tel que $f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$. Soit $f(x) = (e^c - 1)x$. Soit maintenant $g(x) = e^x - 1$ alors, par le théorème des accroissements finis sur $[0, c]$ il existe $d \in]0, c[$ tel que $g(c) - g(0) = g'(d)(c - 0)$, soit $e^c - 1 = e^d c$. Donc $e^x - 1 - x = f(x) = (e^c - 1)x = e^d cx$. Comme $d \leqslant c \leqslant x$, alors $e^x - 1 - x \leqslant e^x x^2$.
   Cela donne une inégalité, mais il manque un facteur 1/2.
2. Nous allons obtenir l'inégalité par application du théorème de Rolle. Soit maintenant $f(t) = e^t - 1 - t - k\frac{t^2}{2}$. Nous avons $f(0) = 0$, $x > 0$ étant fixé, nous choisisons k tel que $f(x) = 0$, (un tel k existe car $e^x - 1 - x > 0$ et $x^2 > 0$). Comme $f(0) = 0 = f(x)$ alors par Rolle il existe $c \in]0, x[$ tel que $f'(c) = 0$. Mais $f'(t) = e^t - t - kt$, donc $f'(0) = 0$. Maintenant $f'(0) = 0 = f'(c)$ donc il existe (par Rolle toujours !) $d \in]0, c[$ tel que $f''(d) = 0$. Or $f''(t) = e^t - k$, donc $f''(d) = 0$ donne $k = e^d$. Ainsi $f(x) = 0$ devient $e^x - 1 - x = e^d \frac{x^2}{2}$. Comme $d \leqslant x$ alors $e^x - 1 - x \leqslant e^x \frac{x^2}{2}$.

Correction 12 $f'(x) = 2(1-k)^3 x + 3(1+k)x^2$, $f''(x) = 2(1-k)^2 + 6(1+k)x$. Nous avons $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 2(1-k)^3$. Donc si $k \neq 1$ alors 0 est un extremum local. Si $k = 1$ alors $f(x) = 2x^3$ et 0 n'est pas un extremum local.

Correction 13 $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$ donc les extremums sont dans $\{0, \frac{3}{4}\}$. Comme $f''(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x - 1)$. Alors f'' ne s'annule pas en $\frac{3}{4}$ donc $\frac{3}{4}$ donne un extremum (minimum absolu). Par contre $f''(0) = 0$ et $f'''(0) \neq 0$ donc 0 est un point d'inflexion qui n'est pas un extremum (même pas relatif, pensez à x^3).

Correction 14 1. $f'_\lambda(x) = \lambda e^x + 2x$, $f''_\lambda(x) = \lambda e^x + 2$. Les points d'inflexions sont les racines de f''_λ, donc si $\lambda \geqslant 0$ il n'y a pas de point d'inflexion, si $\lambda < 0$ alors il y a un point d'inflexion en $x_\lambda = \ln(-2/\lambda)$.

2. Si $\lambda \geqslant 0$ alors f''_λ est toujours strictement positive, donc f'_λ est strictement croissante, en $-\infty$ f'_λ est négative, en $+\infty$ f'_λ est positive donc il existe un unique réel y_λ tel que $f'_\lambda(y_\lambda) = 0$. f_λ est décroissante sur $]-\infty, y_\lambda]$ et croissante sur $[y_\lambda, +\infty[$. Et en y_λ nous avons un extremum absolu.
3. Nous supposons $\lambda < 0$. Alors f''_λ s'annule seulement en x_λ. f'_λ est croissante sur $]-\infty, x_\lambda]$ et décroissante sur $[x_\lambda, +\infty[$. Donc f'_λ est des racines si et seulement si $f'(x_\lambda) \geqslant 0$. Or $f'(x_\lambda) = -2 + 2x_\lambda$.
   (a) Si $\lambda = -2/e$ alors $f'_\lambda(x_\lambda) = 0$. comme $f''_\lambda(x_\lambda) = 0$. et f'''_λ ne s'annule pas. Alors x_λ n'est pas un extremum local.
   (b) Si $\lambda > -2/e$ alors $f'_\lambda(x_\lambda) < 0$ donc f'_λ est négative donc f est strictement décroissante. Il n'y a pas d'extremum local.
   (c) Si $-2/e < \lambda < 0$ alors $f'_\lambda(x_\lambda) > 0$. Donc f'_λ s'annule en deux points, une fois sur $]-\infty, x_\lambda[$ et une sur $]x_\lambda, +\infty[$. Ce sont des extremums locaux (minimum et maximum respectivement).

Correction 15 1. Le théorème de Rolle dit que si $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ et dérivable sur l'ouvert $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$.

