Continuité

1 Théorie

Exercice 1 (Partiel Novembre 96) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I.

1. Soit $a \in I$. Donner une raison pour laquelle :
$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\right) \Rightarrow \left(\lim_{x\to a} |f(x)| = |f(a)|\right).$$
2. On suppose que f et g sont continues sur I. En utilisant l'implication démontrée ci-dessus, la relation $\mathrm{Sup}\,(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$, et les propriétés des fonctions continues, montrer que la fonction $\mathrm{Sup}\,(f,g)$ est continue sur I.

Exercice 2 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

Exercice 4 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante, montrer qu'elle a un point fixe. *Indication* : étudier
$$E = \{x \in [0,1] | \forall t \in [0,x], f(t) > t\}.$$

Exercice 5 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue telle que $f^2 = f\,(*)$. On note $E_f = \{x \in [0,1] | f(x) = x\}$. Montrer que $E_f \neq \emptyset$ puis que c'est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Trouver toutes les solutions de $(*)$.

Exercice 6 Une fonction qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires est-elle nécessairement continue ?

Exercice 7 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On veut démontrer que
$$\sup_{a<x<b} f(x) = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

1. Montrer que
$$\sup_{a<x<b} f(x) \leqslant \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$
Pour cela, on pourra montrer que $\sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$ est un majorant de f sur $]a,b[$.
2. Soit $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. Montrer que $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$ en distinguant les trois cas : $x_0 = a, x_0 = b, x_0 \in]a,b[$. *Indication :* Dans le cas $x_0 = a$, par exemple, on pourra considérer la suite de réels $a_n = a + 1/n$ et étudier la suite $(f(a_n))$.
3. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $g(x) = 1$ si $x = 1$. Montrer que
$$\sup_{0<x<1} g(x) \neq \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x).$$
Quelle hypothèse est essentielle dans la propriété démontrée auparavant ?

2 Pratique

Exercice 8 Etudier la continuité de f la fonction réelle à valeurs réelles définie par $f(x) = (\sin x)/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Exercice 9 Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$a)\ f(x) = \sin x \sin(\frac{1}{x})\ ; \quad b)\ f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ;$$

$$c)\ f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\ .$$

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

3 Étude de fonctions

Exercice 11 Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3\,x}{5-2\,x}}\ ; \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 2\,x - 5}\ ; \quad h(x) = \ln(4\,x + 3)$$

Exercice 12 (Partiel Novembre 96) Soit

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}.$$

Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$, minorée sur $\mathbb{R}$.
Déterminer $\mathrm{Sup}_{\,x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Continuité

Indication 1 1. On pourra utiliser la variante de l'inégalité triangulaire $|x-y| \geqslant \big| |x|-|y| \big|$.

2. Utiliser la première question pour montrer que $|f-g|$ est continue.

Indication 2 Ce n'est pas très dur mais il y a quand même quelque chose à démontrer : ce n'est pas parce que $f(x)$ vaut $+1$ ou -1 que la fonction est constante. Raisonner par l'absurde et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Indication 3 Il faut raisonner en deux temps : d'abord écrire la défition de la limite en $+\infty$, en fixant par exemple $\varepsilon = 1$, cela donne une borne sur $[A, +\infty]$. Puis travailler sur $[0, A]$.

Indication 4 Montrer que $c = \sup E$ est un point fixe. Pour cela montrer que $f(c) \leqslant c$ puis $f(c) \geqslant c$.

Indication 6 Non, trouver un contre-exemple.

Indication 8 Le seul problème est en $x = 0$. Montrer que la fonction est bien continue en ce point.

Indication 9 Oui pour le deux premières en posant $f(0) = 0$, non pour la troisième.

Indication 10 Pour x fixé étudier la suite $f(\frac{1}{2^n}x)$.

Continuité

Correction 1

1. On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ $|x-y| \geqslant \big|\,|x|-|y|\,\big|$ (c'est la deuxième formulation de l'inégalité triangulaire). Donc pour tout $x \in I$: $\big|\,|f(x)|-|f(a)|\,\big| \leqslant |f(x)-f(a)|$. L'implication annoncée résulte alors immédiatement de la définition de l'assertion $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
2. Si f, g sont continues alors $\alpha f + \beta g$ est continue sur I, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Donc les fonctions $f+g$ et $f-g$ sont continues sur I. L'implication de 1. prouve alors que $|f-g|$ est continue sur I, et finalement en réutilisant l'argument donné ci dessus, on peut conclure : La fonction $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ est continue sur I.

