Propriétés de $\mathbb{R}$

1 Les rationnels $\mathbb{Q}$

Exercice 1 1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ $r.x \notin \mathbb{Q}$.

2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$,
3. En déduire : entre 2 nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel. (On pourra utiliser la propriété : pour tout réel $a > 0$, il existe un entier n tel que $n > a$.)

Exercice 2 Soit $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. On suppose que tous les a_i sont des entiers.

1. Montrer que si p a une racine rationnelle $\frac{\alpha}{\beta}$ alors α divise a_0 et β divise a_n.
2. On considère le nombre $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. En calculant son carré, montrer que ce carré est racine d'un polynôme de degré 2. En déduire, à l'aide du résultat précédent qu'il n'est pas rationnel.

Exercice 3 1. Soit $N_n = 0,1997\,1997\ldots1997$ (n fois). Mettre N_n sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $M = 0,1997\,1997\,1997\ldots\ldots$ Donner le rationnel dont l'écriture décimale est M.
3. Même question avec : $P = 0,11111\ldots + 0,22222\ldots + 0,33333\ldots + 0,44444\ldots + 0,55555\ldots + 0,66666\ldots + 0,77777\ldots + 0,88888\ldots + 0,99999\ldots$

Exercice 4 Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

2 Maximum, minimum, borne supérieure...

Exercice 5 Le maximum de 2 nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des 2) est noté $\max(x, y)$. De même on notera $\min(x, y)$ le plus petit des 2 nombres x, y. Démontrer que :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x, y, z)$.

Exercice 6 Déterminer la borne supérieure et inférieure (éventuellement infinies) de : $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ en posant $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

Exercice 7 Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0, 1] \cap \mathbb{Q}\ ,\ ]0, 1[\cap \mathbb{Q}\ ,\ \mathbb{N}\ ,\ \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Exercice 8 Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note $A+B = \{a+b \mid (a,b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Exercice 9 Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. **Vrai** ou **faux** ?

1. $A \subset B \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B$,
2. $B \subset A \Rightarrow \inf A \leqslant \inf B$,
3. $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$,
4. $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$,
5. $\sup(-A) = -\inf A$,
6. $\sup A + \inf B \leqslant \sup(A + B)$.

3 Divers

Exercice 10 Si a et b sont des réels $\geqslant 0$, montrer que :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant 2\sqrt{a+b}.$$

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \; f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que

1. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad f(n) = nf(1)$.
2. $\forall n \in \mathbb{Z} \qquad f(n) = nf(1)$.
3. $\forall q \in \mathbb{Q} \qquad f(q) = qf(1)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = xf(1)$ (on pourra utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ pour encadrer x par des rationnels de plus en plus proches de x).

Propriétés de $\mathbb{R}$

Indication 1 1. Raisonner par l'absurde.

2. Raisonner par l'absurde en écrivant $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux. Puis essayer de montrer que p et q sont tous les deux pairs.
3. Utiliser les deux questions précédentes.

Indication 2 1. Calculer $\beta^n p(\frac{\alpha}{\beta})$ et utiliser le théorème de Gauss.

2. Utiliser la première question avec $p(x) = (x^2-5)^5 - 24$.

Indication 3 1. Mutiplier N_n par une puissance de 10 suffisament grande pour obtenir un nombre entier.

2. Mutiplier N par une puissance de 10 suffisament grande (pas trop grande) puis soustraire N pour obtenir un nombre entier.

Indication 4 C'est le même type de démonstration que pour prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Indication 6 $\sup A = +\infty$, $\inf A = 0$.

Indication 10 Élever l'inégalité au carré.

Indication 11 1. $f(2) = f(1+1) = \cdots$, faire une récurrence.

2. $f((-n)+n) = \cdots$.
3. Si $q = \frac{a}{b}$, calculer $f(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a}{b})$ avec b termes dans cette somme.
4. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, prendre une suite de rationnels qui croit vers x, et une autre qui décroit vers x.

Propriétés de $\mathbb{R}$

Correction 1 1. Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$. Par l'absurde supposons que $r + x \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p', q' tels que $r + x = \frac{p'}{q'}$. Donc $x = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{qp'-pq'}{qq'} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde car $x \notin \mathbb{Q}$.
De la même façon si $rx \in \mathbb{Q}$ alors $rx = \frac{p'}{q'}$ Et donc $x = \frac{p'}{q'}\frac{q}{p}$. Ce qui est absurde.

2. Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ alors il existe deux entiers p, q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. De plus nous pouvons supposer que la fraction est irréductible (p et q sont premiers entre eux). En élevant l'égalité au carré nous obtenons $q^2 \times 2 = p^2$. Donc p^2 est un nombre pair, cela implique que p est un nombre pair (si vous n'êtes pas convaincu écrivez la contraposée "p impair $\Rightarrow p^2$ impair"). Donc $p = 2 \times p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$, d'où $p^2 = 4 \times p'^2$. Nous obtenons $q^2 = 2 \times p'^2$. Nous en déduisons maintenant que q^2 est pair et comme ci-dessus que q est pair. Nous obtenons ainsi une contradiction car p et q étant tous les deux pairs la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible et aurait pu être simplifier. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
3. Soient r, r' deux rationnels avec $r < r'$. Notons $a = \sqrt{2}(r' - r)$. Choisissons $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \sqrt{2}$. Et posons
$$x = r + \frac{a}{n}.$$
D'une part $x \in]r, r'[$ et d'après les deux premières questions $\sqrt{2}\left(\frac{r'-r}{n}\right) \notin \mathbb{Q}$. Et donc x est un nombre irrationnel compris entre r et r'.

Correction 2 1. Soit $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ avec $\alpha \wedge \beta = 1$. Pour $p(\frac{\alpha}{\beta}) = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^i = 0$. Après multiplication par β^n nous obtenons l'égalité suivante :
$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1}\beta + \cdots + a_1\alpha\beta^{n-1} + a_0\beta^n.$$
En factorisant les derniers termes de cette somme par β, nous écrivons $a_n\alpha^n + \beta q = 0$. Ceci entraîne que β divise $a_n\alpha^n$, mais comme β et α^n sont premier entre eux (car $\alpha \wedge \beta = 1$) alors par le théorème de Gauss β divise a_n. De même en factorisant les premiers termes de la somme ci-dessus par α nous obtenons $\alpha q' + a_0\beta^n = 0$ et par un raisonnement similaire α divise a_0.

2. Notons $\gamma = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Alors $\gamma^2 = 5 + 2\sqrt{2}\sqrt{3}$ Et donc $\left(\gamma^2 - 5\right)^2 = 4 \times 2 \times 3$, Nous choisissons $p(x) = (x^2 - 5)^5 - 24$, qui s'écrit aussi $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$. Vu notre choix de p, nous avons $p(\gamma) = 0$. Si nous supposons que γ est rationnel, alors $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ et d'après la première question α divise le terme constant de p, c'est-à-dire 1. Donc $\alpha = \pm 1$. De même β divise le coefficient du terme de plus au degré de p, donc β divise 1, soit $\beta = 1$. Ainsi $\gamma = \pm 1$, ce qui est évidemment absurde !

Correction 3 1. Soit $p = 2001\,2001\ldots 2001$ et $q = 10000\,0000\ldots 0000 = 10^{4n}$. Alors $N_n = \frac{p}{q}$.

2. Remarquons que $10\,000 \times M = 2001, 2001\,2001\ldots$ Alors $10\,000 \times M - M = 2001$; donc $9999 \times M = 2001$ d'où $M = \frac{2001}{9999}$.

3. $0,111\ldots = \frac{1}{9}$, $0,222\ldots = \frac{2}{9}$, etc. D'où $P = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{9}{9} = \frac{1+2+\cdots+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$.

Correction 4 Par l'absurde supposons que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est un rationnel. Il s'écrit $\frac{p}{q}$ avec $p \geqslant 0, q > 0$ des entiers. On obtient $q \ln 3 = p \ln 2$. En prenant l'exponentielle : $\exp(q \ln 3) = \exp(p \ln 2)$ soit $3^q = 2^p$. Si $p > 1$ alors 2 divise 3^q, ce qui est absurde. Donc $p = 0$ ou $p = 1$. Donc $3^q = 2$ ou $3^q = 1$. La seule solution possible est $p = 0$, $q = 0$. Ce qui contredit $q \neq 0$. Donc $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Correction 5 Explicitons la formule pour $\max(x, y)$. Si $x \geqslant y$, alors $|x - y| = x - y$ donc $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = x$. De même si $x \leqslant y$, alors $|x - y| = -x + y$ donc $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y - x + y) = y$.
Pour 3 élément, nous avons $\max(x, y, z) = \max\big(\max(x, y), z\big)$, donc d'après les formules pour 2 éléments :

$$\begin{aligned}\max(x, y, z) &= \frac{\max(x, y) + z + |\max(x, y) - z|}{2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) + z + \left|\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) - z\right|}{2}.\end{aligned}$$

Correction 6 $(u_{2k})_k$ tend vers $+\infty$ et donc le seul majorant de A est $+\infty$ et donc $\sup A = +\infty$. D'autre part toutes les valeurs de (u_n) sont positives et $(u_{2k+1})_k$ tend vers 0, donc $\inf A = 0$.

Correction 7

1. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Les majorants : $[1, +\infty[$. Les minorants : $]-\infty, 0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Le plus grand élément : 1. Le plus petit élément 0.
2. $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$. Les majorants : $[1, +\infty[$. Les minorants : $]-\infty, 0]$. La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Il nexiste pas de plus grand élément ni de plus petit élément.
3. $\mathbb{N}$. Pas de majorants, pas de borne supérieure, ni de plus grand élément. Les minorants : $]-\infty, 0]$. La borne inférieure : 0. Le plus petit élément : 0.
4. $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Les majorants : $[\frac{5}{4}, +\infty[$. Les minorants : $]-\infty, -1]$. La borne supérieure : $\frac{5}{4}$. La borne inférieure : -1. Le plus grand élément : $\frac{5}{4}$. Pas de plus petit élément.

