Logique, ensembles, raisonnements

1 Logique

Exercice 1 Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0 \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y>0\ ;$$

$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y>0 \quad ; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2>x.$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Exercice 2 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leqslant 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leqslant 0$.
5. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x<y$ alors $f(x)>f(y)$.

On ne demande pas de démontrer quoi que ce soit, juste d'écrire le contraire d'un énoncé.

Exercice 3 Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R}$ $x^2=4$ $\ldots\ldots$ $x=2$;
2. $z \in \mathbb{C}$ $z=\overline{z}$ $\ldots\ldots$ $z \in \mathbb{R}$;
3. $x \in \mathbb{R}$ $x=\pi$ $\ldots\ldots$ $e^{2ix}=1$.

Exercice 4 Dans $\mathbb{R}^2$, on définit les ensembles $F_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\leqslant 0\}$ et $F_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ xy\geqslant 1,\ x\geqslant 0\}$. Évaluer les propositions suivantes :

1. $\forall \varepsilon \in]0,+\infty[\quad \exists M_1 \in F_1\, \exists M_2 \in F_2 \quad / \quad ||\overrightarrow{M_1M_2}|| < \varepsilon$
2. $\exists M_1 \in F_1\, \exists M_2 \in F_2 \quad / \quad \forall \varepsilon \in]0,+\infty[\quad ||\overrightarrow{M_1M_2}|| < \varepsilon$
3. $\exists \varepsilon \in]0,+\infty[\quad / \quad \forall M_1 \in F_1\, \forall M_2 \in F_2 \quad ||\overrightarrow{M_1M_2}|| < \varepsilon$
4. $\forall M_1 \in F_1\, \forall M_2 \in F_2 \quad \exists \varepsilon \in]0,+\infty[\quad / \quad ||\overrightarrow{M_1M_2}|| < \varepsilon$

Quand elles sont fausses, donner leur négation.

Exercice 5 Nier la proposition : "tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans".

Exercice 6 Nier les assertions suivantes :

1. tout triangle rectangle possède un angle droit ;

2. dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs ;
3. pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique le relation $z < x + 1$;
4. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \ / \ \ |x - 7/5| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \varepsilon$.

Exercice 7 Montrer que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $(n \geqslant N \Rrightarrow 2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon)$.

Exercice 8 Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

1. f est majorée ;
2. f est bornée ;
3. f est paire ;
4. f est impaire ;
5. f ne s'annule jamais ;
6. f est périodique ;
7. f est croissante ;
8. f est strictement décroissante ;
9. f n'est pas la fonction nulle ;
10. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distcincts ;
11. f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$;
12. f est inférieure à g ;
13. f n'est pas inférieure à g.

2 Ensembles

Exercice 9 Montrer par contraposition les assertions suivantes, E étant un ensemble :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$,
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

Exercice 10 Soit A, B deux ensembles, montrer $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ et $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$.

Exercice 11 Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$. Démontrer que :
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) \Rightarrow (f(A) \subset f(B))$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
$\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

Exercice 12 Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n} \right[\quad \text{et} \quad I_2 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, n \right].$$

Exercice 13 Soient $A, B \subset E$. Résoudre les équations à l'inconnue $X \subset E$

1. $A \cup X = B$.
2. $A \cap X = B$.

3 Absurde et contraposée

Exercice 14 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans lui-même. On définit une application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant $f(n) = f_n(n) + 1$. Démontrer qu'il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$.

Exercice 15

1. Soit $p_1, p_2, \dots, p_r$ r nombres premiers. Montrer que l'entier $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$ n'est divisible par aucun des entiers p_i.
2. Utiliser la question précédente pour montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

4 Récurrence

Exercice 16 Montrer :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 17 Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 18

1. Dans le plan, on considère trois droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ formant un “vrai” triangle : elles ne sont pas concourantes, et il n'y en a pas deux parallèles. Donner le nombre R_3 de régions (zones blanches) découpées par ces trois droites.
2. On considère quatre droites $\Delta_1, \dots, \Delta_4$, telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Donner le nombre R_4 de régions découpées par ces quatre droites.
3. On considère n droites $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Soit R_n le nombre de régions délimitées par $\Delta_1 \dots \Delta_n$, et R_{n-1} le nombre de régions délimitées par $\Delta_1 \dots \Delta_{n-1}$. Montrer que $R_n = R_{n-1} + n$.
4. Calculer par récurrence le nombre de régions délimitées par n droites en position générale, c'est-à-dire telles qu'il n'en existe pas trois concourantes ni deux parallèles.

