# Limites de fonctions

## 1 Théorie

**Exercice 1**
1. Démontrer que $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$.
2. Soient $m, n$ des entiers positifs. Étudier $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$.
3. Démontrer que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2} - 1) = \frac{1}{2}$.

**Exercice 2**
1. Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en $+\infty$.

## 2 Calculs

**Exercice 3** Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

$a)$ $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+2\,|x|}{x}$ $b)$ $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2\,|x|}{x}$ $c)$ $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3\,x+2}$

$d)$ $\lim_{x \to \Pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ $e)$ $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ $f)$ $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$

$g)$ $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ $h)$ $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$

**Exercice 4** Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.
1. $\lim_{x \to 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln x}$
2. $\lim_{x \to 0^+} 2x \ln(x + \sqrt{x})$
3. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \ln x}$
4. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$
5. $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$
6. $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln(x+1)}$
7. $\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x+1} \ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right)$
8. $\lim_{x \to (-1)^+} (x^2 - 1) \ln(7x^3 + 4x^2 + 3)$

9. $\lim\limits_{x\to 2^+} (x-2)^2 \ln(x^3-8)$

10. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x(x^x-1)}{\ln(x+1)}$

11. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x\ln x - x\ln(x+2))$

12. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x - e^{x^2}}{x^2-x}$

13. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x}$

14. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^x$

15. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$

16. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}}$

17. $\lim\limits_{x\to 0^+} \big(\ln(1+x)\big)^{\frac{1}{\ln x}}$

18. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}}$

19. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$

20. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$

**Exercice 5** Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)},$$

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x},$$

$$\lim_{x\to \alpha^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}},$$

$$\lim_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^x-e^2}{x^2+x-6},$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2 x}, \text{ en fonction de } \alpha \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 6** Calculer :

$$\lim_{x\to\infty} (\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}.$$

**Exercice 7** Trouver :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{x^x} \ln x}{x^x - 1}$$

**Exercice 8** Trouver pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ :

$$\lim_{x \to \infty} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

**Exercice 9** Trouver pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ :

$$\lim_{x \to 0^+} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

# Limites de fonctions

***Indication 1*** Utiliser l'expression conjuguée.

***Indication 2***

1. Raisonner par l'absurde.
2. Montrer que la limite est la borne supérieure de l'ensemble des valeurs atteintes $f(\mathbb{R})$.

***Indication 5***

1. Calculer d'abord la limite de $f(x) = \frac{x^k - \alpha}{x - \alpha}$.
2. Utiliser $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et faire un changement de variable $u = \cos x$.
3. Utiliser l'expression conjuguée.
4. Diviser numérateur et dénominateur par $\sqrt{x - \alpha}$ puis utiliser l'expression conjuguée.
5. On a toujours $y - 1 \leqslant E(y) \leqslant y$, poser $y = 1/x$.
6. Diviser numérateur et dénominateur par $x - 2$.
7. Pour $\alpha \geqslant 4$ il n'y a pas de limite, pour $\alpha < 4$ la limite est $+\infty$.

# Limites de fonctions

***Correction 1*** Généralement pour calculer des limites faisant intervenir des sommes racines carrées, il est utile de faire intervenir "l'expression conjuguées" :

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Les racines au numérateur ont "disparu" en utilisant l'identité $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$.
Appliquons ceci sur un exemple :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n} \\
&= \frac{(\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m})((\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}))}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})} \\
&= \frac{1+x^m-(1-x^m)}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})} \\
&= \frac{2x^m}{x^n(\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m})} \\
&= \frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}}
\end{aligned}$$