Correction 8

1. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On sait que $\operatorname{Sup} A$ est un majorant de A, c'est à dire, $\forall a \in A,\ a \leqslant \operatorname{Sup} A$. De même, $\forall b \in B,\ b \leqslant \operatorname{Sup} B$. On veut montrer que $\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$ est un majorant de $A + B$. Soit donc $x \in A + B$. Cela signifie que x est de la forme $a + b$ pour un $a \in A$ et un $b \in B$. Or $a \leqslant \operatorname{Sup} A$, et $b \leqslant \operatorname{Sup} B$, donc $x = a + b \leqslant \operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$. Comme ce raisonnement est valide pour tout $x \in A + B$ cela signifie que $\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B$ est un majorant de $A + B$.
2. On veut montrer que, quel que soit $\varepsilon > 0$, $\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A + B$. On prend donc un $\varepsilon > 0$ quelconque, et on veut montrer que $\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B - \varepsilon$ ne majore pas $A + B$. On s'interdit donc dans la suite de modifier ε. Comme $\operatorname{Sup} A$ est le plus petit des majorants de A, $\operatorname{Sup} A - \varepsilon/2$ n'est pas un majorant de A. Cela signifie qu'il existe un élément a de A tel que $a > \operatorname{Sup} A - \varepsilon/2$. *Attention :* $\operatorname{Sup} A - \varepsilon$ *n'est pas forcément dans* A*.* $\operatorname{Sup} A$ *non plus. Et il n'est pas non plus vrai que* $\forall a \in A\ a > \operatorname{Sup} A - \varepsilon/2$*. On ne choisit donc pas ce* a*.* De la même manière, il existe $b \in B$ tel que $b > \operatorname{Sup} B - \varepsilon/2$. Or l'élément x défini par $x = a + b$ est un élément de $A + B$, et il vérifie $x > (\operatorname{Sup} A - \varepsilon/2) + (\operatorname{Sup} B - \varepsilon/2) = \operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B - \varepsilon$. Ceci implique que $\operatorname{Sup} A + \operatorname{Sup} B - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A + B$.

3. $\mathrm{Sup}\, A + \mathrm{Sup}\, B$ est un majorant de $A+B$ d'après la partie 1. Mais, d'après la partie 2., dès qu'on prend un $\varepsilon > 0$, $\mathrm{Sup} A + \mathrm{Sup} B - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A+B$. Donc $\mathrm{Sup} A + \mathrm{Sup} B$ est bien le plus petit des majorants de $A+B$, i.e. $\mathrm{Sup}\,(A+B) = \mathrm{Sup}\, A + \mathrm{Sup}\, B$.

Correction 9

1. Vrai.
2. Vrai.
3. Vrai.
4. Faux. L'égalité peut ne pas être stricte.
5. Vrai.
6. Vrai.

Correction 10

$$\begin{aligned} &\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant 2\sqrt{a+b} \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \leqslant 2(a+b) \end{aligned}$$

car les termes sont positifs, et la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b} \leqslant 2(a+b) \\ &\Leftrightarrow a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 2. \end{aligned}$$

La denière proposition est toujours vraie, et donc par équivalence, nous obtenons l'inégalité recherchée.

Correction 11

1. Calculons d'abord $f(0)$. $f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0)$ Donc $f(0) = 0$. Montrons le résultat demandé par récurrence : pour $n = 1$, nous avons bien $f(1) = 1 \times f(1)$. Si $f(n) = nf(1)$ alors $f(n+1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n+1)f(1)$.
2. $0 = f(0) = f(-1+1) = f(-1) + f(1)$. Donc $f(-1) = -f(1)$. Puis comme ci-dessus $f(-n) = nf(-1) = -nf(1)$.
3. Soit $q = \frac{a}{b}$. Alors $f(a) = f(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a}{b}) = f(\frac{a}{b}) + \cdots + f(\frac{a}{b})$ (b termes dans cette somme). Donc $f(a) = bf(\frac{a}{b})$. Soit $af(1) = bf(\frac{a}{b})$. Ce qui s'écrit aussi $f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{b}f(1)$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$ Soit (α_i) une suite croissante de rationnels qui tend vers x. Soit (β_i) une suite décroissante de rationnels qui tend vers x :

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \ldots \leqslant x \leqslant \cdots \leqslant \beta_2 \leqslant \beta_1.$$

Alors comme $\alpha_i \leqslant x \leqslant \beta_i$ et que f est croissante nous avons $f(\alpha_i) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta_i)$. D'après la question précédent cette inéquation devient : $\alpha_i f(1) \leqslant f(x) \leqslant \beta_i f(1)$. Comme (α_i) et (β_i) tendent vers x. Par le théorème des "gendarmes" nous obtenons en passant à la limite : $xf(1) \leqslant f(x) \leqslant xf(1)$. Soit $f(x) = xf(1)$.