Exercice 19 Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathcal{F}(X, X)$, on définit $f^0 = id$ et par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f^n \circ f$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{n+1} = f \circ f^n$.
2. Montrer que si f est bijective alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$.

Logique, ensembles, raisonnements

Indication 1 Attention : la négation d'une inégalité stricte est une inégalité large (et réciproquement).

Indication 4 Faire un dessin de F_1 et de F_2. Essayer de voir si la difficulté pour réaliser les assertions vient de ε "petit" (c'est-à-dire proche de 0) ou de ε "grand" (quand il tend vers $+\infty$).

Indication 7 En fait on a toujours : $\frac{2n+1}{n+2} \leqslant 2$. Puis chercher une condition sur n pour que l'inégalité

$$2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$$

soit vraie.

Indication 10 Il est plus facile de raisonner en prenant un élément $x \in E$. Par exemple, soit F, G des sous-ensemble de E, pour montrer que $F \subset G$ il est équivalent de montrer que pour tout $x \in F$ alors $x \in G$. Et montrer $F = G$ est équivalent à $x \in F$ si et seulement si $x \in G$, et ce pour tout x de E. Remarque : pour montrer $F = G$ on peut aussi montrer $F \subset G$ puis $G \subset F$.
Enfin, se rappeler que $x \in \complement F$ si et seulement si $x \notin F$.

Indication 14 Par l'absurde, supposer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$. Puis pour un tel p, évaluer f et f_p en une valeur bien choisie.

Indication 15 Pour la première question vous pouvez raisonner par contraposition.

Indication 17
1. Récurrence : calculer $x_{n+1} - 3$.
2. Calculer $x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Récurrence.

Indication 19 Pour les deux questions, travailler par récurrence.

Logique, ensembles, raisonnements

Correction 1 1. (a) est fausse. Car sa négation qui est $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y \leqslant 0$ est vraie. Étant donné $x \in \mathbb{R}$ il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x+y \leqslant 0$, par exemple on peut prendre $y = -(x+1)$ et alors $x+y = x-x-1 = -1 \leqslant 0$.

2. (b) est vraie, pour un x donné, on peut prendre (par exemple) $y = -x+1$ et alors $x+y = 1 > 0$. La négation de (b) est $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y \leqslant 0$.
3. (c) : $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y > 0$ est fausse, par exemple $x=-1$, $y=0$. La négation est $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x+y \leqslant 0$.
4. (d) est vraie, on peut prendre $x=-1$. La négation est : $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 \leqslant x$.

Correction 2 Dans ce corrigé, nous donnons une justification, ce qui n'était pas demandé.

1. Cette assertion se décompose de la manière suivante : (Pour tout $x \in \mathbb{R}$) $(f(x) \leqslant 1)$. La négation de "(Pour tout $x \in \mathbb{R}$)" est "Il existe $x \in \mathbb{R}$" et la négation de "$(f(x) \leqslant 1)$" est $f(x) > 1$. Donc la négation de l'assertion complète est : "Il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) > 1$.
2. Rappelons comment se traduit l'assertion "L'application f est croissante" : "pour tout couple de réels (x_1, x_2), si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Cela se décompose en : "(pour tout couple de réels x_1 et x_2) ($x_1 \leqslant x_2$ implique $f(x_1) \leqslant f(x_2)$)". La négation de la première partie est : "(il existe un couple de réels (x_1, x_2))" et la négation de la deuxième partie est : "($x_1 \leqslant x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$)". Donc la négation de l'assertion complète est : "Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 \leqslant x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$".
3. La négation est : l'application f n'est pas croissante ou n'est pas positive. On a déjà traduit "l'application f n'est pas croissante", traduisons "l'application f n'est pas positive" : "il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$". Donc la négation de l'assertion complète est : " Il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, ou il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$".
4. Cette assertion se décompose de la manière suivante : "(Il existe $x \in \mathbb{R}^+$) $(f(x) \leqslant 0)$". La négation de la première partie est : "(pour tout $x \in \mathbb{R}^+$), et celle de la seconde est :"$(f(x) > 0)$". Donc la négation de l'assertion complète est : " Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) > 0$".
5. Cette assertion se décompose de la manière suivante : "$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$". La négation de la première partie est "$(\forall x \in \mathbb{R})$, celle de la seconde est $(\exists y \in \mathbb{R})$, et celle de la troisième est ($x < y$ et $f(x) \leqslant f(y)$). Donc la négation de l'assertion complète est : " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$ et $f(x) \leqslant f(y)$".

