
Polynômes

Exercice 1 Effectuer les divisions euclidiennes de

$$3X^5 + 4X^2 + 1 \text{ par } X^2 + 2X + 3,$$

$$3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 \text{ par } X^3 + X + 2,$$

$$X^4 - X^3 + X - 2 \text{ par } X^2 - 2X + 4.$$

Exercice 2 Effectuer la division selon les puissances croissantes de :

$$X^4 + X^3 - 2X + 1 \text{ par } X^2 + X + 1 \text{ à l'ordre 2.}$$

Exercice 3 Trouver les polynômes P tels que $P + 1$ soit divisible par $(X - 1)^4$ et $P - 1$ par $(X + 1)^4$:

1. en utilisant la relation de Bézout,
2. en considérant le polynôme dérivé P' .

Combien y a-t-il de solutions de degré ≤ 7 ?

Exercice 4 Effectuer la division de $A = X^6 - 2X^4 + X^3 + 1$ par $B = X^3 + X^2 + 1$:

1. Suivant les puissances décroissantes.
2. À l'ordre 4 (c'est-à-dire tel que le reste soit divisible par X^5) suivant les puissances croissantes.

Exercice 5 Effectuer la division euclidienne de $X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ par $X^2 - 5X + 4$.

Exercice 6 Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P ?

Exercice 7 Calculer $\text{pgcd}(P, Q)$ lorsque :

1. $P = X^3 - X^2 - X - 2$ et $Q = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$,
2. $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^3 + X + 1$.

Exercice 8 Déterminer le pgcd des polynômes suivants :

$$X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1 \text{ et } X^4 + 2X^3 + X + 2,$$

$$X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1 \text{ et } X^3 + X^2 - X - 1,$$

$$X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 3 \text{ et } X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1.$$

Exercice 9 Calculer le pgcd D des polynômes A et B définis ci-dessous. Trouver des polynômes U et V tels que $D = AU + BV$.

$$1. A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2 \quad \text{et} \quad B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6.$$

$$2. A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X \quad \text{et} \quad B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1.$$

Exercice 10 Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$, sans déterminer ses racines, le polynôme $P = X^4 + 1$, en produit de facteurs irréductibles.

Exercice 11 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme

$$nX^{n+2} - (4n + 1)X^{n+1} + 4(n + 1)X^n - 4X^{n-1}$$

Exercice 12 Pour quelles valeurs de a le polynôme $(X + 1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

Exercice 13 Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles.

1. $X^3 - 3$.
2. $X^{12} - 1$.

Exercice 14 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^6 + 1$.
2. $X^9 + X^6 + X^3 + 1$.

Exercice 15 Trouver un polynôme P de degré ≤ 2 tel que

$$P(1) = -2 \quad \text{et} \quad P(-2) = 3 \quad \text{et} \quad P(0) = -1$$

Exercice 16 Trouver un polynôme P de degré minimum tel que

$$P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(-1) = -2 \quad \text{et} \quad P(2) = 4$$

Polynômes

Polynômes

Correction 1 1. $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$, $B = X^2 + 2X + 3$, le quotient de A par B est $3X^3 - 6X^2 + 3X + 16$ et le reste $-47 - 41X$.

2. $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$, $B = X^3 + X + 2$ le quotient de A par B est $3X^2 + 2X - 3$ et le reste est $7 - 9X^2 - X$.

3. $A = X^4 - X^3 - X - 2$, $B = X^2 - 2X + 4$, le quotient de A par B est $X^2 + X - 2$ de reste $6 - 9X$.

Correction 2 $X^4 + X^3 - 2X + 1 = (X^2 + X + 1)(2X^2 - 3X + 1) + X^3(2 - X)$.

Correction 3 Les solutions sont les polynômes de la forme

$$P = \frac{1}{16}(5X^7 - 21X^5 + 35X^3 - 35X) + A(X - 1)^4(X + 1)^4$$

où A est un polynôme quelconque ; une seule solution de degré ≤ 7 .

Correction 4 1. Quotient $Q = X^3 - X^2 - X + 1$, reste $R = X$.

2. Quotient $Q = 1 - X^2 - X^4$, reste $R = X^5(1 + 2X + X^2)$.

Correction 5 Soient $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$, $B = X^2 - 5X + 4$, le quotient de A par B est $X^3 - 2X^2 - 14X - 63$, le reste étant $261 - 268X$.

Correction 6 Ce sont les polynômes de la forme $\lambda(X - a)^k$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda, a \in \mathbb{C}$.

Correction 7 1. $\text{pgcd}(X^3 - X^2 - X - 2, X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2) = X - 2$.

2. $\text{pgcd}(X^4 + X^3 - 2X + 1, X^3 + X + 1) = 1$.

Correction 8 1. $\text{pgcd}(X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1, X^4 + 2X^3 + X + 2) = X^3 + 1$.

2. $\text{pgcd}(X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1, X^3 + X^2 - X - 1) = X + 1$

3. $\text{pgcd}(X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 1, X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1) = 1$.

Correction 9 1. $D = X^2 + 3X + 2 = A(\frac{1}{18}X - \frac{1}{6}) + B(-\frac{1}{18}X^2 + \frac{1}{9}X + \frac{5}{18})$.

2. $D = 1 = A(-X^3) + B(X^5 + X^3 + X + 1)$.

Correction 10

$$(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

Correction 11 L'ordre de multiplicité est 2.

Correction 12 Pour $a = \frac{1}{64}$; la racine multiple est $-\frac{1}{2}$.

Correction 13

1.
$$\begin{cases} X^3 - 3 &= (X - \sqrt[3]{3})(X^2 + \sqrt[3]{3}X + \sqrt[3]{9}) \\ &= (X - \sqrt[3]{3})(X + \frac{\sqrt[3]{3}}{2} - i\frac{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}}{2})(X + \frac{\sqrt[3]{3}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}}{2}). \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} X^{12} - 1 &= (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1) \times \\ &\quad (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1) \\ &= (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i) \times \\ &\quad (X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2})(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{2})(X - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2})(X - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}) \times \\ &\quad (X - \frac{\sqrt{3}+i}{2})(X - \frac{\sqrt{3}-i}{2})(X - \frac{-\sqrt{3}+i}{2})(X - \frac{-\sqrt{3}-i}{2}). \end{cases}$$

Correction 14 1. $X^6 + 1 = -(X^2 + 1)(X^2 + X\sqrt{3} + 1)(-X^2 + X\sqrt{3} - 1).$

2. $X^9 + X^6 + X^3 + 1 = -(X^2 + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X\sqrt{3} + 1)(-X^2 + X\sqrt{3} - 1)(X + 1).$

Correction 15 Utiliser la formule d'interpolation de Lagrange! $P = \frac{1}{3}(X^2 - 4X - 3).$

Correction 16 Utiliser la formule d'interpolation de Lagrange! $P = \frac{1}{2}(3X^3 - 4X^2 - X + 2).$