Correction 2 Comme $f(x)^2 = 1$ alors $f(x) = \pm 1$. (Atttention ! Cela ne veut pas dire que la fonction est constante égale à 1 ou -1.) Suposons, par exemple, qu'il existe x tel que $f(x) = +1$. Montrons que f est constante égale à $+1$. S'il existe $y \neq x$ tel que $f(y) = -1$ alors f est positive en x, négative en y et continue sur I. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe z entre x et y tel que $f(z) = 0$, ce qui contredit $f(z)^2 = 1$. Donc f est constante égale à $+1$.

Correction 3 Notons ℓ la limite de f en $+\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad x > A \Rightarrow \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon.$$

Fixons $\varepsilon = +1$, nous obtenons un A correspondant tel que pour $x > A$, $f(x) \leqslant \ell + 1$. Nous venons de montrer que f est bornée "à l'infini". La fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, A]$, donc f est bornée sur cet intervalle : il existe M tel que pour tout $x \in [0, A]$, $f(x) \leqslant M$. En prenant $M' = \max(M, \ell + 1)$, nous avons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant M'$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.
La fonction n'atteint pas nécessairement ses bornes : regardez $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Correction 4

1. Soit $f(0) = 0$ et c'est fini, on a trouver le point fixe ! Soit $f(0)$ n'est pas nul. Donc $f(0) > 0$ et $0 \in E$. Donc E n'est pas vide.
2. Maintenant E est un partie de $[0, 1]$ non vide donc $\sup E$ existe et est fini. Notons $c = \sup E \in [0, 1]$. Nous allons montrer que c est un point fixe.
3. Soit (x_n) une suite de E telle que $x_n \to c$ et $x_n \leqslant c$. Une telle suite existe d'après les propriétés de $c = \sup E$. Comme $x_n \in E$ alors $x_n < f(x_n)$. Et comme f est croissante $f(x_n) \leqslant f(c)$. Donc pour tout n, $x_n < f(c)$; comme $x_n \to c$ alors à la limite nous avons $c \leqslant f(c)$.
4. Soit (y_n) une suite telle que $y_n \to c$, $y_n \leqslant c$ et telle que $f(y_n) \leqslant y_n$. Une telle suite existe car sinon ℓ ne serait pas égal à $\sup E$. Nous avons $f(c) \leqslant f(y_n) \leqslant y_n$ et donc à la limite $f(c) \leqslant c$.
   Nous concluons donc que $c \leqslant f(c) \leqslant c$, donc $f(c) = c$ et c est un point fixe de f.

Correction 5

1. Soit $x \in [0, 1]$ et $y = f(x) \in [0, 1]$. Alors $f(y) = y$ car $f(f(x)) = f(x)$. Donc $E_f \neq \varnothing$. Nous venons de montrer que $I = f([0, 1])$ est inclus dans E_f.

2. Montrons réciproquement E_f est inclus dans I. Soit $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$ alors $x \in I = f([0,1])$ (car $x = f(x)$!). Ainsi $E_f = f([0,1])$. Mais l'image de l'intervalle $[0,1]$ par la fonction continue f est un intervalle donc E_f est un intervalle.
3. Les fonctions continues qui vérifient $(*)$ sont les fonctions qui vérifient $E_f = f([0,1])$.

Correction 6 Non, par exemple $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Avec $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. f n'est pas continue (en 0), mais pour tout a, b et pour tout $y \in [f(a), f(b)]$ il existe $x \in [a,b]$ tel que $y = f(x)$.