Correction 3 1. $\Leftarrow$

2. $\Leftrightarrow$
3. $\Rightarrow$

Correction 4 1. Cette proposition est vraie. En effet soit $\varepsilon > 0$, définissons $M_1 = (\frac{2}{\varepsilon}, 0) \in F_1$ et $M_2 = (\frac{2}{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{2}) \in F_2$, alors $M_1M_2 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Ceci étant vrai quelque soit $\varepsilon > 0$ la proposition est donc démontrée.

2. Soit deux points fixés M_1, M_2 vérifiant cette proposition la distance $d = M_1M_2$ est aussi petite que l'on veut donc elle est nulle, donc $M_1 = M_2$; or les ensembles F_1 et F_2 sont disjoints. Donc la proposition est fausse. La négation de cette proposition est :

$$\forall M_1 \in F_1 \quad \forall M_2 \in F_2 \quad \exists \varepsilon \in]0,+\infty[\quad / \quad M_1M_2 \geqslant \varepsilon$$

et cela exprime le fait que les ensembles F_1 et F_2 sont disjoints.

3. Celle ci est également fausse, en effet supposons qu'elle soit vraie, soit alors ε correspondant à cette proposition. Soit $M_1 = (\varepsilon + 2, 0)$ et $M_2 = (1,1)$, on a $M_1M_2 > \varepsilon + 1$ ce qui est absurde. La négation est :

$$\forall \varepsilon \in]0,+\infty[\quad \exists M_1 \in F_1 \quad \exists M_2 \in F_2 \quad / \quad M_1M_2 \geqslant \varepsilon$$

C'est-à-dire que l'on peut trouver deux points aussi éloignés l'un de l'autre que l'on veut.

4. Cette proposition est vraie il suffit de choisir $\varepsilon = M_1M_2 + 1$. Elle signifie que la distance entre deux points donnés est un nombre fini !

Correction 5 "Il existe un habitant de la rue du Havre qui a les yeux bleus, qui ne gagnera pas au loto ou qui prendra sa retraite après 50 ans."

Correction 6

1. Un triangle dont aucun angle n'est droit n'est pas rectangle.
2. Il existe une écurie dans laquelle il y a (au moins) un cheval dont la couleur n'est pas noire.
3. Sachant que la proposition en langage mathématique s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad \exists y \in \mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{Z} \quad (z < x \Leftrightarrow z < x + 1),$$

la négation est

$$\exists x \in \mathbb{Z} \quad \forall y \in \mathbb{Z} \quad \exists z \in \mathbb{Z} \quad (z < x \text{ et } z \geqslant x + 1).$$

4. $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \alpha > 0 \quad (|x - 7/5| < \alpha \text{ et } |5x - 7| \geqslant \varepsilon)$.

Correction 7 Remarquons d'abord que pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n+1}{n+2} \leqslant 2$ car $2n + 1 \leqslant 2(n + 2)$. Étant donné $\varepsilon > 0$, nous avons donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon$$

Maintenant nous cherchons une condition sur n pour que l'inégalité

$$2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$$

soit vraie.

$$\begin{aligned} 2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} &\Leftrightarrow (2 - \varepsilon)(n + 2) < 2n + 1 \\ &\Leftrightarrow 3 < \varepsilon(n + 2) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 2 \end{aligned}$$

Ici ε nous est donné, nous prenons un $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{3}{\varepsilon} - 2$, alors pour tout $n \geqslant N$ nous avons $n \geqslant N > \frac{3}{\varepsilon} - 2$ et par conséquent : $2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$. Conclusion : étant donné $\varepsilon > 0$, nous avons trouvé un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2}$ et $\frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon$.
En fait nous venons de prouver que la limite de la suite de terme $(2n + 1)/(n + 2)$ tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.

Correction 8

1. $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leqslant M$;
2. $\exists M \in \mathbb{R}\ \exists m \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ m \leqslant f(x) \leqslant M$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = f(-x)$;
4. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = -f(-x)$;
5. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq 0$;
6. $\exists a \in \mathbb{R}^*\ \forall x \in \mathbb{R} f(x+a) = f(x)$;
7. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ (x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y))$;
8. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ (x \leqslant y \Rightarrow f(x) > f(y))$;
9. $\exists x \in \mathbb{R}\ f(x) \neq 0$;
10. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$;
11. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{R}\ f(x) = n$;
12. $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leqslant g(x)$;
13. $\exists x \in \mathbb{R}\ f(x) > g(x)$.