Et nous avons

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x^m}+\sqrt{1-x^m}}=1.$$

Donc l'étude de la limite de $f$ en 0 est la même que celle de la fonction $x\mapsto x^{m-n}$.
Distinguons plusieurs pour la limite de $f$ en 0.
- Si $m>n$ alors $x^{m-n}$ et donc $f(x)$ tend vers 0.
- Si $m=n$ alors $x^{m-n}$ et $f(x)$ vers 1.
- Si $m<n$ alors $x^{m-n}=\frac{1}{x^{n-m}}=\frac{1}{x^k}$ avec $k=n-m$ un exposant positif. Si $k$ est pair alors les limites à droite et à gauche de $\frac{1}{x^k}$ sont $+\infty$. Pour $k$ impair la limite à droite vaut $+\infty$ et la limite à gauche vaut $-\infty$. Conclusion pour $k=n-m>0$ pair, la limite de $f$ en 0 vaut $+\infty$ et pour $k=n-m>0$ impair $f$ *n'a pas de limite en* 0 car les limites à droite et à gauche ne sont pas égales.

***Correction 2***

1. Soit $p>0$ la période : pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x+p)=f(x)$. Par une récurrence facile on montre :

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad\forall x\in\mathbb{R}\qquad f(x+np)=f(x).$$

   Comme $f$ n'est pas constante il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $f(a)\neq f(b)$. Notons $x_n=a+np$ et $y_n=b+np$. Supposons que $f$ a une limite $\ell$ en $+\infty$. Comme $x_n\to+\infty$ alors $f(x_n)\to\ell$. Mais $f(x_n)=f(a+np)=f(a)$, donc $\ell=f(a)$. De même avec la suite $(y_n)$ : $y_n\to+\infty$ donc $f(y_n)\to\ell$ et $f(y_n)=f(b+np)=f(b)$, donc $\ell=f(b)$. Comme $f(a)\neq f(b)$ nous obtenons une contradiction.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et majorée par $M \in \mathbb{R}$. Notons
$$f = f(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$
$F$ est un ensemble (non vide) de $\mathbb{R}$, notons $\ell = \sup F$. Comme $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de $F$, alors $\ell < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, par les propriétés du sup il existe $y_0 \in F$ tel que $\ell - \varepsilon \leqslant y_0 \leqslant \ell$. Comme $y_0 \in F$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = y_0$. Comme $f$ est croissante alors :
$$\forall x \geqslant x_0 \qquad f(x) \geqslant f(x_0) = y_0 \geqslant \ell - \varepsilon.$$
De plus par la définition de $\ell$ :
$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ f(x) \leqslant \ell.$$
Les deux propriétés précédentes s'écrivent :
$$\forall x \geqslant x_0 \qquad \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell.$$
Ce qui exprime bien que la limite de $f$ en $+\infty$ est $\ell$.

***Correction 3*** 1. La limite à droite vaut $+2$, la limite à gauche $-2$ donc il n'y a pas de limite.
2. $-\infty$
3. $4$
4. $2$
5. $\frac{1}{2}$
6. $0$
7. $\frac{1}{3}$ en utilisant que $a^3 - 1 = (a-1)(1+a+a^2)$ pour $a = \sqrt[3]{1+x^2}$.
8. $\frac{1}{n}$

***Correction 4*** 1. $-\infty$
2. $0$
3. $+\infty$
4. $+\infty$
5. $\frac{3}{2}$
6. $-\infty$
7. $0$
8. $0$
9. $0$
10. $0$
11. $-2$
12. $-\infty$
13. $1$
14. $e^4$
15. $1$
16. $e$

17. $e$
18. 0
19. 0
20. 0

***Correction 5*** 1. Montrons d'abord que la limite de
$$f(x)=\frac{x^k-\alpha}{x-\alpha}$$
en $\alpha$ est $k\alpha^{k-1}$. Un calcul montre que $f(x)=x^{k-1}+\alpha x^{k-2}+\alpha^2x^{k-3}+\cdots+\alpha^{k-1}$, et donc la limite en $x=\alpha$ est $k\alpha^{k-1}$. Une autre méthode consiste à dire que $f(x)$ est la taux d'accroissement de la fonction $x^k$, et donc la limite de $f$ en $\alpha$ est exactement la valeur de la dérivée de $x^k$ en $\alpha$, soit $k\alpha^{k-1}$. Ayant fait ceci revenons à la limite de l'exercice : comme
$$\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n}=\frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x-\alpha}\times\frac{x-\alpha}{x^n-\alpha^n}.$$
Le premier terme du produit tend vers $(n+1)\alpha^n$ et le second terme, étant l'inverse d'un taux d'accroissement, tend vers $1/(n\alpha^{n-1})$. Donc la limite cherchée est
$$\frac{(n+1)\alpha^n}{n\alpha^{n-1}}=\frac{n+1}{n}\alpha.$$