Correction 7

1. Pour tout $x \in]a,b[$, on a $x \in [a,b]$ donc $f(x) \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$. Par conséquent $\sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$ est un majorant de f sur l'intervalle $]a,b[$, donc il est plus grand que le plus petit des majorants : $\sup_{a<x<b} f(x) \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$.
2. f est continue sur un intervalle fermé et borné, donc elle est bornée et elle atteint ses bornes. Soit x_0 le réel où le maximum est atteint :$f(x_0) = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$.
   - si $x_0 = a$, considérons la suite $a_n = a + 1/n$. Pour $n \geqslant \frac{1}{b-a}$ on a $a_n \in [a,b]$, donc on peut considérer la suite $(f(a_n))_{n \geqslant \frac{1}{b-a}}$. Or a_n tend vers a quand n tend vers $+\infty$, et comme f est continue, ceci implique que $f(a_n)$ tend vers $f(a)$ quand n tend vers $+\infty$. Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(a_n) \leqslant f(x_0)$, ce qui implique que $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$.
   - si $x_0 = b$ on obtient le résultat de manière identique en considérant la suite $b_n = b - 1/n$.
   - si $a < x_0 < b$: $f(x_0)$ est majoré par le sup de f sur $]a,b[$, donc
   $$f(x_0) \leqslant \sup_{a<x<b} f(x) \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) = f(x_0)$$
   donc $f(x_0) = \sup_{a<x<b} f(x)$.
3. Avec la fonction g, on a $\sup_{0<x<1} g(x) = 0$ car $\forall x \in]0,1[, g(x) = 0$, et $\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} g(x) = 1$ car $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. La propriété démontrée précédemment n'est pas vraie dans notre cas, car la fonction g ne remplit pas la condition essentielle d'être continue.

Correction 8 Soit $x_0 \neq 0$, alors la fonction f est continue en x_0, car elle s'exprime sous la forme d'un quotient de fonctions continues où le dénominateur ne s'annule pas en x_0. Reste à étudier la continuité en 0. Mais
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$$
donc f est continue en 0.

Correction 9

1. La fonction en définie sur $\mathbb{R}^*$. Et elle est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il faut déterminer un éventuel prolongement par continuité en $x = 0$, c'est-à-dire savoir si f a une limite en 0.
   $$|f(x)| = |\sin x||\sin 1/x| \leqslant |\sin x|.$$
   Donc f a une limite en 0 qui vaut 0. Donc en posant $f(0) = 0$, nous obtenons une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est continue.
2. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la situation en 0. f est la taux d'accroissement en 0 de la fonction $g(x) = \ln\frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Donc si les objets suivants existent : la limie de f en 0 est égale à la valeur de g' en 0. Calculons g' sur $\mathbb{R}^*$:
   $$g'(x) = \left(\ln\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$
   Quand $x \to 0$ alors le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 2, donc $g'(x)$ tend vers 0. Donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$. En posant $f(0) = 0$ nous obtenons une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$.

3. f est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1+x}{(1-x)(1+x)} == \frac{-1}{(1+x)}.$$

Donc f a pour limite $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1. Et donc en posant $f(1) = -\frac{1}{2}$, nous définissons une fonction continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. En -1 la fonction f ne peut être prolongée continuement, car en -1, f n'admet de limite finie.

Correction 10 Soit $x \in \mathbb{R}$, comme $f(y) = f(2y)$ en prenant $y = x/2$ nous obtenons $f(\frac{1}{2}x) = f(x)$. Puis en prenant $y = \frac{1}{4}x$, nous obtenons $f(\frac{1}{4}x) = f(\frac{1}{2}x) = f(x)$. Par une récurrence facile nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(\frac{1}{2^n}x) = f(x).$$

Notons (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{2^n}x$ alors $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Par la continuité de f en 0 nous savons alors que : $f(u_n) \to f(0)$ quand $n \to +\infty$. Mais $f(u_n) = f(\frac{1}{2^n}x) = f(x)$, donc $(f(u_n))_n$ est une suite constante égale à $f(x)$, et donc la limite de cette suite est $f(x)$! Donc $f(x) = f(0)$. Comme ce raisonnement est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous venons de montrer que f est une fonction constante.

Correction 11

1. Il faut que le dénominateur ne s'annule pas donc $x \neq \frac{5}{2}$. En plus il faut que le terme sous la racine soit positif ou nul, c'est-à-dire $(2 + 3x) \times (5 - 2x) \geqslant 0$, soit $x \in [-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}]$. L'ensemble de définition est donc $[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}[$.
2. Il faut $x^2 - 2\,x - 5 \geqslant 0$, soit $x \in]-\infty, 1-\sqrt{6}] \cup [1+\sqrt{6}, +\infty[$.
3. Il faut $4x + 3 > 0$ soit $x > -\frac{3}{4}$, l'ensemble de définition étant $]-\frac{3}{4}, +\infty[$.

Correction 12 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$0 \leqslant |f(x)| = \frac{|\cos x|}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1.$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [-1, 1]$ donc f est minorée (-1 est un minorant), majorée (1 est un majorant) et $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) \leqslant 1$. Comme $f(0) = 1$ on a nécessairement $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) \geqslant 1$. Conclusion :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1.$$