Correction 9 Nous allons démontrer l'assertion 1. de deux manières différentes.

1. Tout d'abord de façon "directe". Nous supposons que A et B sont telles que $A \cap B = A \cup B$. Nous devons montrer que $A = B$.

   Pour cela étant donné $x \in A$ montrons qu'il est aussi dans B. Comme $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ (car $A \cup B = A \cap B$). Ainsi $x \in B$.

   Maintenant nous prenons $x \in B$ et le même raisonnement implique $x \in A$. Donc tout élément de A est dans B et tout élément de B est dans A. Cela veut dire $A = B$.
2. Ensuite, comme demandé, nous le montrons par contraposition. Nous supposons que $A \neq B$ et non devons monter que $A \cap B \neq A \cup B$.

   Si $A \neq B$ cela veut dire qu'il existe un élément $x \in A \setminus B$ ou alors un élément $x \in B \setminus A$. Quitte à échanger A et B, nous supposons qu'il existe $x \in A \setminus B$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$. Donc $A \cap B \neq A \cup B$.

Correction 10

$$\begin{aligned} x \in \complement(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ et } x \in \complement B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \cap \complement B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \complement(A \cap B) &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \text{ ou } x \in \complement \\ &\Leftrightarrow x \in \complement A \cup \complement B. \end{aligned}$$

Correction 11 Montrons quelques assertions.
$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Si $y \in f(A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$, or $x \in A$ donc $y = f(x) \in f(A)$ et de même $x \in B$ donc $y \in f(B)$. D'où $y \in f(A) \cap f(B)$. Tout élément de $f(A \cap B)$ est un élément de $f(A) \cap f(B)$ donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Remarque : l'inclusion réciproque est fausse. Exercice : trouver un contre-exemple.

$f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(F \setminus A) &\Leftrightarrow f(x) \in F \setminus F \setminus A \\ &\Leftrightarrow f(x) \notin A \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \text{ car } f^{-1} = \{x \in E \ / \ f(x) \in A\} \\ &\Leftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(A) \end{aligned}$$

Correction 12 $I_1 = [0, 2]$ et $I_2 =]1, +\infty[$.

Correction 13
1. $B \setminus A \subset X \subset B$.
2. $B \subset X \subset B \cup \complement A$.

Correction 14 Par l'absurde, supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$. Deux applications sont égales si et seulement si elles prennent les mêmes valeurs.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = f_p(n).$$

En particulier pour $n = p$, $f(p) = f_p(p)$. D'autre part la définition de f nous donne $f(p) = f_p(p) + 1$. Nous obtenons une contradiction car $f(p)$ ne peut prendre deux valeurs distinctes. En conclusion, quelque soit $p \in \mathbb{N}$ $f \neq f_p$.

Correction 15
1. Montrons en fait la contraposée.
   S'il existe i tel que p_i divise $N = p_1p_2 \dots p_r + 1$ (i est fixé) alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $N = kp_i$ donc
   $$p_i(k - p_1p_2 \dots p_{i-1}p_{i+1} \dots p_r) = 1$$
   soit $p_iq = 1$ (avec $q = k - p_1p_2 \dots p_{i-1}p_{i+1} \dots p_r$ un nombre entier) Donc $p_i \in \mathbb{Z}$ et $1/p_i = q \in \mathbb{Z}$, alors p_i vaut 1 ou -1. Et donc p_i n'est pas un nombre premier.
   Conclusion : par contraposition il est vrai que N n'est divisible par aucun des p_i
2. Raisonnons par l'absurde : s'il n'existe qu'un nombre fini r de nombres premiers $p_1, \dots, p_r$ alors $N = p_1p_2 \dots p_r + 1$ est un nombre premier car divisible par aucun nombre premier autre que lui même (c'est le 1.).
   Mais N est strictement supérieur à tous les p_i. Conclusion on a construit un nombre premier N différent des p_i, il y a donc au moins $r + 1$ nombres premiers, ce qui est absurde.

