Dénombrement

Exercice 1 En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} kC_n^k \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k.$$

Exercice 2 En utilisant la formule du binôme, démontrer que :

1. $2^n + 1$ est divisible par 3 si et seulement si n est impair ;
2. $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 3 Calculer le module et l'argument de $(1+i)^n$. En déduire les valeurs de

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots \\ S_2 &= C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \cdots \end{aligned}$$

Exercice 4 Pour A, B deux ensembles de E on note $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Pour E un ensemble fini, montrer :

$$\mathrm{Card}\, A\Delta B = \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, B - 2\mathrm{Card}\, A \cap B.$$

Exercice 5 Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

Dénombrement

Indication 1 Évaluer $(1+x)^n$ en $x=1$, d'une part directement et ensuite avec la formule du binôme de Newton. Pour la deuxième égalité commencer par dériver $x \mapsto (1+x)^n$.

Indication 2 Commencer par $2^n = (3-1)^n$.

Indication 3 $1+i = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{2i\pi}{4}}$

Indication 4 Tout d'abord faire un dessin (avec des patates !). Ensuite si P et Q sont deux ensembles finis disjoints on a bien évidemment $\operatorname{Card} P \cup Q = \operatorname{Card} P + \operatorname{Card} Q$. Il faut donc essayer d'écrire $A\Delta B$ comme union de deux ensembles disjoints.

Indication 5 Combien y-a-t'il de choix pour l'élément de A ? Combien y-a-t'il de choix pour le sous-ensemble de $E \setminus A$?

Dénombrement

Correction 1 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = (1+x)^n$. Par la formule du binôme de Newton nous savons que

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k.$$

1. En calculant $f(1)$ nous avons $2^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k$.
2. Maintenant calculons $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^{k-1}$. Évaluons $f'(1) = n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k$.
3. Il s'agit ici de calculer une primitive F de f : $F(x) = \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k x^{k+1}$. En $F(1) = \frac{1}{n+1} 2^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$.

Correction 2 L'astuce consiste à écrire $2 = 3-1$ (!)

$$2^n = (3-1)^n = 3 \times p + (-1)^n$$

Où $3 \times p$ ($p \in \mathbb{Z}$) représente les n premiers termes de $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 3^k (-1)^{n-k}$ et $(-1)^n$ est le dernier terme. Donc $2^n - (-1)^n = 3p$. Si n est impair l'égalité s'écrit $2^n + 1 = 3p$ et donc $2^n + 1$ est divisible par 3. Si n est pair $2^n - 1 = 3p$ donc $2^n + 1 = 3p + 2$ qui n'est pas divisible par 3. Pour l'autre assertion regarder $3 = 7 - 4$.

Correction 3 $A = (1+i)^n$ a pour module $2^{n/2}$ et pour argument $n\frac{\pi}{4}$ (et B est son conjugué). On en tire grâce à la formule du binôme, et en séparant partie réelle et partie imaginaire : $S_1 = 2^{n/2} \cos n\frac{\pi}{4}$ et et $S_2 = 2^{n/2} \sin n\frac{\pi}{4}$. On a aussi $S_1 = \frac{A+B}{2}$ et $S_2 = \frac{B-A}{2} i$.

Correction 4 Tout d'abord si deux ensembles finis P et Q sont disjoints alors $\mathrm{Card}\, P \cup Q = \mathrm{Card}\, P + \mathrm{Card}\, Q$. L'idée est donc d'écrire $A \Delta B$ comme union de deux ensembles disjoints.

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)).$$

Ces deux ensembles $A \setminus (A \cap B)$ et $B \setminus (A \cap B)$ sont disjoints. En utilisant que pour $R \subset S$ nous avons $\mathrm{Card}\, S \setminus R = \mathrm{Card}\, S - \mathrm{Card}\, R$, nous obtenons :

$$\mathrm{Card}\, A \Delta B = \mathrm{Card}\, A \setminus (A \cap B) + \mathrm{Card}\, B \setminus (A \cap B) = \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, B - 2\mathrm{Card}\,(A \cap B).$$

Correction 5 Fixons un élément de A ; dans $E \setminus A$ (de cardinal $n-p$), nous pouvons choisir C_{n-p}^k ensembles à k éléments ($k = 0, 1, \ldots, n$). Le nombre d'ensembles dans le complémentaire de A est donc

$$\sum_{k=0}^{n-p} C_{n-p}^k = 2^{n-p}.$$

Pour le choix d'un élément de A nous avons p choix, donc le nombre total d'ensembles qui vérifie la condition est :

$$p2^{n-p}.$$