2. La fonction s'écrit aussi $f(x)=\frac{1-\cos x}{\cos x(\cos 2x-\cos x)}$. Or $\cos 2x=2\cos^2x-1$. Posons $u=\cos x$, alors
$$f(x)=\frac{1-u}{u(2u^2-u-1)}=\frac{1}{u(-1-2u)}$$
Lorsque $x$ tend vers 0, $u=\cos x$ tend vers 1, et donc $f(x)$ tend vers $-\frac{1}{3}$.

3. $$\begin{aligned}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}&=\frac{(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}\\&=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sqrt{x}}\\&=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1}\end{aligned}$$

Quand $x\to+\infty$ alors $\frac{1}{\sqrt{x}}\to 0$ et $\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}\to 0$, donc la limite recherchée est $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. La fonction s'écrit
$$f(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x+\alpha}}=\frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}-1}{\sqrt{x+\alpha}}.$$
Notons $g(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}$ alors à l'aide de l'expression conjuguée
$$g(x)=\frac{x-\alpha}{(\sqrt{x-\alpha})(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})}=\frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}.$$
Donc $g(x)$ tend vers 0 quand $x\to\alpha^+$. Et maintenant $f(x)=\frac{g(x)-1}{\sqrt{x+\alpha}}$ tend vers $-\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.

5. Pour tout réel $y$ nous avons la double inégalité $y-1 \leqslant E(y) \leqslant y$, donc $\frac{y-1}{y} \leqslant \frac{E(y)}{y} \leqslant 1$. On en déduit que lorsque $y$ tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) alors $\frac{E(y)}{y}$ tend 1. En posant $y = 1/x$, et en faisant tendre $x$ vers 0, alors $xE(\frac{1}{x}) = \frac{E(y)}{y}$ tend vers 1.
6. $$\frac{e^x - e^2}{x^2+x-6} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{1}{x+3}.$$
   La limite de $\frac{e^x-e^2}{x-2}$ en 2 vaut $e^2$ (c'est la taux d'accroissement de la fonction $e^x$), la limite voulue est $\frac{e^2}{5}$.
7. En calculant les valeurs de $f$ en $2k\pi$ et en $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ on prouve que $f$ n'a pas de limite en $+\infty$ pour $\alpha \geqslant 4$. Reste le cas $\alpha < 4$. Il existe $\beta$ tel que $\alpha < \beta < 4$.
   $$f(x) = \frac{x^4}{1 + x^\alpha \sin^2 x} = \frac{x^{4-\beta}}{\frac{1}{x^\beta} + \frac{x\alpha}{x^\beta}\sin^2 x}.$$
   Le numérateur tend $+\infty$ car $4-\beta > 0$. $\frac{1}{x^\beta}$ tend vers 0 ainsi que $\frac{x^\alpha}{x^\beta}\sin^2 x$ (car $\beta > \alpha$ et $\sin^2 x$ est bornée par 1). Donc le dénominateur tend vers 0 (par valeur positive). La limite est donc de type $+\infty/0^+$ (qui n'est pas indéterminée !) et vaut donc $+\infty$.

***Correction 6*** Réponses : $\frac{1}{e}, 0, e$.

***Correction 7*** Réponse : 1.

***Correction 8*** Réponse : $\sup(a,b)$.

***Correction 9*** Réponse : $\sqrt{ab}$.