Correction 16 Rédigeons la deuxième égalité. Soit $\mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ l'assertion suivante :

$$(\mathcal{A}_n) \qquad \sum_{k=1}^{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- $\mathcal{A}_0$ est vraie $(1 = 1)$.
- Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ supposons que $\mathcal{A}_n$ soit vraie. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} +(n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

Ce qui prouve $\mathcal{A}_{n+1}$.
- Par le principe de récurrence nous venons de montrer que $\mathcal{A}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction 17 1. Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n > 3$. Soit l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_n): \quad x_n > 3.$$

- La proposition $\mathcal{H}_0$ est vraie car $x_0 = 4 > 3$.
- Soit $n \geqslant 0$, supposons $\mathcal{H}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est alors vraie.

$$x_{n+1} - 3 = \frac{2{x_n}^2 - 3}{x_n + 2} - 3 = \frac{2{x_n}^2 - 3x_n - 9}{x_n + 2}.$$

Par hypothèse de récurrence $x_n > 3$, donc $x_n + 2 > 0$ et $2{x_n}^2 - 3x_n - 9 > 0$ (ceci par étude de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 3x - 9$ pour $x > 3$). Donc $x_{n+1} - 3$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Nous avons montrer

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$$

et comme $\mathcal{H}_0$ est vraie alors $\mathcal{H}_n$ est vraie quelque soit n. Ce qui termine la démonstration.

2. Montrons que $x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3)$ est positif.

$$x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{2{x_n}^2 - 3}{x_n + 2} - \frac{3}{2}(x_n - 3) = \frac{1}{2}\frac{{x_n}^2 + 3x_n + 12}{x_n + 2}$$

Ce dernier terme est positif car $x_n > 3$.

3. Montrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$. Soit notre nouvelle l'hypothèse de récurrence :

$$(\mathcal{H}_n) \quad x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3.$$

- La proposition $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$, supposons que $\mathcal{H}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée.
D'après la question précédente $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$ et par hypothèse de récurrence $x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$; en réunissant ces deux inégalités nous avons $x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(\left(\frac{3}{2}\right)^n) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$.
- Nous concluons en résumant la situation :
$\mathcal{H}_0$ est vraie, et $\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$ quelque soit n. Donc $\mathcal{H}_n$ est toujours vraie.

4. La suite (x_n) tend vers $+\infty$ et n'est donc pas convergente.

Correction 18 Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la proposition suivante :

$$\mathcal{H}_n : \quad n \text{ droites en position générale découpent le plan en } \; R_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \text{ régions.}$$

- pour $n = 1$ alors une droite divise le plan en deux régions. $\mathcal{H}_1$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 2$ et supposons que $\mathcal{H}_{n-1}$ soit vraie, et montrons $\mathcal{H}_n$. Soient $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ n droites en position générale, la droite Δ_n rencontre les droites $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$ en $n-1$ points, donc Δ_n traverse (et découpe en deux) n régions du découpage $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$. Le découpage par Δ_n donne donc la relation $R_n = R_{n-1} + n$.
  Or par hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_{n-1}$: $R_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2} + 1$ donc
  $$R_n = R_{n-1} + n = \frac{(n-1)n}{2} + 1 + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$
  Et $\mathcal{H}_n$ est vraie.
  Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathcal{H}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{H}_n$.
- Conclusion : par récurrence on a montré que $\mathcal{H}_n$ est vraie quelque soit $n \geqslant 1$.

Correction 19 1. Montrons la proposition demandée par récurrence : soit $\mathcal{A}_n$ l'assertion $f^{n+1} = f \circ f^n$. Cette assertion est vraie pour $n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ supposons $\mathcal{A}_n$ vraie. Alors
$$f^{n+2} = f^{n+1} \circ f = (f \circ f^n) \circ f = f \circ (f^n \circ f) = f \circ f^{n+1}.$$
Nous avons utiliser la definition de f^{n+2}, puis la proposition $\mathcal{A}_n$, puis l'associativité de la composition, puis la définition de f^{n+1}. Donc $\mathcal{A}_{n+1}$ est vraie. Par le principe de récurrence
$$\forall \in \mathbb{N} \;\; f^n \circ f = f \circ f^n.$$

2. On procède de même par récurrence : soit $\mathcal{A}_n$ l'assertion $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$. Cette assertion est vraie pour $n = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ supposons $\mathcal{A}_n$ vraie. Alors
$$(f^{-1})^{n+1} = (f^{-1})^n \circ f^{-1} = (f^n)^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ f^n)^{-1} = (f^n \circ f)^{-1} = (f^{n+1})^{-1}.$$
Donc $\mathcal{A}_{n+1}$ est vraie. Par le principe de récurrence
$$\forall \in \mathbb{N} \;\; (f^{-1})^n = (f^n)^{-1}.$$