Relation d'équivalence, relation d'ordre

1 Relation d'équivalence

Exercice 1 Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$z\mathcal{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 2 Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E, symétrique et transitive. Que penser du raisonnement suivant ?

"$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ car $\mathcal{R}$ est symétrique,
or $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Rightarrow x\mathcal{R}x$ car $\mathcal{R}$ est transitive,
donc $\mathcal{R}$ est réflexive."

Exercice 3 Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow xe^y = ye^x$$

est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

2 Relation d'ordre

Exercice 4 Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On définit sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ la relation $\mathcal{R}$ par $X\mathcal{R}Y$ ssi $(X = Y$ ou $\forall x \in X\ \forall y \in Y\ x \leqslant y)$. Vérifier que c'est une relation d'ordre.

Relation d'équivalence, relation d'ordre

Indication 1 Un dessin permettra d'avoir une bonne idée de ce qui se passe...

Indication 2 Il faut trouver l'erreur dans ce raisonnement, car bien sûr s'il y a trois axiomes pour la définition d'une relation d'équivalence, c'est que deux ne suffisent pas !

Indication 3

1. Pour la transitivité on pourra calculer xye^z.
2. Poser la fonction $t \mapsto \frac{t}{e^t}$, après une étude de fonction on calculera le nombre d'antécédents possibles.

Relation d'équivalence, relation d'ordre

Correction 1 1. Soit z, z', z'' des complexes quelconques.
- Reflexivité : $z\mathcal{R}z$ car $|z| = |z|$.
- Symétrie : $z\mathcal{R}z' \Rightarrow z'\mathcal{R}z$ car $|z| = |z'|$ et donc $|z'| = |z|$.
- Transitivité : $z\mathcal{R}z'$ et $z'\mathcal{R}z''$ alors $|z| = |z'| = |z''|$ donc $z\mathcal{R}z''$.

En fait, nous avons juste retranscrit que l'égalité = est une relation d'équivalence.

2. La classe d'équivalence d'un point $z \in \mathbb{C}$ est l'ensemble des complexes qui sont en relation avec z, *i.e.* l'ensemble des complexes dont le module est égal à $|z|$. Géométriquement la classe d'équivalence de z est le cerlce $\mathcal{C}$ de centre 0 et de rayon $|z|$.

$$\mathcal{C} = \{|z|e^{i\theta} \ / \ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Correction 2 Le raisonnement est faux.
L'erreur est due au manque de quantification. En effet, rien ne prouve que pout tout x un tel y existe. Il peut exister un élément x qui n'est en relation avec personne (même pas avec lui).

Correction 3 1. – Reflexivité : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xe^x = xe^x$ donc $x\mathcal{R}x$.
- Symétrie : Pour $x, y \in \mathbb{R}$, si $x\mathcal{R}y$ alors $xe^y = ye^x$ donc $ye^x = xe^y$ donc $y\mathcal{R}x$.
- Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $xe^y = ye^x$ et $ye^z = ze^y$. Calculons xye^z :

$$xye^z = x(ye^z) = x(ze^y) = z(xe^y) = z(ye^x) = yze^x.$$

Donc $xye^z = yze^x$. Si $y \neq 0$ alors en divisant par y on vient de montrer que $xe^z = ze^x$ donc $x\mathcal{R}z$ et c'est fini. Pour le cas $y = 0$ alors $x = 0$ et $z = 0$ donc $x\mathcal{R}z$ également.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On note $\mathcal{C}(x)$ la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{C}(x) := \{y \in \mathbb{R} \mid y\mathcal{R}x\}.$$

Donc

$$\mathcal{C}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid xe^y = ye^x\}.$$

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{t}{e^t}.$$

Alors

$$\mathcal{C}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid f(x) = f(y)\}.$$

Autrement dit $\mathcal{C}(x)$ est l'ensemble des $y \in \mathbb{R}$ qui par f prennent la même valeur que $f(x)$: en raccourci :

$$\mathcal{C}(x) = f^{-1}(f(x)).$$

Étudions maintenant la fonction f afin de déterminer le nombre d'antécédents : par un calcul de f' on montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ puis strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. De plus en $-\infty$ la limite de f est $-\infty$, $f(1)=\frac{1}{e}$, et la limite en $+\infty$ est 0.

C'est le moment de dessiner le graphe de f ! !

Pour $x>0$ alors $f(x)\in]0,\frac{1}{e}]$ et alors $f(x)$ a deux antécédents. Pour $x\leqslant 0$ alors $f(x)\in]-\infty,0]$ et alors $f(x)$ a un seul antécédent.

Bilan : si $x>0$ alors $\operatorname{Card}\mathcal{C}(x)=\operatorname{Card} f^{-1}\left(f(x)\right)=2$, si $x\leqslant 0$ alors $\operatorname{Card}\mathcal{C}(x)=\operatorname{Card} f^{-1}\left(f(x)\right)=1$.

Correction 4 – Reflexivité : pour tout $X\in\mathcal{P}(E)$ on a $X\mathcal{R}X$ car $X=X$.

– Anti-symétrie : pour $X,Y\in\mathcal{P}(E)$ tels que $X\mathcal{R}Y$ et $Y\mathcal{R}X$, alors par définition de $\mathcal{R}$ on a

$$\forall x\in X\quad\forall y\in Y\quad x\leqslant y \text{ et } y\leqslant x.$$

Comme la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre alors $x\leqslant y$ et $y\leqslant x$ implique $x=y$. Donc

$$\forall x\in X\quad\forall y\in Y\quad x=y,$$

ce qui implique que $X=Y$ (dans ce cas en fait X est vide ou un singleton).

– Transitivité : soit $X,Y,Z\in\mathcal{P}(E)$ tels que $X\mathcal{R}Y$ et $Y\mathcal{R}Z$. Si $X=Y$ ou $Y=Z$ alors il est clair que $X\mathcal{R}Z$. Supposons que $X\neq Y$ et $Y\neq Z$ alors

$$\forall x\in X\quad\forall y\in Y\quad x\leqslant y\qquad\text{et}\qquad\forall y\in Y\quad\forall z\in Z\quad y\leqslant z.$$

Donc on a

$$\forall x\in X\quad\forall y\in Y\quad\forall z\in Z\quad x\leqslant y \text{ et } y\leqslant z,$$

alors par transitivité de la relation $\leqslant$ on obtient :

$$\forall x\in X\quad\forall z\in Z\quad x\leqslant z.$$

Donc $X\mathcal{R}Z$.