2. (a) Supposons par l'absurde, qu'il existe $x_0 \in]a,b]$ tel que $g(x_0) = g(a)$. Alors en appliquant le théorème de Rolle à la restriction de g à l'intervalle $[a, x_0]$ (les hypothèses étant clairement vérifiées), on en déduit qu'il existe $c \in]a, x_0[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui contredit les hypothèses faites sur g. Par conséquent on a démontré que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a,b]$.
   (b) D'après la question précédente, on a en particulier $g(b) \neq g(a)$ et donc p est un nombre réel bien défini et $h = f - p \cdot g$ est alors une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Un calcul simple montre que $h(a) = h(b)$. D'après le théorème de Rolle il en résulte qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$. Ce qui implique la relation requise.
   (c) Pour chaque $x \in]a,b[$, on peut appliquer la question 2.b aux restrictions de f et g à l'intervalle $[x,b]$, on en déduit qu'il existe un point $c(x) \in]x,b[$, dépendant de x tel que

$$(*) \qquad \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

   Alors, comme $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \ell$ et $\lim_{x\to b^-} c(x) = b$, on en déduit en passant à la limite dans $(*)$ que

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \ell.$$

   Ce résultat est connu sous le nom de "Théorème de l'Hôpital".
3. Considérons les deux fonctions $f(x) = \operatorname{Arccos} x$ et $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ pour $x \in [0,1]$. Il est clair que ces fonctions sont continues sur $[0,1]$ et dérivables sur $]0,1[$ et que $f'(x) = -1/\sqrt{x^2-1}$ et que $g'(x) = -x/\sqrt{x^2-1} \neq 0$ pour tout $x \in]0,1[$. En appliquant les résultats de la question 2, on en déduit que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{Arccos} x}{\sqrt{x^2-1}} = 1.$$

Correction 16 1. (a) Il est clair que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ puisque c'est une fonction rationnelle sans pôle dans cet intervalle. De plus d'après la formule de la dérivée d'un quotient, on obtient

$$f'(x) = \frac{n(x^n - 1)}{(1+x)^{n+1}}, \ x \geqslant 0.$$

(b) Il résulte clairement de l'expression précédente que $f'(x)$ est du signe de $x^{n+1} - 1$ sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent on obtient : $f'(x) \leqslant 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 1$. Il en résulte que f est décroissante sur $[0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$ et par suite f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^+$ au point 1 et ce minimum vaut $f(1) = 2^{1-n}$.

2. (a) Il résulte de la question 1.b que $f(x) \geqslant f(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et donc

$$(1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

(b) En appliquant l'inégalité précédente avec $x = b/a$, on en déduit immédiatement l'inégalité requise.

Correction 17 1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de fonctions dérivables, et sur $\mathbb{R}_-^*$ car elle est nulle sur cet intervalle ; étudions donc la dérivabilité en 0.
On a

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \begin{cases} e^{1/t}/t & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

or $e^{1/t}/t$ tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs négatives. Donc f est dérivable à gauche et à droite en 0 et ces dérivées sont identiques, donc f est dérivable et $f'(0) = 0$.

2. On a

$$f'(t) = \begin{cases} -e^{1/t}/t^2 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

donc le taux d'accroissement de f' au voisinage de 0 est

$$\frac{f'(t) - f'(0)}{t} = \begin{cases} -e^{1/t}/t^3 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

et il tend vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures comme inférieures. Donc f admet une dérivée seconde en 0, et $f''(0) = 0$.

3. (a) On a déjà trouvé que $f'(t) = -e^{1/t}/t^2$, donc $f'(t) = P_1(t)/t^2 e^{1/t}$ si on pose $P_1(t) = 1$. Par ailleurs, $f''(t) = e^{1/t}/t^4 + e^{1/t}(-2/t^3) = \frac{1-2t}{t^4}e^{1/t}$ donc la formule est vraie pour $n = 2$ en posant $P_2(t) = 1 - 2t$.

(b) Supposons que la formule est vraie au rang n. Alors $f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{1/t}$ d'où

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= \frac{P_n'(t)t^{2n} - P_n(t)(2n)t^{2n-1}}{t^{4n}}e^{1/t} + \frac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{1/t}(-1/t^2) \\ &= \frac{P_n'(t)t^2 - (2nt+1)P_n(t)}{t^{2(n+1)}}e^{1/t} \end{aligned}$$

donc la formule est vraie au rang $n + 1$ avec

$$P_{n+1}(t) = P_n'(t)t^2 - (2nt+1)P_n(t).$$

4. Sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ f est indéfiniment dérivable, donc il suffit d'étudier ce qui se passe en 0.

   Montrons par récurrence que f est indéfiniment dérivable en 0, et que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} = 0$. On sait que c'est vrai au rang 1. Supposons que f est n-fois dérivable, et que $f^{(n)} = 0$. Alors le taux d'accroissement de $f^{(n)}$ en 0 est :

$$\frac{f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)}{t} = \begin{cases} P_n(t)e^{1/t}/t^{2n} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

   et sa limite est 0 quand t tend vers 0 par valeurs supérieures comme inférieures. Donc $f^{(n)}$ est dérivable en 0, et $f^{(n+1)}(0) = 0$. Donc l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $n+1$.

   Par conséquent, f est de classe C^∞.